Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
Κβαντική Οπτική και Lasers.
Εξέταση της 1ης Σεπτεμβρίου 2015. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

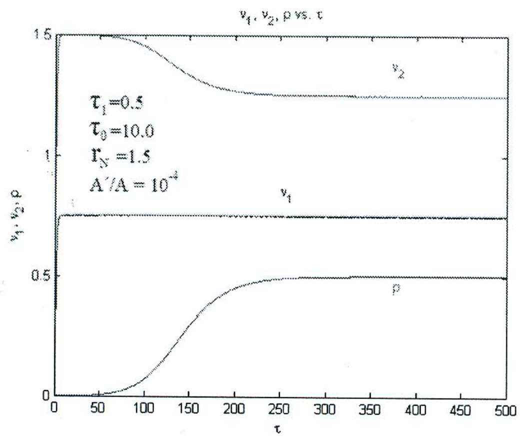
Θέμα 1.
Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών στο laser στην αδιάστατη μορφή:

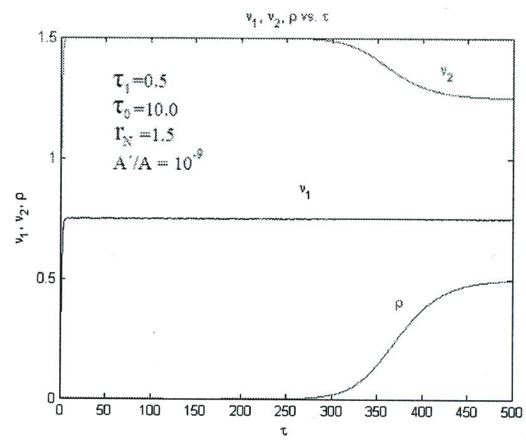
$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \qquad (\varepsilon_1)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \qquad (\varepsilon_2)$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \{\frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1)\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \qquad (\varepsilon_3)$$

Οι εικόνες παριστάνουν τη λύση τους με matlab.
(α΄) Εξηγήστε όλα τα σύμβολα.
(β΄) Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών 1 και 2;
(γ΄) Γιατί στις εικόνες υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η ϱ για να γίνει αισθητή;
(δ΄) Πως προκύπτει ότι στη στάσιμη κατάσταση και στις δύο περιπτώσεις, $\nu_1 \approx 0.75$, $\nu_2 \approx 1.25$, $\varrho \approx 0.5$;





Θέμα 2.
(α΄) Ελέγξτε αν η κινητική ενέργεια του ατόμου του Υδρογόνου μετά την (εξαναγκασμένη) απορρόφηση είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου, υπολογίζοντας το λόγο τους Λ. Θεωρήστε το άτομο αρχικά ακίνητο. Δίνονται η μάζα του πρωτονίου $m_p \approx 1.673 \; 10^{-27}$ kg και η μάζα του ηλεκτρονίου $m_e \approx 9.109 \; 10^{-31}$ kg. Αγνοήστε το έλλειμμα μάζας για τη συγκρότηση του πυρήνα. Πάρτε ως τυπικό παράδειγμα ένα πράσινο φωτόνιο με $\lambda \approx 500$ nm. Δίνονται ακόμη $h \approx 6.626 \; 10^{-34}$ Js και $c \approx 3 \; 10^8$ m/s.
(β΄) Για ποιο μήκος κύματος λ, στο άτομο του Υδρογόνου, θα μπορούσε ο λόγος Λ να γίνει ίσος με τη μονάδα; Αναφέρατε ένα τυπικό μέγεθος που να αντιστοιχεί σε αυτό το μήκος.

Θέμα 3.
Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Rabi

$$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \; + \; \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- \; + \; \hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m) \, .$$

(α΄) Εξηγήστε όλα τα σύμβολα που περιέχει και συνοπτικά τι περιγράφει κάθε προσθετέος.
(β΄) Στον τελευταίο προσθετέο $\hbar g^m (\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+ \hat{a}_m + \hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_- \hat{a}_m)$ υπάρχουν 4 «υποπροσθετέοι». Εξηγήστε ποια διαδικασία περιγράφει ο καθένας από αυτούς και με ποια δικαιολογία αγνοούμε 2 από τους 4 υποπροσθετέους στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings. Ισχύει η ίδια δικαιολογία όταν έχουμε πολλούς τρόπους m;
(γ΄) Βρείτε τι κάνουν οι όροι $\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m$, $\hat{a}_m \hat{a}_m^\dagger$, $\hat{S}_+ \hat{S}_-$, $\hat{S}_- \hat{S}_+$, $\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger$, $\hat{S}_+ \hat{a}_m$, $\hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger$, $\hat{S}_- \hat{a}_m$ στην κατάσταση $|\downarrow, n_m>$.
(δ΄) Να υπολογιστούν οι $<\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m>$, $<\hat{a}_m \hat{a}_m^\dagger>$, $<\hat{S}_+ \hat{S}_->$, $<\hat{S}_- \hat{S}_+>$, $<\hat{S}_+ \hat{a}_m^\dagger>$, $<\hat{S}_+ \hat{a}_m>$, $<\hat{S}_- \hat{a}_m^\dagger>$, $<\hat{S}_- \hat{a}_m>$ στην κατάσταση $|\downarrow, n_m>$.

ΘΕΜΑ 1ο

(α) $\nu_i = \frac{n_i}{n_0}$ $n_i = \frac{N_i}{V}$ N_i → πληθυσμός στάθμης i, V → όγκος κοιλότητας $r = \frac{R}{V}$ $r_c = \frac{R_c}{V}$

$n_0 = t_2 r_c$ $r_c = \frac{R_c}{V} = \frac{1}{B t_0 (t_2 - t_1) h\nu F(\nu)}$, R_c → κρίσιμη άντληση $r_N = \frac{r_c}{r}$ ← αδιάστατη άντληση

$\tau = \frac{t}{t_2}$ $\varrho = B \rho t_2$ B: συντελεστής Einstein εξαναγκασμένων διεργασιών

$\tau_0 = \frac{t_0}{t_2}$ ρ: πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας t_2: χρόνος ζωής στάθμης 2

$\tau_1 = \frac{t_1}{t_2}$ $[\rho] = \frac{J}{m^3 Hz}$ t_1: » 1

t_0: έκφραση φαινομενολογικά τις απώλειες στα κάτοπτρα

A', A αναφέρονται στην αυθόρμητη εκπομπή από τη στάθμη 2 στη στάθμη 1

F(ν): συνάρτηση φασματικής γραμμής, ν ↑ συχνότητα

$A = \frac{1}{t_2}$, το A' αφορά το μέρος των φωτονίων που εκπέμπονται αυθόρμητα κατά τη μετάβαση 2→1 με τέτοια κατεύθυνση ώστε να προσπίπτουν στα κάτοπτρα

Όλα τα μεγέθη των εξισώσεων (Ε1), (Ε2), (Ε3) είναι αδιάστατα.

(β') $\tau_1 = \frac{t_1}{t_2} = 0.5$ (δίνεται στα σχήματα)

(γ') Η μόνη παράμετρος που διαφέρει στις δύο εικόνες είναι η $\frac{A'}{A}$

$\frac{A'}{A} = 10^{-4}$ αριστερά $\frac{A'}{A} = 10^{-9}$ δεξιά

Όταν $\varrho = 0$, ο μόνος παράγων που μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση της ϱ (δείτε εξ. (Ε3)) είναι ο $\frac{A'}{A} \nu_2 \frac{1}{\tau_0 (1 - \tau_1)}$

Επειδή αριστερά $\frac{A'}{A} = 10^{-4} > 10^{-9} = \frac{A'}{A}$ δεξιά ⟹

αριστερά η ϱ αρχίζει να αυξάνεται γρηγορότερα.

δ') Στη στάσιμη κατάσταση $\frac{d\nu_1}{d\tau} = \frac{d\nu_2}{d\tau} = 0 = \frac{d\rho}{d\tau}$ ⇒ οι εξ. $(Σ_1), (Σ_2), (Σ_3)$ γίνονται

Αν επιπλέον θεωρήσουμε το $\frac{A'}{A}$ αμελητέο όταν πια βρισκόμαστε στη στάσιμη κατάσταση

$$0 = \nu_2 + \rho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \quad (ΣΚ1)$$

$$0 = r_N + \rho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \quad (ΣΚ2)$$

$$0 = -\rho + \rho(\nu_2 - \nu_1)\frac{1}{(1-\tau_1)} \quad (ΣΚ3) \Rightarrow \rho(1-\tau_1) = \rho(\nu_2 - \nu_1) \quad (ΣΚ4)$$

$$(ΣΚ1) \oplus (ΣΚ2) \Rightarrow r_N = \frac{\nu_1}{\tau_1} \Rightarrow \boxed{\nu_1 = \tau_1 \cdot r_N} \ (Λ1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1 = \tau_1 r_N \ (Λ1) \\ \tau_1 = 0.5 \text{ κ } r_N = 1.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nu_1 = 0.75} \ (ΛΤ1)$$

$$(ΣΚ2) \oplus (ΣΚ4) \Rightarrow 0 = r_N - \rho(1-\tau_1) - \nu_2 \Rightarrow \rho(1-\tau_1) = r_N - \nu_2 \quad (ΣΚ5)$$

αν $\rho = 0$, τότε $(ΣΚ5) \Rightarrow$ $\nu_2 = r_N$

αν $\rho > 0$, τότε $(ΣΚ4) \Rightarrow \nu_2 - \nu_1 = 1 - \tau_1 \Rightarrow \nu_2 = \nu_1 + 1 - \tau_1$ (Λ2)

οπότε για $\tau_1 = 0.5$ κ $\nu_1 = 0.75$ (ΛΤ1) $\Rightarrow \nu_2 = 0.75 + 1 - 0.5$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_2 = 1.25} \quad (ΛΤ2)$$

$$(ΣΚ5) \quad \rho = \frac{r_N - \nu_2}{1-\tau_1} \Rightarrow \rho = \frac{1.5 - 1.25}{1 - 0.5} = \frac{0.25}{0.5} \Rightarrow \boxed{\rho = 0.5} \quad ΛΤ3$$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρώνται το άτομο αρχικά ακίνητο. Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε $P_{ατ}^{ΜΕΤΑ} = P_φ^{ΠΡΙΝ} = \frac{h\nu}{c}$

α') $$\Lambda = \frac{\frac{P_{ατ}^2}{2m_{ατ}}}{E_φ} = \frac{h^2\nu^2}{c^2 2m_{ατ} \cancel{h\nu}} = \frac{hc}{\lambda c^2 2m_{ατ}} \Rightarrow \Lambda = \frac{h}{2\lambda c\, m_{ατ}}$$

$$m_{ατ} \simeq m_p + m_e = 1.673 \cdot 10^{-27}\,kg + 9.109 \cdot 10^{-31}\,kg \simeq 1.673 \cdot 10^{-27}\,kg$$

$$\Lambda = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\,Js}{2 \cdot 500 \cdot 10^{-9}\,m \cdot 3 \cdot 10^{8}\,m/s \cdot 1.673 \cdot 10^{-27}\,kg} \simeq 1.320 \cdot 10^{-9}$$ πράγματι αμελητέος

δηλ. η κινητική ενέργεια του ατόμου Υδρογόνου μετά την (εξαναγκασμένη) απορρόφηση είναι αμελητέα (β') $\Lambda = \frac{h}{2\lambda c m_{at}} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{h}{2 c m_{at}} = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,Js}{2\cdot 3\cdot 10^{8}\frac{m}{s}\,1.673\cdot 10^{-27}\,kg}$

$\Rightarrow \lambda = 0{,}660\cdot 10^{-15}\,m = 0.660\,fm$

το οποίο είναι λιλλιπούτειο

π.χ. ακτίνες γ ~> λ_γ 10 pm $= 10\cdot 10^{-12}\,m$

διάμετροι πυρήνα 1.75 fm (υδρογόνο) έως
15 fm (μαζικότερα άτομα όπως το ουράνιο)

ΘΕΜΑ 3

(α') $\hat{H}^m_R = \hbar\omega_m \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m\left(\hat{S}_+\hat{a}^\dagger_m + \hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}^\dagger_m + \hat{S}_-\hat{a}_m\right)$

m: τρόπος τού ΗΜ πεδίου με κυκλική συχνότητα ω_m

$\hat{a}^\dagger_m, \hat{a}_m$: τελεστές καταστροφής - δημιουργίας φωτονίων

$\hbar\Omega = E_2 - E_1$: ή ενεργειακή διαφορά μεταξύ τών δύο σταθμών E_2, E_1 τού άτόμου

$\hat{S}_+, \hat{S}_-$: τελεστές άναβιβάσεως, καταβιβάσεως τού ήλεκτρονίου μεταξύ τών σταθμών τού άτόμου

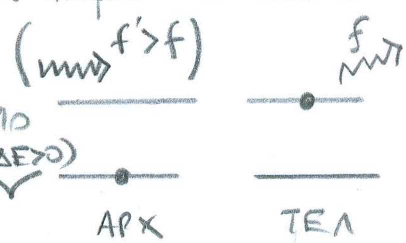
g^m: συχνότητα Rabi

$\hbar\omega_m \hat{a}^\dagger_m \hat{a}_m$: Χαμιλτονιανή ΗΜ πεδίου

$\hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_-$: Χαμιλτονιανή άτόμου

$\hbar g^m(\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{a}^\dagger_m + \hat{a}_m)$: Χαμιλτονιανή άλληλεπιδράσεως άτόμου - ΗΜ πεδίου

(β') $\hat{S}_+\hat{a}^\dagger_m$ Το ήλεκτρόνιο άνεβαίνει και δημιουργείται (εκπέμπεται) φωτόνιο

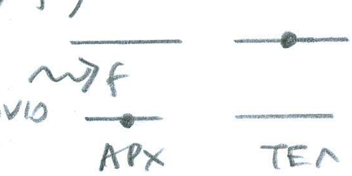


αυτός ό όρος, μόνος του, δεν διατηρεί την ενέργεια (ΔΕ>0)
άν όμως είχαμε πολλούς τρόπους είναι δυνατόν να άπορροφηθεί ένα φωτόνιο μεγαλύτερης ενέργειας, ενός άλλου τρόπου m' και μετά να άνέβει το ήλεκτρόνιο και να εκπεμφθεί φωτόνιο τού τρόπου m (τότε ή συχνότητα $f' > f$)

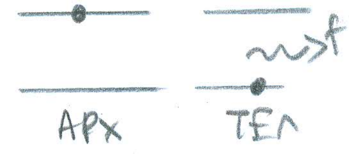
f': συχνότητα τρόπου m'

f: συχνότητα τρόπου m

$\hat{S}_+\hat{a}_m$ Το ήλεκτρόνιο άνεβαίνει και άπορροφάται (καταστρέφεται) φωτόνιο



$\hat{S}_-\hat{a}^\dagger_m$ Το ήλεκτρόνιο κατεβαίνει και δημιουργείται (εκπέμπεται) φωτόνιο



$\hat{a}_m$ το ηλεκτρόνιο κατεβαίνει <u>και</u> καταστρέφεται φωτόνιο
απορροφάται

αυτός ο όρος, μόνος του, δεν διατηρεί την ενέργεια $(\Delta E<0)$

Είναι όμως δυνατόν, αν έχαμε πολλούς τρόπους, να απορροφηθεί φωτόνιο συχνότητας f του τρόπου m και μετά το ηλεκτρόνιο να πέσει αλλά και να εκπεμφθεί φωτόνιο κάποιου άλλου τρόπου συχνότητας $f'>f$

Στα σχηματάκια φαίνεται περίπου τι γίνεται.
Αν έχουμε μόνο ένα τρόπο ΗΜ πεδίου m, δηλαδή αν υποσυμβάλλονται φωτόνια μιας μόνο συχνότητας, τότε δεν έχουν νόημα οι όροι $\hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger$ και $\hat{S}_-\hat{a}_m$ οι οποίοι, τότε, δεν διατηρούν την ενέργεια.

Αν έχουμε πολλούς ΗΜ τρόπους m (όπως υποδηλώνουν οι παρενθέσεις στα σχηματάκια), τότε οι όροι $S_+\hat{a}_m^\dagger$, $\hat{S}_-\hat{a}_m$ μπορούν να γίνουν αποδεκτοί αφού $f\neq f'$. Τότε $\hat{H}=\sum_m \hat{H}_R^m$ είναι η συνολική Χαμιλτονιανή του ΗΜ πεδίου.

γ') $\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m|\downarrow n_m\rangle = \hat{a}_m^\dagger\sqrt{n_m}\,|\downarrow n_m-1\rangle = \sqrt{n_m}\sqrt{n_m}\,|\downarrow n_m\rangle = n_m|\downarrow n_m\rangle$

$\hat{a}_m\hat{a}_m^\dagger|\downarrow n_m\rangle = \hat{a}_m\sqrt{n_m+1}\,|\downarrow n_m+1\rangle = \sqrt{n_m+1}\sqrt{n_m+1}\,|\downarrow n_m\rangle = (n_m+1)|\downarrow n_m\rangle$

$\hat{S}_+\hat{S}_-|\downarrow n_m\rangle = \hat{S}_+|0\, n_m\rangle = |0\, n_m\rangle$

$\hat{S}_-\hat{S}_+|\downarrow n_m\rangle = \hat{S}_-|\uparrow n_m\rangle = |\downarrow n_m\rangle$

$\hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger|\downarrow n_m\rangle = \sqrt{n_m+1}\,|\uparrow n_m+1\rangle$

$\hat{S}_+\hat{a}_m|\downarrow n_m\rangle = \sqrt{n_m}\,|\uparrow n_m-1\rangle$

$\hat{S}_-\hat{a}_m|\downarrow n_m\rangle = \sqrt{n_m}\,|0\, n_m-1\rangle$

$\hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger|\downarrow n_m\rangle = \sqrt{n_m+1}\,|0, n_m+1\rangle$

δ') $\langle\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m\rangle_{|\downarrow n_m\rangle} = \langle\downarrow n_m|\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m|\downarrow n_m\rangle = n_m\langle\downarrow n_m|\downarrow n_m\rangle = n_m$

$\langle\hat{a}_m\hat{a}_m^\dagger\rangle_{|\downarrow, n_m\rangle} = \langle\downarrow n_m|\hat{a}_m\hat{a}_m^\dagger|\downarrow n_m\rangle = (n_m+1)\langle\downarrow n_m|\downarrow n_m\rangle = n_m+1$

$\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle_{|\downarrow, n_m\rangle} = \langle\downarrow n_m|\hat{S}_+\hat{S}_-|\downarrow n_m\rangle = 0\,\langle\downarrow n_m|\downarrow n_m\rangle = 0$

I5

$$\langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle_{|\downarrow n_m\rangle} = \langle \downarrow n_m | \hat{S}_- \hat{S}_+ | \downarrow n_m \rangle = 1 \langle \downarrow n_m | \downarrow n_m \rangle = 1$$

$$\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m^+ \rangle_{|\downarrow n_m\rangle} = \langle \downarrow n_m | \hat{S}_+ \hat{a}_m^+ | \downarrow n_m \rangle = \sqrt{n_m+1} \langle \downarrow n_m | \uparrow n_m+1 \rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_+ \hat{a}_m \rangle_{|\downarrow n_m\rangle} = \langle \downarrow n_m | \hat{S}_+ \hat{a}_m | \downarrow n_m \rangle = \sqrt{n_m} \langle \downarrow n_m | \uparrow n_m-1 \rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{a}_m \rangle_{|\downarrow n_m\rangle} = \langle \downarrow n_m | \hat{S}_- \hat{a}_m | \downarrow n_m \rangle = \sqrt{n_m} \langle \downarrow n_m | 0, n_m-1 \rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{a}_m^+ \rangle_{|\downarrow n_m\rangle} = \langle \downarrow n_m | \hat{S}_- \hat{a}_m^+ | \downarrow n_m \rangle = \sqrt{n_m+1} \langle \downarrow n_m | 0\ n_m+1 \rangle = 0$$