Κβαντική Οπτική και Lasers.

Εξέταση της 1ης Σεπτεμβρίου 2014. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Θέμα 1.

Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Rabi ενός ΗΜ τρόπου

$$\hat{H}_R = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \; + \; \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- \; + \; \hbar g\hat{S}_+\hat{a}^\dagger \; + \; \hbar g\hat{S}_+\hat{a} \; + \; \hbar g\hat{S}_-\hat{a}^\dagger \; + \; \hbar g\hat{S}_-\hat{a}\,.$$

1. Εξηγήστε όλα τα σύμβολα που περιέχει και τι περιγράφει κάθε ένας από τους έξι προσθετέους.
2. Ποιούς δύο από αυτούς τους έξι προσθετέους αγνοούμε στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings και για ποιό λόγο;
3. Θεωρήστε τώρα τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings ενός ΗΜ τρόπου. Να υπολογιστούν τα $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$, $\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle$, $\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$, $\langle\hat{S}_-\hat{S}_+\rangle$, $<\hat{S}_+\hat{a}>$, $<\hat{S}_+\hat{a}^\dagger>$, $<\hat{S}_-\hat{a}^\dagger>$, $<\hat{S}_-\hat{a}>$ για την κατάσταση: $|\psi_E(t)> = \; c_1(t)\,|\downarrow, n+1> \; + c_2(t)\,|\uparrow, n>$

Θεωρήστε τώρα αρχικές συνθήκες $c_1(0)=0$, $c_2(0)=1$.

4. Αποδείξτε ότι οι συντελεστές $c_1(t)$ και $c_2(t)$ ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$i\begin{pmatrix}\dot{c_1}\\ \dot{c_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(n+1)\omega & g\sqrt{n+1}\\ g\sqrt{n+1} & \Omega + n\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

Ας ορίσουμε τη «γενικευμένη συχνότητα Rabi» $\Omega_{n+1} = [\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2(n+1)]^{1/2}$. Αποδεικνύεται ότι

$$|c_1(t)|^2 = \frac{(n+1)g^2}{\Omega_{n+1}^2}\sin^2(\Omega_{n+1}t)\,.$$

5. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των φωτονίων στην κοιλότητα.
6. Να αποδώσετε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της «αναμενόμενης» ή «μέσης» τιμής του αριθμού των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη του δισταθμικού συστήματος.
7. Δείξτε ότι η συχνότητα Rabi καθορίζει (I) το πλάτος και (II) το χρόνο μεταξύ διαδοχικών μεγίστων ή ελαχίστων στις «ταλαντώσεις Rabi».

Θέμα 2.

Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών στο laser στην αδιάστατη μορφή:

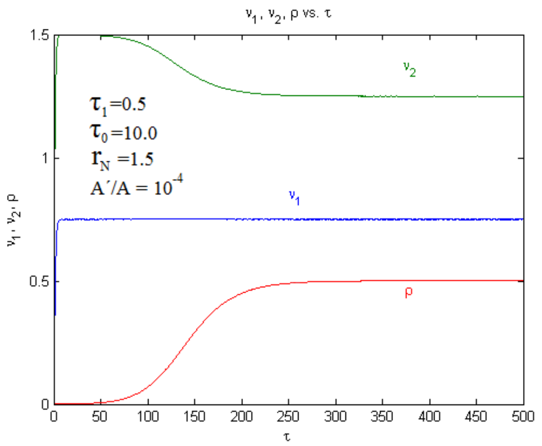
$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \qquad (\varepsilon_1)$$

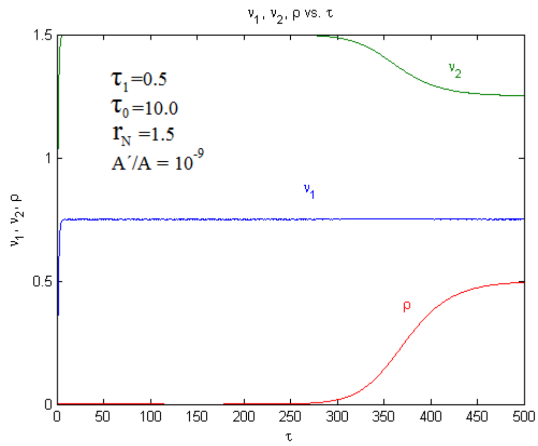
$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \qquad (\varepsilon_2)$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \{\frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1)\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \qquad (\varepsilon_3)$$

Οι εικόνες παριστάνουν τη λύση τους με matlab.

1. Εξηγήστε όλα τα σύμβολα.
2. Γιατί στις εικόνες υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η ϱ για να γίνει αισθητή;
3. Πως προκύπτει ότι στη στάσιμη κατάσταση και στις δύο περιπτώσεις, $\nu_1 \approx 0.75$, $\nu_2 \approx 1.25$, $\varrho \approx 0.5$;





ΘΕΜΑ 1

$$\hat{H}_R = \hbar\omega \hat{a}^+\hat{a} + \hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g \hat{S}_+\hat{a}^+ + \hbar g \hat{S}_+\hat{a} + \hbar g \hat{S}_-\hat{a}^+ + \hbar g \hat{S}_-\hat{a}$$

1. ω: συχνότητα φωτονίου

$\hat{a}^+$: τελεστής δημιουργίας φωτονίου

$\hat{a}$: » καταστροφής φωτονίου

g: συχνότητα Rabi

$\Omega = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$ όπου E_2: άνω ενεργ. στάθμη

E_1: κάτω ενεργ. στάθμη

$\hat{S}_+$: τελεστής αναβιβάσεως ηλεκτρονίου

$\hat{S}_-$: τελεστής καταβιβάσεως ηλεκτρονίου

η χαμιλτονιανή ΗΜ πεδίου ενός τρόπου

$$\hat{H}_{HM} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \tfrac{1}{2}\right) \text{ και αγνοούνται το } \frac{\hbar\omega}{2} \Rightarrow \hat{H}_{HM} = \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a}$$

η χαμιλτονιανή του ατόμου

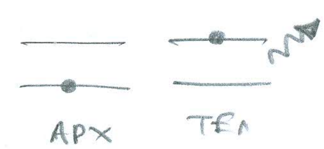
$$\hat{H}_{at} = E_2\hat{S}_+\hat{S}_- + E_1\hat{S}_-\hat{S}_+ \text{ και θέτονται } E_1 = 0 \Rightarrow \hat{H}_{AT} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-$$

$$E_2 - E_1 = \hbar\Omega$$

η χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως ΗΜ πεδίου - άτομο

$$\hat{H}_{AF} = \hbar g(\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{a}^+ + \hat{a}) = \underbrace{\hbar g\hat{S}_+\hat{a}^+}_{1ος} + \underbrace{\hbar g\hat{S}_+\hat{a}}_{2ος} + \underbrace{\hbar g\hat{S}_-\hat{a}^+}_{3ος} + \underbrace{\hbar g\hat{S}_-\hat{a}}_{4ος}$$

<u>1ος όρος</u>: το ηλεκτρόνιο ανεβαίνει κ δημιουργείται φωτόνιο εκπέμπεται



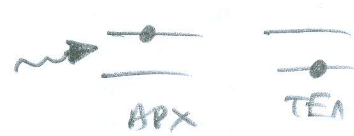
$\Delta(\text{Ενέργειας}) > 0$

αυτός ο όρος μόνος του δε διατηρεί την ενέργεια

<u>2ος όρος</u>: το ηλεκτρόνιο ανεβαίνει κ απορροφάται φωτόνιο καταστρέφεται

<u>3ος όρος</u>: το ηλεκτρόνιο κατεβαίνει κ εκπέμπεται φωτόνιο δημιουργείται

<u>4ος όρος</u> το ηλεκτρόνιο κατεβαίνει κ καταστρέφεται φωτόνιο απορροφάται



$\Delta(\text{Ενέργειας}) < 0$

αυτός ο όρος μόνος του δε διατηρεί την ενέργεια

2. Αγνοούμε τους όρους $\hbar g\hat{S}_+\hat{a}^+$ και $\hbar g\hat{S}_-\hat{a}$ με τη δικαιολογία ότι ο καθένας από αυτούς, μόνος του, δε διατηρεί την ενέργεια.

3. APA

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega \hat{a}^+\hat{a} + \hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g \hat{S}_+\hat{a} + \hbar g \hat{S}_-\hat{a}^+$$

$$\langle \hat{a}^+\hat{a} \rangle_{(E)} = \left\{ c_1^*(t) \langle \downarrow n+1| + c_2^*(t) \langle \uparrow n| \right\} \hat{a}^+\hat{a} \left\{ c_1(t) |\downarrow n+1\rangle + c_2(t) |\uparrow n\rangle \right\}$$

$$= |c_1(t)|^2 \langle \downarrow n+1 | \hat{a}^+\hat{a} | \downarrow n+1\rangle + c_1^*(t) c_2(t) \langle \downarrow n+1 | \hat{a}^+\hat{a} | \uparrow n\rangle$$

$$+ c_2^*(t) c_1(t) \langle \uparrow n | \hat{a}^+\hat{a} | \downarrow n+1\rangle + |c_2(t)|^2 \langle \uparrow n | \hat{a}^+\hat{a} | \uparrow n\rangle =$$

$$= |c_1(t)|^2 (n+1) + 0 + 0 + |c_2(t)|^2 n = n|c_1(t)|^2 + n|c_2(t)|^2 + |c_1(t)|^2$$

$$= n + |c_1(t)|^2$$

$$\langle \hat{a}\hat{a}^+ \rangle_{(E)} = \left\{ c_1^*(t) \langle \downarrow n+1| + c_2^*(t) \langle \uparrow n| \right\} \hat{a}\hat{a}^+ \left\{ c_1(t) |\downarrow n+1\rangle + c_2(t) |\uparrow n\rangle \right\} =$$

$$= |c_1(t)|^2 \langle \downarrow n+1 | \hat{a}\hat{a}^+ | \downarrow n+1\rangle + c_1^*(t) c_2(t) \langle \downarrow n+1 | \hat{a}\hat{a}^+ | \uparrow n\rangle$$

$$+ c_2^*(t) c_1(t) \langle \uparrow n | \hat{a}\hat{a}^+ | \downarrow n+1\rangle + |c_2(t)|^2 \langle \uparrow n | \hat{a}\hat{a}^+ | \uparrow n\rangle$$

$$= |c_1(t)|^2 (n+2) + 0 + 0 + |c_2(t)|^2 (n+1) =$$

$$= \underline{|c_1(t)|^2 n} + |c_1(t)|^2 \cdot 2 + \underline{|c_2(t)|^2 n} + |c_2(t)|^2$$

$$= n + 1 + |c_1(t)|^2$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{S}_- \rangle_{(E)} = \left\{ c_1^*(t) \langle \downarrow n+1| + c_2^*(t) \langle \uparrow n| \right\} \hat{S}_+\hat{S}_- \left\{ c_1(t) |\downarrow n+1\rangle + c_2(t) |\uparrow n\rangle \right\}$$

$$= |c_1(t)|^2 \langle \downarrow n+1 | \hat{S}_+\hat{S}_- | \downarrow n+1\rangle + c_1^*(t) c_2(t) \langle \downarrow n+1 | \hat{S}_+\hat{S}_- | \uparrow n\rangle$$

$$+ c_2^*(t) c_1(t) \langle \uparrow n | \hat{S}_+\hat{S}_- | \downarrow n+1\rangle + |c_2(t)|^2 \langle \uparrow n | \hat{S}_+\hat{S}_- | \uparrow n\rangle$$

$$= 0 + 0 + 0 + |c_2(t)|^2 = |c_2(t)|^2$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{S}_+ \rangle_{(E)} = \left\{ c_1^*(t) \langle \downarrow n+1| + c_2^*(t) \langle \uparrow n| \right\} \hat{S}_-\hat{S}_+ \left\{ c_1(t) |\downarrow n+1\rangle + c_2(t) |\uparrow n\rangle \right\}$$

$$= |c_1(t)|^2 \langle \downarrow n+1 | \hat{S}_-\hat{S}_+ | \downarrow n+1\rangle + c_1^*(t) c_2(t) \langle \downarrow n+1 | \hat{S}_-\hat{S}_+ | \uparrow n\rangle$$

$$+ c_2(t)^* c_1(t) \langle \uparrow n | \hat{S}_-\hat{S}_+ | \downarrow n+1\rangle + |c_2(t)|^2 \langle \uparrow n | \hat{S}_-\hat{S}_+ | \uparrow n\rangle$$

$$= |c_1(t)|^2 + 0 + 0 + 0 = |c_1(t)|^2$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{a}\rangle_{E} = \left\{ c_1(t)^* \langle \downarrow n+1| + c_2^*(t)\langle \uparrow n| \right\} \hat{S}_+\hat{a} \left\{ c_1(t)\,|\downarrow n+1\rangle + c_2(t)|\uparrow n\rangle \right\}$$

$$= |c_1(t)|^2 \langle \downarrow n+1|\hat{S}_+\hat{a}|\downarrow n+1\rangle + c_1^*(t)\,c_2(t)\langle \downarrow n+1|\hat{S}_+\hat{a}|\uparrow n\rangle$$

$$+ c_2^*(t)\,c_1(t)\,\langle \uparrow n|\hat{S}_+\hat{a}|\downarrow n+1\rangle + |c_2(t)|^2 \langle \uparrow n|\hat{S}_+\hat{a}|\uparrow n\rangle$$

$$= 0 + 0 + c_1(t)\,c_2^*(t)\sqrt{n+1} + 0 = c_1(t)\,c_2^*(t)\sqrt{n+1}$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{a}^+\rangle_{E} = \left\{ c_1^*(t)\langle \downarrow n+1| + c_2^*(t)\langle \uparrow n| \right\} \hat{S}_+\hat{a}^+ \left\{ c_1(t)|\downarrow n+1\rangle + c_2(t)|\uparrow n\rangle \right\}$$

$$= |c_1(t)|^2 \langle \downarrow n+1|\hat{S}_+\hat{a}^+|\downarrow n+1\rangle + c_1^*(t)c_2(t)\langle \downarrow n+1|\hat{S}_+\hat{a}^+|\uparrow n\rangle +$$

$$+ c_2^*(t)c_1(t)\langle \uparrow n|\hat{S}_+\hat{a}^+|\downarrow n+1\rangle + |c_2(t)|^2 \langle \uparrow n|\hat{S}_+\hat{a}^+|\uparrow n\rangle =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{a}^+\rangle_{E} = \left\{ c_1^*(t)\langle \downarrow n+1| + c_2^*(t)\langle \uparrow n| \right\} \hat{S}_-\hat{a}^+ \left\{ c_1(t)|\downarrow n+1\rangle + c_2(t)|\uparrow n\rangle \right\}$$

$$= |c_1(t)|^2 \langle \downarrow n+1|\hat{S}_-\hat{a}^+|\downarrow n+1\rangle + c_1^*(t)c_2(t)\langle \downarrow n+1|\hat{S}_-\hat{a}^+|\uparrow n\rangle$$

$$+ c_2^*(t)c_1(t)\,\langle \uparrow n|\hat{S}_-\hat{a}^+|\downarrow n+1\rangle + |c_2(t)|^2 \langle \uparrow n|\hat{S}_-\hat{a}^+|\uparrow n\rangle =$$

$$= 0 + c_1^*(t)c_2(t)\sqrt{n+1} + 0 + 0 = c_1^*(t)\,c_2(t)\sqrt{n+1}$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{a}\rangle_{E} = \left\{ c_1^*(t)\langle \downarrow n+1| + c_2^*(t)\langle \uparrow n| \right\} \hat{S}_-\hat{a} \left\{ c_1(t)|\downarrow n+1\rangle + c_2(t)|\uparrow n\rangle \right\}$$

$$= |c_1(t)|^2 \langle \downarrow n+1|\hat{S}_-\hat{a}|\downarrow n+1\rangle + c_1^*(t)c_2(t)\langle \downarrow n+1|\hat{S}_-\hat{a}|\uparrow n\rangle$$

$$+ c_2^*(t)c_1(t)\langle \uparrow n|\hat{S}_-\hat{a}|\downarrow n+1\rangle + |c_2(t)|^2 \langle \uparrow n|\hat{S}_-\hat{a}|\uparrow n\rangle =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

4. 5. 6. 7. Υπάρχουν στις σημειώσεις στην η-τάξη

ΝΑ ΕΠΙΣΥΝΑΦΘΟΥΝ

ΘΕΜΑ 2

πληθυσμός στάθμης i

κρίσιμη άντληση

1. $\nu_i := \frac{n_i}{n_0}$ $\quad n_i := \frac{N_i}{V}$ $\quad n_0 := t_2 r_c$ $\quad r_c := \frac{R_c}{V} = \frac{1}{B t_0 (t_2 - t_1) h\nu F(1)}$

όγκος κοιλότητας

συντελεστής εξαγωγ. διεργασίας

$\tau := \frac{t}{t_2}$

$\tau_0 := \frac{t_0}{t_2}$ $\qquad \rho_i = B \rho t_2$

$\tau_1 = \frac{t_1}{t_2}$

t_2: χρόνος ζωής στάθμης 2

t_1: χρόνος ζωής στάθμης 1

t_0: εκφράζει απώλειες στα κάτοπτρα

A', A αναφέρονται στην αυθόρμητη εκπομπή από την 2 στην 1

Το μεν $A = \frac{1}{t_2}$ το δ' A' αφορά το μέρος των φωτονίων που εκπέμπονται αυθόρμητα κατά τη μετάβαση $2 \to 1$ με τέτοια κατεύθυνση ώστε να προσπίπτουν στα κάτοπτρα.

Όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται στις (ε_1), (ε_2), (ε_3) είναι αδιάστατα.

2. Η μόνη παράμετρος που διαφέρει στις δύο εικόνες είναι η A'

$\frac{A'}{A} = 10^{-4}$ αριστερά κ $\frac{A'}{A} = 10^{-9}$ δεξιά

όταν ακόμα $\rho = 0$ ο μόνος παράγοντας που μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση της ρ (όπως φαίνεται από την εξ. (ε_3)) είναι ο $\frac{A'}{A} \cdot \nu_2 \frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)}$

επειδή αριστερά $\frac{A'}{A} = 10^{-4}$ ενώ δεξιά $\frac{A'}{A} = 10^{-9}$ $\Rightarrow$

αριστερά ξεκινάει η ρ γρηγορότερα

3. Στη στάσιμη κατάσταση $\frac{d\nu_1}{d\tau} = \frac{d\nu_2}{d\tau} = 0 = \frac{d\rho}{d\tau}$ $\Rightarrow$ οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$ γίνονται

Αν επιπλέον θεωρήσουμε το λόγο $\frac{A'}{A}$ αμελητέο

$$0 = \nu_2 + \rho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \quad (\Sigma K1)$$

$$0 = r_N + \rho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \quad (\Sigma K2)$$

$$0 = -\rho + \rho(\nu_2 - \nu_1)\frac{1}{(1-\tau_1)} \quad (\Sigma K3)$$

$$\rho(1-\tau_1) = \rho(\nu_2 - \nu_1) \quad (\Sigma K4)$$

$\Sigma K1 \oplus \Sigma K2 \Rightarrow r_N = \frac{\nu_1}{\tau_1} \Rightarrow \nu_1 = r_N \tau_1 = 1.5 \cdot 0.5 \Rightarrow \boxed{\nu_1 = 0.75}$

$\Sigma K2 \oplus \Sigma K4$: $\rho(1-\tau_1) = r_N - \nu_2$ $(\Sigma K5)$ $\Rightarrow$

$\boxed{\text{αν } \rho = 0 \Rightarrow \boxed{\nu_2 = r_N}}$

$\boxed{\text{για } \rho > 0}$ $\Rightarrow 1 - \tau_1 = \nu_2 - \nu_1 \Rightarrow$

$\nu_2 = \nu_1 + 1 - \tau_1 \Rightarrow \nu_2 = 0.75 + 1 - 0.5 \Rightarrow \boxed{\nu_2 = 1.25} \overset{\Sigma K5}{\Rightarrow} \rho = \frac{1.5 - 1.25}{1 - 0.5} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5 \Rightarrow \boxed{\rho = 0.5}$