Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κβαντική Οπτική και Lasers.

Εξέταση της 12ης Μαρτίου 2014. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Θέμα 1.

1. Εξηγήστε τις διεργασίες αλληλεπιδράσεως ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας με δισταθμικό άτομο. Δώστε τις εκφράσεις που δίνουν την πιθανότητα να συμβεί η κάθε διεργασία σε χρόνο *dt*.
2. Πως θα ορίζατε το χρόνο ζωής της άνω στάθμης;
3. Υπολογίστε την πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία, $\rho(\nu,T)d\nu$, θεωρώντας ότι ο πληθυσμός της στάθμης N_i δηλαδή ο μέσος αριθμός ατόμων στη στάθμη *i* ακολουθεί κατανομή Boltzmann με διαφορετικά στατιστικά βάρη g_i. Επίσης, θεωρώντας γνωστή τη μορφή του νόμου του Planck $\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}$, βρείτε το πηλίκο των συντελεστών Einstein A_{21}/B_{21}.

Θέμα 2.

Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Rabi

$$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \; + \; \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- \; + \; \hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_-\hat{a}_m)\,.$$

1. Εξηγήστε όλα τα σύμβολα που περιέχει και συνοπτικά τι περιγράφει κάθε προσθετέος.
2. Στον τελευταίο προσθετέο $\hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger + \hat{S}_-\hat{a}_m)$ υπάρχουν 4 «υποπροσθετέοι». Εξηγήστε ποια διαδικασία περιγράφει ο καθένας από αυτούς και με ποια δικαιολογία αγνοούμε 2 από τους 4 υποπροσθετέους στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings.
3. Ισχύει η ίδια δικαιολογία όταν έχουμε πολλούς τρόπους *m*;
4. Βρείτε τι κάνουν οι όροι $\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m$, $\hat{S}_+\hat{S}_-$, $\hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger$, $\hat{S}_+\hat{a}_m$, $\hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger$, $\hat{S}_-\hat{a}_m$, αλλά και ο $\hat{S}_-\hat{S}_+$ στην κατάσταση $|\downarrow, n_m>$.
5. Να υπολογιστούν οι $<\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m>$, $<\hat{S}_+\hat{S}_->$, $<\hat{S}_+\hat{a}_m^\dagger>$, $<\hat{S}_+\hat{a}_m>$, $<\hat{S}_-\hat{a}_m^\dagger>$, $<\hat{S}_-\hat{a}_m>$ αλλά και η $<\hat{S}_-\hat{S}_+>$ στην κατάσταση $|\downarrow, n_m>$.

Θέμα 3.

Θεωρήστε τις ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του Υδρογόνου

$$\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\varphi) = \Phi_k(\boldsymbol{r})$$

όπου $k = \{n,l,m\}$ ο συλλογικός κβαντικός αριθμός. Δηλαδή *n* = 1, 2, 3, ... είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός, *l* = 0, 1, 2, ... , *n*–1 είναι ο τροχιακός κβαντικός αριθμός, και *m* = –*l*, –*l*+1, ... , *l*–1, *l* είναι ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός. Συγκεκριμένα δίνονται οι

$$\Psi_{100}(r,\theta,\varphi) = (\pi\alpha_o^3)^{-1/2}\, e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$\Psi_{200}(r,\theta,\varphi) = (32\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,(2-\frac{r}{a_0})\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\Psi_{210}(r,\theta,\varphi) = (32\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{r}{a_0}\,\cos\theta\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\Psi_{21\pm1}(r,\theta,\varphi) = (64\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{r}{a_0}\,\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

Οι αντίστοιχες ιδιοενέργειες είναι $E_k = \hbar\Omega_k = -\frac{R_E}{n^2} = E_n$, δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός ως προς *l,m*. R_E = 13.6 eV είναι η ενέργεια Rydberg και a_0 είναι η ακτίνα Bohr. Τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής $\boldsymbol{p} = (-e)\boldsymbol{r}$, είναι τα $\boldsymbol{p}_{k_1k_2} \coloneqq \int_{\pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon}} dV\, \Phi_{k_1}^*(\boldsymbol{r})(-e)\boldsymbol{r}\Phi_{k_2}(\boldsymbol{r})$. Σημειωτέον ότι εάν το στοιχείο πίνακα της διπολικής ροπής μηδενίζεται, δεν υπάρχει τέτοια οπτική μετάβαση.

1. Υπολογίστε τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής $\boldsymbol{p}_{100\,200}$, $\boldsymbol{p}_{100\,210}$ και $\boldsymbol{p}_{100\,21\pm1}$.
2. Είναι τα μέτρα των $\boldsymbol{p}_{100\,210}$ και $\boldsymbol{p}_{100\,21\pm1}$ ίσα;

   Θεωρείστε δεδομένα

A) $\int_0^\infty e^{-\gamma r}\, r^n\, dr = \gamma^{-(n+1)}\, n!$ όπου *n* = 1, 2, 3, . . . και $\gamma > 0$.

B) σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ), η αντιστροφή ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς δηλαδή η πράξη $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ αντιστοιχεί στις αλλαγές $r' = r$, $\theta' = \pi - \theta$, και $\varphi' = \varphi + \pi$.

Γ) Ισχύει η παρακάτω έκφραση για το διάνυσμα θέσεως:

$$\boldsymbol{r} = \frac{r}{2}\sin\theta\left[(\hat{x} - i\hat{y})\,\mathrm{e}^{i\varphi} + (\hat{x} + i\hat{y})\,\mathrm{e}^{-i\varphi}\right] + r\cos\theta\,\hat{z}.$$

Θέμα 1.

1. Αναλυτικά εξηγούνται στις σημειώσεις στην η-τάξη. Οι σχετικές πιθανότητες:

(Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση $dW^{(εξ)}_{απορ} = B_{12}\,\rho(\nu,T)dt$

Αυθόρμητη Εκπομπή $dW^{αυθ}_{εκπ} = A_{21}\,dt$

Εξαναγκασμένη Εκπομπή $dW^{εξ}_{εκπ} = B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt$

2. Ο χρόνος ζωής της στάθμης 2 σχετίζεται με το πόσο μένει αυθόρμητα το ηλεκτρόνιο στη στάθμη 2. Επειδή

$dW^{αυθ}_{εκπ} = A_{21}\,dt \Rightarrow$

$1 = A_{21}\cdot t_2$

Δηλαδή ο χρόνος ζωής της στάθμης 2 t_2 είναι εκείνος που χρειάζεται ώστε η πιθανότητα αυθόρμητης εκπομπής (και επομένως εγκατάλειψης της στάθμης 2) να γίνει 1.

$\Rightarrow t_2 := \frac{1}{A_{21}}$

3. $N_i = N_{ολ}\,\frac{g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{Z}$, $Z = \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$, $P_i = \frac{g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{Z}$ κατανομή Boltzmann

P_i: η πιθανότητα να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο στη στάθμη i

Z: η συνάρτηση επιμερισμού

$N_{ολ}$: ο συνολικός αριθμός ατόμων

N_i: ο πληθυσμός της στάθμης i δηλ. ο μέσος αριθμός ατόμων στη στάθμη

$dN_{1\to2}$ ο αριθμός των ατόμων που πάνε από τη στάθμη 1 στη στάθμη 2 σε χρόνο dt

$dN_{2\to1}$ » 2 » 1 »

Σε θερμοδυναμική ισορροπία $dN_{1\to2} = dN_{2\to1} \Rightarrow$

$$N_1\cdot dW^{(εξ)}_{απορ} = N_2\left(dW^{αυθ}_{εκπ} + dW^{εξ}_{εκπ}\right) \Rightarrow N_1 B_{12}\,\rho(\nu,T)\cancel{dt} = N_2\left(A_{21}\cancel{dt} + B_{21}\rho(\nu,T)\cancel{dt}\right) \Rightarrow$$

$$\cancel{N_{ολ}}\,\frac{g_1 e^{-\frac{E_1}{k_B T}}}{\cancel{Z}} B_{12}\,\rho(\nu,T) = \cancel{N_{ολ}}\,\frac{g_2 e^{-\frac{E_2}{k_B T}}}{\cancel{Z}}\left(A_{21} + B_{21}\rho(\nu,T)\right)$$

$$\left\{g_1 B_{12} e^{-\frac{E_1}{k_B T}} - g_2 B_{21} e^{-\frac{E_2}{k_B T}}\right\}\rho(\nu,T) = g_2 A_{21} e^{-\frac{E_2}{k_B T}} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\rho(\nu,T) = \frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12} e^{(E_2-E_1)/k_B T} - g_2 B_{21}} \\ &\lim_{T\to\infty}\rho(\nu,T) = \infty \Rightarrow \frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12} - g_2 B_{21}} = \infty \Rightarrow g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \end{aligned}\right\}$$

και κρατώντας τα A_{21}, B_{21} στον τύπο $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho(\nu,T) = \frac{\cancel{g_2} A_{21}}{\cancel{g_2} B_{21}\left(e^{h\nu/k_BT}-1\right)} \Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{e^{h\nu/k_BT}-1}}$$

και θεωρώντας γνωστή τη μορφή $\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1} \Rightarrow \boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}}$

Θέμα 2

1. $$\hat{H}_R^m = \hbar\omega_m \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m + \hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m\left(\hat{S}_+\hat{a}_m^{\dagger} + \hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^{\dagger} + \hat{S}_-\hat{a}_m\right)$$

m: τρόπος του ΗΜ πεδίου με κυκλική συχνότητα ω_m

$\hat{a}_m^{\dagger}, \hat{a}_m$: τελεστές καταστροφής, δημιουργίας φωτονίων

$\hbar\Omega = E_2 - E_1$: η ενεργειακή διαφορά μεταξύ των δύο σταθμών του ατόμου

$\hat{S}_+, \hat{S}_-$: τελεστές αναβιβάσεως, καταβιβάσεως ηλεκτρονίου μεταξύ των σταθμών του ατόμου

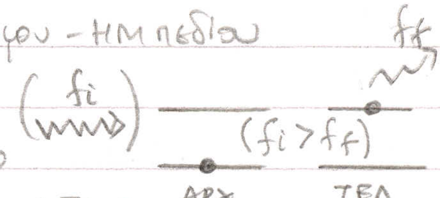
g^m: συχνότητα Rabi

$\hbar\omega_m \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m$ Χαμιλτονιανή ΗΜ πεδίου

$\hbar\Omega \hat{S}_+\hat{S}_-$ Χαμιλτονιανή ατόμου

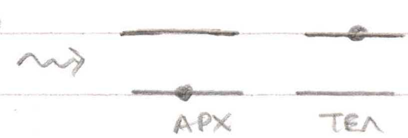
$\hbar g^m(\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{a}_m^{\dagger} + \hat{a}_m)$ Χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως ατόμου - ΗΜ πεδίου

2. $\hat{S}_+\hat{a}_m^{\dagger}$ το ηλεκτρόνιο ανεβαίνει και εκπέμπεται / δημιουργείται φωτόνιο

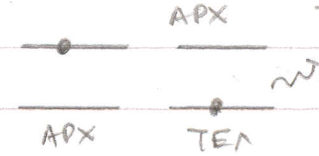


αυτός ο όρος, μόνος του, δεν διατηρεί την ενέργεια: $\Delta E > 0$

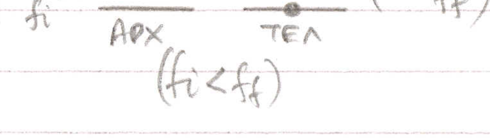
$\hat{S}_+\hat{a}_m$ το ηλεκτρόνιο ανεβαίνει και απορροφάται / καταστρέφεται φωτόνιο



$\hat{S}_-\hat{a}_m^{\dagger}$ το ηλεκτρόνιο κατεβαίνει και εκπέμπεται / δημιουργείται φωτόνιο



$\hat{S}_-\hat{a}_m$ το ηλεκτρόνιο κατεβαίνει και απορροφάται / καταστρέφεται φωτόνιο



αυτός ο όρος, μόνος του, δεν διατηρεί την ενέργεια $\Delta E < 0$

Στα σχηματάκια φαίνεται τι περίπου γίνεται. Αν έχουμε μόνο ένα τρόπο ΗΜ πεδίου m δηλαδή αν υποστηρίζονται φωτόνια μιάς μόνο συχνότητας, τότε δεν έχουν νόημα οι όροι $\hat{S}_+\hat{a}_m^{\dagger}$ και $\hat{S}_-\hat{a}_m$ οι οποίοι δεν διατηρούν την ενέργεια.

3. Αν έχουμε πολλούς τρόπους m τότε (όπως υποδηλώνουν οι παρενθέσεις στα σχηματάκια) οι όροι $\hat{S}_+\hat{a}_m^{\dagger}$, $\hat{S}_-\hat{a}_m$ μπορούν να γίνουν αποδεκτοί αφού $f_i \neq f_f$. Τότε $\hat{H} = \sum_m \hat{H}_R^m$.

4. $\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m\,|\downarrow, n_m\rangle = \hat{a}_m^{+}\sqrt{n_m}\,|\downarrow, n_m-1\rangle = \sqrt{n_m}\sqrt{n_m}\,|\downarrow, n_m\rangle = n_m\,|\downarrow, n_m\rangle$

$\hat{S}_+\hat{S}_-\,|\downarrow, n_m\rangle = |0, n_m\rangle \qquad \hat{S}_-\hat{S}_+\,|\downarrow, n_m\rangle = |\downarrow, n_m\rangle$

$\hat{S}_+\hat{a}_m^{+}\,|\downarrow, n_m\rangle = \sqrt{n_m+1}\,|\uparrow, n_m+1\rangle$

$\hat{S}_+\hat{a}_m\,|\downarrow, n_m\rangle = \sqrt{n_m}\,|\uparrow, n_m-1\rangle$

$\hat{S}_-\hat{a}_m^{+}\,|\downarrow, n_m\rangle = \sqrt{n_m+1}\,|0, n_m+1\rangle$

$\hat{S}_-\hat{a}_m\,|\downarrow, n_m\rangle = \sqrt{n_m}\,|0, n_m-1\rangle$

5. $\langle\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m\rangle = \langle\downarrow, n_m|\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m|\downarrow, n_m\rangle = \langle\downarrow, n_m|n_m|\downarrow, n_m\rangle = n_m$

$\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle = \langle\downarrow, n_m|\hat{S}_+\hat{S}_-|\downarrow, n_m\rangle = \langle\downarrow, n_m|0, n_m\rangle = 0$

$\langle\hat{S}_-\hat{S}_+\rangle = \langle\downarrow, n_m|\hat{S}_-\hat{S}_+|\downarrow, n_m\rangle = \langle\downarrow, n_m|\downarrow, n_m\rangle = 1$

$\langle\hat{S}_+\hat{a}_m^{+}\rangle = \langle\downarrow, n_m|\hat{S}_+\hat{a}_m^{+}|\downarrow, n_m\rangle = \langle\downarrow, n_m|\sqrt{n_m+1}\,|\uparrow, n_m+1\rangle = 0$

$\langle\hat{S}_+\hat{a}_m\rangle = \langle\downarrow, n_m|\hat{S}_+\hat{a}_m|\downarrow, n_m\rangle = \langle\downarrow, n_m|\sqrt{n_m}\,|\uparrow, n_m-1\rangle = 0$

$\langle\hat{S}_-\hat{a}_m^{+}\rangle = \langle\downarrow, n_m|\hat{S}_-\hat{a}_m^{+}|\downarrow, n_m\rangle = \langle\downarrow, n_m|\sqrt{n_m+1}\,|0, n_m+1\rangle = 0$

$\langle\hat{S}_-\hat{a}_m\rangle = \langle\downarrow, n_m|\hat{S}_-\hat{a}_m|\downarrow, n_m\rangle = \langle\downarrow, n_m|\sqrt{n_m}\,|0, n_m-1\rangle = 0$

Θέμα 3

Αφού $\vec{P}_{k_1k_2} := \int_{\text{παντού}} dV\ \Phi^*_{k_1}(\vec{r})\,(-e)\,\vec{r}\,\Phi_{k_2}(\vec{r})$ αρκεί να ελεγχθούν τα

$\vec{r}_{k_1k_2} := \int_{\text{παντού}} dV\ \Phi^*_{k_1}(\vec{r})\,\vec{r}\,\Phi_{k_2}(\vec{r})$ τα οποία συμβολίζονται παρακάτω ως $k_1\vec{r}k_2$

$$100\vec{r}\,200 = \int_{\text{παντού}} dV\ \underbrace{\underset{\text{ΑΡΤΙΑ}}{\Psi^*_{100}(\vec{r})}\ \underset{\text{ΠΕΡΙΤΤΗ}}{\vec{r}}\ \underset{\text{ΑΡΤΙΑ}}{\Psi_{200}(\vec{r})}}_{\text{ΠΕΡΙΤΤΗ}} = \vec{0} \implies \boxed{\vec{P}_{100\,200} = \vec{0}}$$

Δηλαδή η μετάβαση αυτή δεν επιτρέπεται. Άλλωστε $\Delta l = 0$ και $\Delta m = 0$ ενώ θα έπρεπε $\Delta l = \pm 1$ και $\Delta m = 0, \pm 1$ για επιτρεπτή μετάβαση

Στις επόμενες σελίδες υπολογίζονται τα ($\downarrow$ 4 και 5)

$$\left.\begin{aligned} 100\vec{r}\,210 &= \frac{2^{\frac{15}{2}}}{3^5}a_0\hat{z} \\ 100\vec{r}\,21{\pm}1 &= \frac{2^7}{3^5}a_0(\hat{x} \pm i\hat{y}) \end{aligned}\right\} \implies$$

$$\left|\vec{P}_{100\,210}\right| = \frac{e\,2^{\frac{15}{2}}a_0}{3^5} = \left|\vec{P}_{100\,21\pm1}\right|$$

$\left.\begin{array}{l}\Delta l = 1\\ \Delta m = 0\end{array}\right\}$ επιτρέπεται μετάβαση!

$$\langle 100|\vec{r}|210\rangle = (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}}(32\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, e^{-\frac{r}{a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)\cos\theta\, e^{-\frac{r}{2a_0}}\, r\cdot$$
$$\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+\cos\theta\,\hat{z}\right\}$$
$$=(32\pi^2 a_0^6)^{-\frac{1}{2}}a_0^4\cdot\int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)\cdot$$
$$\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\cos\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+\cos\theta\,\hat{z}\right\}$$

Το ολοκλήρωμα στα $q=\frac{r}{a_0}$ γίνεται $\int_0^\infty dq\cdot q^4 e^{-\frac{3q}{2}}$ το οποίο σύμφωνα με τα δεδομένα A) για $q\leftrightarrow r$, $4\leftrightarrow n$, $\frac{3}{2}\leftrightarrow \gamma$

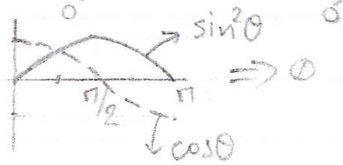
γίνεται $\left(\frac{3}{2}\right)^{-(4+1)}4! = \frac{2^5}{3^5}\cdot 2\cdot 3\cdot 2^2 = \frac{2^8}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$

η σταθερά πριν από τα ολοκληρώματα γίνεται $\frac{a_0^4}{a_0^3\pi\sqrt{16\cdot 2}} = \frac{a_0}{\pi 4\sqrt{2}} = \frac{a_0}{\pi 2^{5/2}}$

Τα ολοκληρώματα με θ,φ γίνονται

$$\int_0^\pi d\theta\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+\int_0^\pi d\theta\sin\theta\cos^2\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\hat{z}$$

$$\int_0^\pi d\theta\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{2}=\frac{1}{2}\int_0^0\sin^2\theta\, d(\sin\theta)=\emptyset$$ ή



$\Rightarrow \emptyset$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\theta\cdot\sin^2\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}d\theta\sin^2\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\int_0^1\sin^2\theta\, d(\sin\theta)+\frac{1}{2}\int_1^0\sin^2\theta\, d(\sin\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^0\right]=\emptyset$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]=(\hat{x}-i\hat{y})\int_0^{2\pi}d\varphi\, e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})\int_0^{2\pi}d\varphi\, e^{-i\varphi}=\emptyset$$

$$\int_0^\pi d\theta\sin\theta\cos^2\theta=-\int_1^{-1}\cos^2\theta\, d(\cos\theta)=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{-1}=-\left(\frac{-1}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\qquad\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi$$

Συνεπώς $\langle 100|\vec{r}|210\rangle = \frac{a_0}{\cancel{\pi}2^{5/2}}\frac{2^8}{3^4}\cdot\frac{2}{3}\hat{z}\,2\cancel{\pi}=\frac{a_0\hat{z}\cdot 2^{15/2}}{3^5}\Rightarrow\boxed{\langle 100|\vec{r}|210\rangle=\frac{2^{\frac{15}{2}}}{3^5}a_0\hat{z}}$

$\Delta l = \pm 1$, $\Delta m = \pm 1$ $\Longrightarrow$ αναμένεται [illegible] $\qquad q = \frac{r}{a_0}$

$$\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle = (\pi a_0^3)^{-1/2}(64\pi a_0^3)^{-1/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, e^{-\frac{r}{a_0}}\frac{r}{a_0}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi} e^{-\frac{r}{2a_0}} r \left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+\cos\theta\,\hat{z}\right\} =$$

$$= (64\pi^2 a_0^6)^{-\frac{1}{2}} a_0^4 \int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)$$

$$\cdot \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{\pm i\varphi}\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+\cos\theta\,\hat{z}\right\}$$

η σταθερά πριν από τα ολοκληρώματα γίνεται $\frac{a_0^4}{8\pi a_0^3} = \frac{a_0}{8\pi}$

το ολοκλήρωμα στο $q = \frac{r}{a_0}$ γίνεται $\int_0^\infty dq\, q^4 e^{-\frac{3q}{2}}$ το οποίο σύμφωνα με το δεδομένο A)

για $q \leftrightarrow r$

$4 \leftrightarrow n$

$\frac{3}{2} \leftrightarrow \gamma$

γίνεται $\left(\frac{3}{2}\right)^{-(4+1)} 4! = \frac{2^5}{3^5} 2\cdot3\cdot2^2 = \frac{2^8}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$

τα ολοκληρώματα με θ, φ γίνονται

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin^3\theta}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{\pm i\varphi}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right] + \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{\pm i\varphi}\hat{z}$$

(το δεύτερο ολοκλήρωμα $= 0$)

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin^3\theta}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right] = \frac{2}{3}$$

$\oplus$ $(\hat{x}-i\hat{y})\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{2i\varphi} + (\hat{x}+i\hat{y})\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(\hat{x}+i\hat{y})$

(το πρώτο ολοκλήρωμα $= 0$)

$\ominus$ $(\hat{x}-i\hat{y})\int_0^{2\pi} d\varphi + (\hat{x}+i\hat{y})\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-2i\varphi} = 2\pi(\hat{x}-i\hat{y})$

(το δεύτερο ολοκλήρωμα $= 0$)

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

$$\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle = \frac{a_0}{8\pi}\cdot\frac{2^8}{3^4}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\pi(\hat{x}\pm i\hat{y}) = a_0\frac{2^7}{3^5}(\hat{x}\pm i\hat{y}) \Longrightarrow \boxed{\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle = \frac{2^7}{3^5}a_0(\hat{x}\pm i\hat{y})}$$

ΑΡΑ $\left|\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle\right| = \frac{2^7}{3^5}a_0\sqrt{2}$ (διότι $|\hat{x}\pm i\hat{y}| = \sqrt{2}$) $= \frac{2^{\frac{15}{2}}}{3^5}a_0 = \left|\langle 100|\vec{r}|210\rangle\right|$