Τομέας Φυσικής Στερεάς Κατάστασης, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κβαντική Οπτική και Lasers.

Εξέταση της 14ης Ιουνίου 2017. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Θέμα 1.

(α΄) Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Rabi ενός ΗΜ τρόπου. Εξηγήστε, συντόμως, όλα τα σύμβολα. Ποιούς όρους της αγνοούμε ώστε να καταλήξουμε στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings και για ποιό λόγο;

Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings ενός ΗΜ τρόπου.

(β΄) Να υπολογιστούν τα $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{a} \hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle$, $\langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle$, $< \hat{S}_+ \hat{a} >$, $< \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger >$, $< \hat{S}_- \hat{a}^\dagger >$, $< \hat{S}_- \hat{a} >$ για την κατάσταση: $|\psi_A(t) > = c_1(t) \mid \downarrow, n > + c_2(t) \mid \uparrow, n-1 >$

(γ΄) Χρησιμοποιώντας την χρονοεξαρτημένη εξίσωση του Schrödinger, αποδείξτε ότι οι συντελεστές $c_1(t)$ και $c_2(t)$ ικανοποιούν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$i\begin{pmatrix} \dot{c_1}(t) \\ \dot{c_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\omega & \sqrt{n}g \\ \sqrt{n}g & \Omega + (n-1)\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

(δ΄) Δείξτε ότι δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $\vec{x}(t) = \vec{v} e^{-i\lambda t}$, καταλήγουμε στο πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοανυσμάτων $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα, τόσο για $n = 1$ όσο και γενικώς για οιοδήποτε n. Η γενική λύση είναι $\vec{x}(t) = \sigma_1 \vec{v}_1 e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2 \vec{v}_2 e^{-i\lambda_2 t}$.

(ε΄) Υποθέστε αρχικές συνθήκες $c_1(0) = 1, c_2(0) = 0$. Αποδείξτε ότι $|c_1(t)|^2 = 1 - \frac{ng^2}{\Omega_n^2}\sin^2(\Omega_n t)$ και $|c_2(t)|^2 = \frac{ng^2}{\Omega_n^2}\sin^2(\Omega_n t)$. Ποιο είναι το πλάτος A_n και ποια η περίοδος των ταλαντώσεων T_n;

Θεωρήστε τώρα $n = 1$.

(ς΄) Υποθέστε αρχικές συνθήκες $c_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = c_2(0)$ και συντονισμό και βρείτε τα $|c_1(t)|^2$ και $|c_2(t)|^2$.

(ζ΄) Υποθέστε αρχικές συνθήκες $c_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}$, $c_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$ και συντονισμό και βρείτε τα $|c_1(t)|^2$ και $|c_2(t)|^2$.

Χρησιμοποιήστε, αν χρειαστεί, τους συμβολισμούς:

αποσυντονισμός $\Delta = \omega - \Omega$, γενικευμένη συχνότητα Rabi $\Omega_n = \sqrt{\left(\frac{\omega - \Omega}{2}\right)^2 + g^2 n}$, $H_n = \frac{\Omega + (n-1)\omega + n\omega}{2}$.

Θέμα 2.

Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών στο laser στην αδιάστατη μορφή:

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \qquad (\varepsilon_1)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \qquad (\varepsilon_2)$$

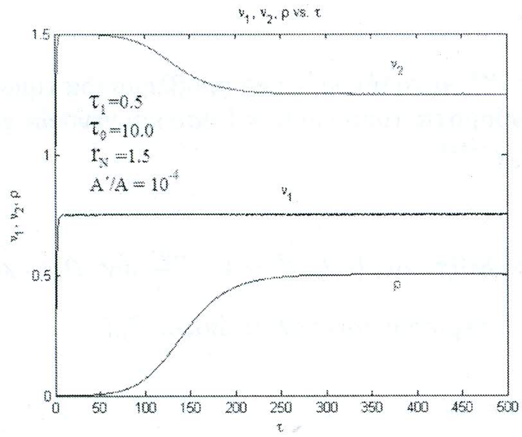
$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \{\frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1)\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \qquad (\varepsilon_3)$$

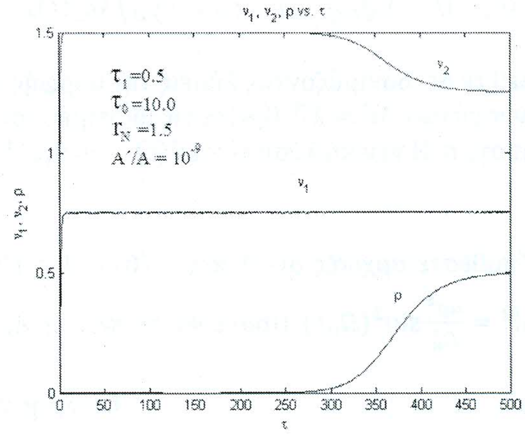
Οι εικόνες παριστάνουν τη λύση τους με matlab.

(α΄) Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών 1 και 2;

(β΄) Γιατί στις εικόνες υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η ϱ για να γίνει αισθητή;

(γ΄) Πως προκύπτει ότι στη στάσιμη κατάσταση και στις δύο περιπτώσεις, $\nu_1 \approx 0.75$, $\nu_2 \approx 1.25$, $\varrho \approx 0.5$;





ΘΕΜΑ 1

α' Θεωρία . . .

β' για την $|\psi_A(t)\rangle = c_1(t)|\downarrow n\rangle + c_2(t)|\uparrow n-1\rangle$

μετά από πράξεις προκύπτει

$$\langle \hat{a}^+\hat{a}\rangle = n - |c_2(t)|^2$$

$$\langle \hat{a}\hat{a}^+\rangle = n + |c_1(t)|^2$$

$$\langle \hat{a}\hat{a}^+\rangle - \langle \hat{a}^+\hat{a}\rangle = 1$$

$$\langle \hat{a}^+\hat{a}\rangle + \langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle = n$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle = |c_2(t)|^2$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{S}_+\rangle = |c_1(t)|^2$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle + \langle \hat{S}_-\hat{S}_+\rangle = 1$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{a}\rangle = c_2^*(t)\, c_1(t)\sqrt{n}$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{a}^+\rangle = c_1^*(t)\, c_2(t)\sqrt{n}$$

$$\langle \hat{S}_+\hat{a}^+\rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_-\hat{a}\rangle = 0$$

ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ ΦΩΤΟΝΙΟΥ

$$\left.\begin{aligned} &|\psi_A(t)\rangle = c_1(t)|\downarrow, n\rangle + c_2(t)|\uparrow n-1\rangle \\ &c_1(0)=1 \qquad c_2(0)=0 \\ &\hat{H} = \hat{H}_{JC} = \hbar\omega \hat{a}^{+}\hat{a} + \hbar\Omega \hat{S}_{+}\hat{S}_{-} + \hbar g(\hat{S}_{+}\hat{a} + \hat{S}_{-}\hat{a}^{+}) \\ &i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi_A(t)\rangle = \hat{H}|\psi_A(t)\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dots$$

$$i\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\vec{x}}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} n\omega & \sqrt{n}g \\ \sqrt{n}g & \Omega+(n-1)\omega \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}}_{\vec{x}(t)}$$

ΔΑΜ $\vec{x}(t) = \vec{u}\, e^{-i\lambda t} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \vec{u}(-i\lambda)e^{-i\lambda t}$

$$i(-i\lambda)\vec{u}\,\cancel{e^{-i\lambda t}} = A\vec{u}\,\cancel{e^{-i\lambda t}} \Rightarrow \boxed{A\vec{u} = \lambda\vec{u}}$$

πρόβλημα ιδιοτιμών – ιδιοανυσμάτων

$$(A-\lambda I)\vec{u} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} n\omega-\lambda & \sqrt{n}g \\ \sqrt{n}g & \Omega+(n-1)\omega-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = 0 \Rightarrow (n\omega-\lambda)[\Omega+(n-1)\omega-\lambda] - ng^2 = 0 \Rightarrow$$

$$n\omega\Omega + n(n-1)\omega^2 \underbrace{- n\omega\lambda - \lambda\Omega - (n-1)\omega\lambda} + \lambda^2 - ng^2 = 0$$

$$\lambda^2 - [n\omega + \Omega + (n-1)\omega]\lambda + [n\omega\Omega + n(n-1)\omega^2 - ng^2] = 0$$

$$\lambda^2 - (2n\omega + \Omega - \omega)\lambda + (n\omega\Omega + n(n-1)\omega^2 - ng^2) = 0$$

ή $\lambda^2 - [\Omega + n\omega + (n-1)\omega]\lambda + n\omega[\Omega + (n-1)\omega] - ng^2 = 0$

Έστω $n=1$ (ένα φωτόνιο στην κοιλότητα)

$$A=\begin{bmatrix}\omega & g\\ g & \Omega\end{bmatrix} \qquad (A-\lambda I)\vec{u}=\vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\omega-\lambda & g\\ g & \Omega-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\det=0 \Rightarrow (\omega-\lambda)(\Omega-\lambda)-g^2=0 \Rightarrow \lambda^2-(\omega+\Omega)\lambda+\omega\Omega-g^2=0$$

$$\Delta'=(\omega+\Omega)^2-4(\omega\Omega-g^2)=(\omega-\Omega)^2+4g^2$$

$$\Delta'=\Delta^2+4g^2$$

$$\lambda_{2,1}=\frac{(\omega+\Omega)\pm\sqrt{\Delta^2+4g^2}}{2}=\frac{\omega+\Omega}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2+g^2}$$

$$\lambda_{2,1}=H_1\pm\Omega_1 \qquad \boxed{\begin{array}{l} H_1=\dfrac{\omega+\Omega}{2}\\ \Omega_1=\sqrt{\left(\dfrac{\omega-\Omega}{2}\right)^2+g^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\Delta}{2}\right)^2+g^2}\end{array}}$$

για $\lambda_1=H_1-\Omega_1$

$$A\vec{u}_1=\lambda_1\vec{u}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}\omega & g\\ g & \Omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11}\\ u_{21}\end{pmatrix}=(H_1-\Omega_1)\begin{pmatrix}u_{11}\\ u_{21}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\omega u_{11}+g u_{21}=(H_1-\Omega_1)u_{11}\\ g u_{11}+\Omega u_{21}=(H_1-\Omega_1)u_{21}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} g u_{21}=(H_1-\Omega_1-\omega)u_{11}\\ g u_{11}=(H_1-\Omega_1-\Omega)u_{21}\end{array}$$

$$g^2 u_{21}=(H_1-\Omega_1-\omega)(H_1-\Omega_1-\Omega)u_{21} \Rightarrow$$

$u_{21}=0 \Rightarrow u_{11}=0 \Rightarrow$ μηδενίζεται το "ιδιοάνυσμα"... ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΟ

ή $g^2=(H_1-\Omega_1-\omega)(H_1-\Omega_1-\Omega) \Rightarrow g^2=\left(\frac{\omega+\Omega}{2}-\Omega_1-\omega\right)\left(\frac{\omega+\Omega}{2}-\Omega_1-\Omega\right)\Rightarrow$

$$g^2=\left(\frac{\Omega-\omega}{2}-\Omega_1\right)\left(\frac{\omega-\Omega}{2}-\Omega_1\right)\Rightarrow g^2=\left(\frac{\Omega-\omega}{2}-\Omega_1\right)(-1)\left(\frac{\Omega-\omega}{2}+\Omega_1\right)\Rightarrow$$

$g^2=-\left[\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2-\Omega_1^2\right]\Rightarrow g^2=\Omega_1^2-\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 \Rightarrow \Omega_1^2=\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2+g^2$ που ισχύει εξ ορισμού της Ω_1

Άρα το U_{21} μπορεί να είναι οτιδήποτε μη μηδενικό.
Ας επιλέξουμε για ευκολία $U_{21}=1$. Τότε

$$gU_{11}=(H_1-\Omega_1-\Omega)\cdot 1 \Rightarrow gU_{11}=\frac{\omega+\Omega}{2}-\Omega_1-\Omega=\frac{\omega-\Omega}{2}-\Omega_1$$

$$gU_{11}=\frac{\Delta-2\Omega_1}{2} \Rightarrow U_{11}=\frac{\Delta-2\Omega_1}{2g}$$

οπότε $\vec{V}_1=\begin{bmatrix}\frac{\Delta-2\Omega_1}{2g}\\ 1\end{bmatrix}$

Για $\lambda_2=H_1+\Omega_1$

$$A\vec{U}_2=\lambda_2\vec{U}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}\omega & g\\ g & \Omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{12}\\ U_{22}\end{pmatrix}=(H_1+\Omega_1)\begin{pmatrix}U_{12}\\ U_{22}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases}\omega U_{12}+gU_{22}=(H_1+\Omega_1)U_{12}\\ gU_{12}+\Omega U_{22}=(H_1+\Omega_1)U_{22}\end{cases}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}gU_{22}=(H_1+\Omega_1-\omega)U_{12}\\ gU_{12}=(H_1+\Omega_1-\Omega)U_{22}\end{matrix}$$

$$g^2U_{22}=(H_1+\Omega_1-\omega)(H_1+\Omega_1-\Omega)U_{22}\Rightarrow$$

$U_{22}=0 \Rightarrow U_{12}=0 \Rightarrow$ μηδενίζεται το "ιδιοάνυσμα"... ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΟ

ή

$$g^2=(H_1+\Omega_1-\omega)(H_1+\Omega_1-\Omega)\Rightarrow g^2=\left(\frac{\omega+\Omega}{2}+\Omega_1-\omega\right)\left(\frac{\omega+\Omega}{2}+\Omega_1-\Omega\right)\Rightarrow$$

$$g^2=\left(\frac{\Omega-\omega}{2}+\Omega_1\right)\left(\frac{\omega-\Omega}{2}+\Omega_1\right)\Rightarrow g^2=\left(\Omega_1+\frac{\Omega-\omega}{2}\right)\left(\Omega_1-\frac{\Omega-\omega}{2}\right)\Rightarrow$$

$$g^2=\Omega_1^2-\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2\Rightarrow \Omega_1^2=\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2+g^2\Rightarrow \Omega_1^2=\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2+g^2$$

που ισχύει εξ ορισμού της Ω_1

Άρα το U_{22} μπορεί να είναι οτιδήποτε μη μηδενικό.
Ας επιλέξουμε για ευκολία $U_{22}=1$. Τότε

$$gU_{12}=(H_1+\Omega_1-\Omega)\cdot 1=\left(\frac{\omega+\Omega}{2}+\Omega_1-\Omega\right)=\frac{\omega-\Omega}{2}+\Omega_1=\frac{\Delta+2\Omega_1}{2}$$

$$\Rightarrow U_{12}=\frac{\Delta+2\Omega_1}{2g}$$ οπότε $\vec{V}_2=\begin{bmatrix}\frac{\Delta+2\Omega_1}{2g}\\ 1\end{bmatrix}$

Η γενική λύση είναι $\vec{x}(t)=\sigma_1\vec{u}_1 e^{-i\lambda_1 t}+\sigma_2\vec{u}_2 e^{-i\lambda_2 t}$

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{bmatrix}=\sigma_1\begin{bmatrix}\frac{\Delta-2\Omega_1}{2g}\\ 1\end{bmatrix}e^{-i(H_1-\Omega_1)t}+\sigma_2\begin{bmatrix}\frac{\Delta+2\Omega_1}{2g}\\ 1\end{bmatrix}e^{-i(H_1+\Omega_1)t}$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma_1\frac{\Delta-2\Omega_1}{2g}e^{-i(H_1-\Omega_1)t}+\sigma_2\frac{\Delta+2\Omega_1}{2g}e^{-i(H_1+\Omega_1)t}\\ \sigma_1 e^{-i(H_1-\Omega_1)t}+\sigma_2 e^{-i(H_1+\Omega_1)t}\end{bmatrix}$$

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ $c_1(0)=1 \quad c_2(0)=0$

$$\left.\begin{aligned}1&=\sigma_1\frac{\Delta-2\Omega_1}{2g}+\sigma_2\frac{\Delta+2\Omega_1}{2g}\\ 0&=\sigma_1+\sigma_2\Rightarrow \sigma_2=-\sigma_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow 1=\sigma_1\frac{\cancel{\Delta}-2\Omega_1-\cancel{\Delta}-2\Omega_1}{2g}\Rightarrow$$

$$2g=\sigma_1\cdot(-4\Omega_1)\Rightarrow$$

$$\sigma_1=-\frac{g}{2\Omega_1}=-\sigma_2$$

$$c_2(t)=-\frac{g}{2\Omega_1}e^{-i(H_1-\Omega_1)t}+\frac{g}{2\Omega_1}e^{-i(H_1+\Omega_1)t}$$

$$c_2(t)=-\frac{g}{2\Omega_1}e^{-iH_1t}e^{i\Omega_1t}+\frac{g}{2\Omega_1}e^{-iH_1t}e^{-i\Omega_1t}$$

$$c_2(t)=\frac{g}{2\Omega_1}e^{-iH_1t}\cdot\Big[\underbrace{e^{-i\Omega_1t}}_{\cos-i\sin}-\underbrace{e^{i\Omega_1t}}_{-\cos-i\sin}\Big]\Rightarrow c_2(t)=\frac{g}{2\Omega_1}e^{-iH_1t}(-2i)\sin(\Omega_1t)$$

$$c_2(t)=-\frac{g}{\Omega_1}i\,e^{-iH_1t}\cdot\sin(\Omega_1t)$$

$$\boxed{|c_2(t)|^2=\frac{g^2}{\Omega_1^2}\sin^2(\Omega_1t)}\qquad \boxed{|c_1(t)|^2=1-\frac{g^2}{\Omega_1^2}\sin^2(\Omega_1t)}\text{ ή}$$

$$|c_1(t)|^2=1-\frac{g^2}{\Omega_1^2}(1-\cos^2(\Omega_1t))=\frac{\Omega_1^2-g^2}{\Omega_1^2}+\frac{g^2}{\Omega_1^2}\cos^2\Omega_1t\Rightarrow\boxed{|c_1(t)|^2=\frac{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}{\Omega_1^2}+\frac{g^2}{\Omega_1^2}\cos^2(\Omega_1t)}$$

4

• Έστω αρχικές συνθήκες $c_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = c_2(0)$

Έστω συντονισμός $\Delta = 0 \Rightarrow \omega = \Omega$ $\quad H_1 = \frac{\omega + \Omega}{2} = \Omega$

$\Delta = \omega - \Omega$

$$\Omega_1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2} = g$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= \sigma_1(-1) + \sigma_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= \sigma_1 + \sigma_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sigma_1 = 0$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\Omega+g)t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\Omega+g)t} \end{bmatrix} \Rightarrow |c_1(t)|^2 = |c_2(t)|^2 = \frac{1}{2}$$

∄ ταλαντώσεις πιθανότητες

• Έστω αρχικές συνθήκες $c_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi}$ $\quad c_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta}$

Έστω συντονισμός $\Delta = \omega - \Omega = 0 \Rightarrow \omega = \Omega$ $\quad H_1 = \frac{\omega + \Omega}{2} = \Omega$

$$\Omega_1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2} = g$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} &= \sigma_1(-1) + \sigma_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} &= \sigma_1 + \sigma_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2\sigma_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\phi} + e^{i\theta}\right) \Rightarrow \sigma_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{i\theta} + e^{i\phi}\right) \\ 2\sigma_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\theta} - e^{i\phi}\right) \Rightarrow \sigma_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{i\theta} - e^{i\phi}\right) \end{aligned}$$

$$c_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{i\theta} - e^{i\phi}\right)(-1)\, e^{-i(\Omega-g)t} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{i\theta} + e^{i\phi}\right) e^{-i(\Omega+g)t}$$

$$c_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{i\theta} - e^{i\phi}\right) e^{-i(\Omega-g)t} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{i\theta} + e^{i\phi}\right) e^{-i(\Omega+g)t}$$

$$\begin{aligned} |c_1(t)|^2 = &\frac{1}{8}\left(e^{i\theta} - e^{i\phi}\right) \cancel{e^{-i(\Omega-g)t}} \left(e^{-i\theta} - e^{-i\phi}\right) \cancel{e^{i(\Omega-g)t}} \\ &+ \frac{1}{8}\left(e^{i\theta} + e^{i\phi}\right) \cancel{e^{-i(\Omega+g)t}} \left(e^{-i\theta} + e^{-i\phi}\right) \cancel{e^{i(\Omega+g)t}} \\ &- \frac{1}{8}\left(e^{i\theta} - e^{i\phi}\right) e^{-i(\Omega-g)t} \left(e^{-i\theta} + e^{-i\phi}\right) e^{i(\Omega+g)t} \\ &- \frac{1}{8}\left(e^{i\theta} + e^{i\phi}\right) e^{-i(\Omega+g)t} \left(e^{-i\theta} - e^{-i\phi}\right) e^{i(\Omega-g)t} \end{aligned}$$

$$|c_1(t)|^2 = \frac{1}{8}\left(1 - \cancel{e^{i\theta}e^{-i\phi}} - \cancel{e^{i\phi}e^{-i\theta}} + 1\right)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1 + \cancel{e^{i\theta}e^{-i\phi}} + \cancel{e^{i\phi}e^{-i\theta}} + 1\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(\cancel{1} + e^{i\theta}e^{-i\phi} - e^{i\phi}e^{-i\theta} \cancel{-1}\right) e^{i2gt}$$

$$-\frac{1}{8}\left(\cancel{1} - e^{i\theta}e^{-i\phi} + e^{i\phi}e^{-i\theta} \cancel{-1}\right) e^{-i2gt} \Rightarrow$$

$$|c_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\left(e^{i\theta}e^{-i\phi} - e^{i\phi}e^{-i\theta}\right) e^{i2gt} - \frac{1}{8}\left(e^{i\phi}e^{-i\theta} - e^{i\theta}e^{-i\phi}\right) e^{-i2gt}$$

$\psi := \theta - \phi$

$$|c_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\left(e^{i\psi} - e^{-i\psi}\right) e^{i2gt} - \frac{1}{8}\left(e^{-i\psi} - e^{i\psi}\right) e^{-i2gt}$$

$\cancel{\cos\psi} + i\sin\psi$ $\qquad$ $\cancel{\cos\psi} - i\sin\psi$

$-\cancel{\cos\psi} + i\sin\psi$ $\qquad$ $-\cancel{\cos\psi} - i\sin\psi$

$$|c_1(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} 2i\sin\psi\, e^{i2gt} + \frac{1}{8} 2i\sin\psi\, e^{-i2gt}$$

$$|c_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} i\sin\psi\left(e^{-i2gt} - e^{i2gt}\right)$$

$\cancel{\cos} - i\sin$

$-\cancel{\cos} - i\sin$

$$|c_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} i\sin\psi\,(-2)\,i\sin(2gt) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\psi\cdot\sin(2gt)$$

$$\boxed{|c_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\psi\cdot\sin(2gt)}$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{1}{8}\left(e^{i\theta} - e^{i\phi}\right)\cancel{e^{-i(\Omega-g)t}}\left(e^{-i\theta} - e^{-i\phi}\right)\cancel{e^{i(\Omega-g)t}}$$

$$+\frac{1}{8}\left(e^{i\theta} + e^{i\phi}\right)\cancel{e^{-i(\Omega+g)t}}\left(e^{-i\theta} + e^{-i\phi}\right)\cancel{e^{i(\Omega+g)t}}$$

$$+\frac{1}{8}\left(e^{i\theta} - e^{i\phi}\right)e^{-i(\Omega-g)t}\left(e^{-i\theta} + e^{-i\phi}\right)e^{i(\Omega+g)t}$$

$$+\frac{1}{8}\left(e^{i\theta} + e^{i\phi}\right)e^{-i(\Omega+g)t}\left(e^{-i\theta} - e^{-i\phi}\right)e^{i(\Omega-g)t}$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{1}{8}\left(1 - \cancel{e^{i\theta}e^{-i\phi}} - \cancel{e^{i\phi}e^{-i\theta}} + 1\right)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1 + \cancel{e^{i\theta}e^{-i\phi}} + \cancel{e^{i\phi}e^{-i\theta}} + 1\right)$$

$$+\frac{1}{8}\left(\cancel{1} + e^{i\theta}e^{-i\phi} - e^{i\phi}e^{-i\theta} \cancel{-1}\right)e^{i2gt}$$

$$+\frac{1}{8}\left(\cancel{1} - e^{i\theta}e^{-i\phi} + e^{i\phi}e^{-i\theta} \cancel{-1}\right)e^{-i2gt} \Rightarrow$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(e^{i\theta}e^{-i\phi} - e^{i\phi}e^{-i\theta}\right)e^{i2gt} + \frac{1}{8}\left(e^{i\phi}e^{-i\theta} - e^{i\theta}e^{-i\phi}\right)e^{-i2gt}$$

$$\psi := \theta - \phi$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\left(e^{i\psi} - e^{-i\psi}\right)e^{i2gt} + \frac{1}{8}\left(e^{-i\psi} - e^{i\psi}\right)e^{-i2gt}$$

$\cos\psi + i\sin\psi$ $\qquad$ $\cos\psi - i\sin\psi$

$-\cos\psi + i\sin\psi$ $\qquad$ $-\cos\psi - i\sin\psi$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\,2i\sin\psi\, e^{i2gt} + \frac{1}{8}(-2i)\sin\psi\, e^{-i2gt}$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cdot 2i\sin\psi\left(e^{i2gt} - e^{-i2gt}\right)$$

$\cos + i\sin$

$-\cos + i\sin$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot i\sin\psi\, 2i\sin(2gt) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\psi\sin(2gt)$$

$$\boxed{|c_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\psi\cdot\sin(2gt)}$$

έστω n φωτόνια στην κοιλότητα

$$A = \begin{bmatrix} n\omega & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \Omega+(n-1)\omega \end{bmatrix}$$ και $\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow$

$$\lambda^2 - [\Omega+(n-1)\omega+n\omega]\lambda + n\omega[\Omega+(n-1)\omega] - g^2 n = 0$$

$$\Delta' = [\Omega+(n-1)\omega+n\omega]^2 - 4n\omega[\Omega+(n-1)\omega] + 4g^2 n$$

$$\Delta' = [\Omega+(n-1)\omega-n\omega]^2 + 4g^2 n > 0$$

$$\lambda_{2,1} = \frac{[\Omega+(n-1)\omega+n\omega] \pm \sqrt{[\Omega+(n-1)\omega-n\omega]^2+4g^2 n}}{2}$$

$$\boxed{\Omega_n := \sqrt{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2+g^2 n} \qquad H_n := \frac{\Omega+(n-1)\omega+n\omega}{2}}$$

$$\lambda_{2,1} = \frac{\Omega+(n-1)\omega+n\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega+(n-1)\omega-n\omega}{2}\right)^2+g^2 n}$$

$$\lambda_{2,1} = \frac{\Omega+(n-1)\omega+n\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2+g^2 n}$$

$$\boxed{\lambda_{2,1} = H_n \pm \Omega_n}$$

... πράξεις ...

$$\vec{U}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta-2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{U}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\Delta+2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

για $\lambda_1 = H_n - \Omega_n$ ... πράξεις...

$$\begin{pmatrix} n\omega & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \Omega+(n-1)\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21}\end{pmatrix} = (H_n-\Omega_n)\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21}\end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} n\omega\, U_{11} + g\sqrt{n}\, U_{21} = (H_n-\Omega_n)\, U_{11} \\ g\sqrt{n}\, U_{11} + [\Omega+(n-1)\omega]\, U_{21} = (H_n-\Omega_n)\, U_{21} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} g\sqrt{n}\, U_{21} = (H_n-\Omega_n-n\omega)U_{11} \\ g\sqrt{n}\, U_{11} = \left(H_n-\Omega_n-[\Omega+(n-1)\omega]\right) U_{21} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ g^2 n\, U_{21} = (H_n-\Omega_n-n\omega)\left(H_n-\Omega_n-[\Omega+(n-1)\omega]\right) U_{21} \right\} \Rightarrow$$

...

$U_{21}=0 \Rightarrow U_{11}=0 \Rightarrow$ μηδενίζεται το "ιδιοάνυσμα" ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΟ

ή $g^2 n = (H_n-\Omega_n-n\omega)\left(H_n-\Omega_n-[\Omega+(n-1)\omega]\right) \Rightarrow$

$$g^2 n = \left(\frac{\Omega+(n-1)\omega+n\omega}{2}-\Omega_n-n\omega\right)\left(\frac{\Omega+(n-1)\omega+n\omega}{2}-\Omega_n-[\Omega+(n-1)\omega]\right)$$

$$g^2 n = \left(\frac{\Omega+(n-1)\omega-n\omega}{2}-\Omega_n\right)\left(\frac{n\omega-\Omega-(n-1)\omega}{2}-\Omega_n\right)$$

$$g^2 n = \left(\frac{\Omega-\omega}{2}-\Omega_n\right)\left(\frac{-\Omega+\omega}{2}-\Omega_n\right)$$

$$g^2 n = \left(\frac{\Omega-\omega}{2}-\Omega_n\right)(-1)\left(\frac{\Omega-\omega}{2}+\Omega_n\right) = (-1)\left[\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2-\Omega_n^2\right] \Rightarrow$$

$$g^2 n = \Omega_n^2 - \left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 \Rightarrow \Omega_n^2 = \left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + ng^2$$ που ισχυει εξ ορισμού του Ω_n

Άρα το U_{21} μπορεί να είναι οτιδήποτε μη μηδενικό.
Ας επιλέξουμε για ευκολία $U_{21}=1$. Τότε

$$g\sqrt{n}\, U_{11} = \left(H_n-\Omega_n-[\Omega+(n-1)\omega]\right)\cdot 1 \Rightarrow U_{11} = \frac{\Delta-2\Omega_n}{2g\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \vec{U}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta-2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

για $\lambda_2 = H_n + \Omega_n$

$$\begin{pmatrix} n\omega & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \Omega + (n-1)\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{pmatrix} = (H_n + \Omega_n) \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} n\omega U_{12} + g\sqrt{n}\, U_{22} &= (H_n + \Omega_n) U_{12} \\ g\sqrt{n}\, U_{12} + [\Omega + (n-1)\omega] U_{22} &= (H_n + \Omega_n) U_{22} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} g\sqrt{n}\, U_{22} &= (H_n + \Omega_n - n\omega) U_{12} \\ g\sqrt{n}\, U_{12} &= (H_n + \Omega_n - [\Omega + (n-1)\omega]) U_{22} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ g^2 n\, U_{22} = (H_n + \Omega_n - n\omega)\left(H_n + \Omega_n - [\Omega + (n-1)\omega]\right) U_{22} \right\} \Rightarrow$$

$U_{22} = 0 \Rightarrow U_{12} = 0 \Rightarrow$ μηδενίζεται το "ιδιοάνυσμα" ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΟ

ή $g^2 n = (H_n + \Omega_n - n\omega)\left(H_n + \Omega_n - [\Omega + (n-1)\omega]\right) \Rightarrow$

$$g^2 n = \left(\frac{\Omega + (n-1)\omega + n\omega}{2} + \Omega_n - n\omega\right)\left(\frac{\Omega + (n-1)\omega + n\omega}{2} + \Omega_n - [\Omega + (n-1)\omega]\right)$$

$$g^2 n = \left(\frac{\Omega - \omega}{2} + \Omega_n\right)\left(\frac{\omega - \Omega}{2} + \Omega_n\right) = \left(\Omega_n + \frac{\omega - \Omega}{2}\right)\left(\Omega_n - \frac{\omega - \Omega}{2}\right)$$

$$g^2 n = \left(\Omega_n + \frac{\Delta}{2}\right)\left(\Omega_n - \frac{\Delta}{2}\right) \Rightarrow g^2 n = \Omega_n^2 - \frac{\Delta^2}{4} \Rightarrow \Omega_n^2 = g^2 n + \frac{\Delta^2}{4}$$

που ισχύει εξ ορισμού της Ω_n

Άρα το U_{22} μπορεί να είναι οποιοδήποτε μη μηδενικό.
Αν επιλέξουμε $U_{22} = 1$. Τότε

$$g\sqrt{n}\, U_{12} = \left(H_n + \Omega_n - [\Omega + (n-1)\omega]\right) \cdot 1 \Rightarrow U_{12} = \frac{\Delta + 2\Omega_n}{2g\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{U}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta + 2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ή γενική λύση είναι $\vec{x}(t) = \sigma_1 \vec{u}_1 e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2 \vec{u}_2 e^{-i\lambda_2 t}$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \sigma_1 \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta - 2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i(H_n - \Omega_n)t} + \sigma_2 \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta + 2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i(H_n + \Omega_n)t}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1 \cdot \dfrac{\Delta - 2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} e^{-i(H_n - \Omega_n)t} + \sigma_2 \dfrac{\Delta + 2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} e^{-i(H_n + \Omega_n)t} \\ \sigma_1 e^{-i(H_n - \Omega_n)t} + \sigma_2 e^{-i(H_n + \Omega_n)t} \end{bmatrix}$$

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ $\quad c_1(0) = 1 \quad c_2(0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1 \frac{\Delta - 2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} + \sigma_2 \frac{\Delta + 2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} = 1 \\ &\sigma_1 + \sigma_2 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = -\sigma_1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\sigma_1 \frac{\Delta - 2\Omega_n - \Delta - 2\Omega_n}{2g\sqrt{n}} = 1 \\ &\sigma_1(-4\Omega_n) = 2g\sqrt{n} \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = -\frac{g\sqrt{n}}{2\Omega_n} = -\sigma_2$$

$$c_2(t) = -\frac{g\sqrt{n}}{2\Omega_n} e^{-i(H_n - \Omega_n)t} + \frac{g\sqrt{n}}{2\Omega_n} e^{-i(H_n + \Omega_n)t}$$

$$c_2(t) = \frac{g\sqrt{n}}{2\Omega_n} e^{-iH_n} \underbrace{\left[e^{-i\Omega_n t} - e^{i\Omega_n t} \right]}_{-2i\sin(\ )} \Rightarrow c_2(t) = -\frac{g\sqrt{n}}{\Omega_n} i e^{-iH_n t} \sin(\Omega_n t)$$

$$\boxed{|c_2(t)|^2 = \frac{ng^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t)} \qquad \boxed{|c_1(t)|^2 = 1 - \frac{ng^2}{\Omega_n^2} \sin^2(\Omega_n t)}$$

ή $$\boxed{|c_1(t)|^2 = \frac{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}{\Omega_n^2} + \frac{ng^2}{\Omega_n^2} \cdot \cos^2(\Omega_n t)}$$

<u>πλάτος ταλαντώσεων</u>

$$\alpha_n = \frac{ng^2}{\Omega_n^2} = \frac{ng^2}{ng^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} = \frac{ng^2}{ng^2 + \left(\frac{\omega - \Omega}{2}\right)^2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

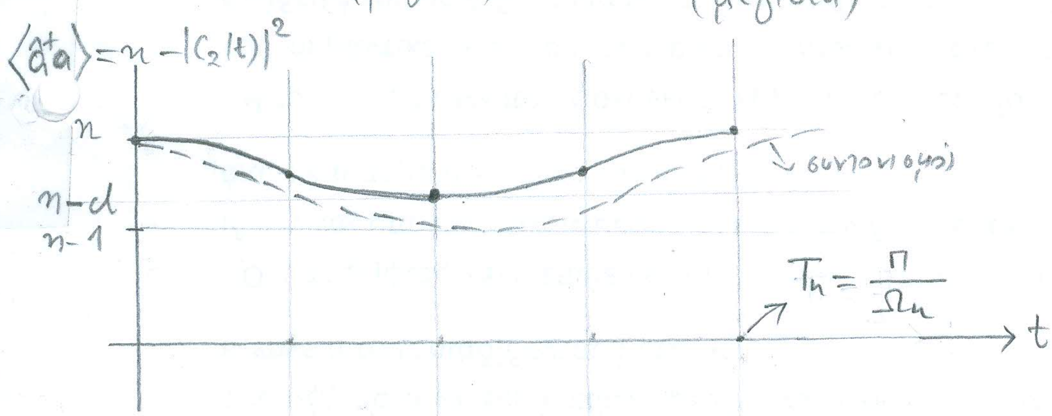
$$|c_1(t)|^2 = \frac{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2}{\Omega_n^2} + \frac{n g^2}{\Omega_n^2}\,\frac{1+\cos(2\Omega_n t)}{2}$$

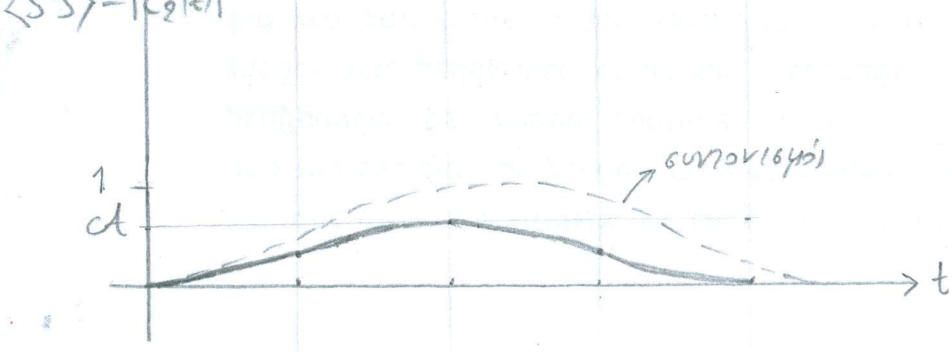
$$|c_2(t)|^2 = \frac{n g^2}{\Omega_n^2}\,\frac{1-\cos(2\Omega_n t)}{2}$$

<u>περίοδος ταλαντώσεων</u> $\quad T_n = \dfrac{2\pi}{2\Omega_n} = \dfrac{\pi}{\Omega_n} = \dfrac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2 n}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + g^2 n}}$

Η συχνότητα Rabi g και ο αποσυντονισμός $\Delta = \omega - \Omega$ } καθορίζουν το πλάτος A_n και την περίοδο T_n των ταλαντώσεων Rabi

Όταν $\Delta = 0 \Rightarrow A_n = 1$ (μέγιστο) και $T_n = \dfrac{\pi}{g\sqrt{n}}$ (μέγιστη)





ΘΕΜΑ 2

(α') $\tau_1 = \frac{t_1}{t_2} = 0.5$ όπως φαίνεται στα σχήματα

(β') όταν $\rho = 0 \Rightarrow$ η Εξ. (ε3) γίνεται $\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{A'}{A} v_2$

στο αρχικό στάδιο $v_2 = r_N = 1.5$

$$\left.\frac{A'}{A}\right|_{\text{ΑΡΙΣΤΕΡΗ ΕΙΚΟΝΑ}} = 10^{-4} >> \left.\frac{A'}{A}\right|_{\text{ΔΕΞΙΑ ΕΙΚΟΝΑ}} = 10^{-9}$$

$\Rightarrow$ στην ΑΡΙΣΤΕΡΗ ΕΙΚΟΝΑ η αύξηση του ρ ξεκινά νωρίτερα

(γ') Στη στάσιμη κατάσταση $\frac{dv_1}{d\tau} = \frac{dv_2}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\tau} = 0 \Rightarrow$

(ε1) $\Rightarrow v_2 + \rho(v_2 - v_1) - \frac{v_1}{\tau_1} = 0$ (1)

(ε2) $\Rightarrow r_N + \rho(v_1 - v_2) - v_2 = 0$ (2)

στη στάσιμη κατάσταση $\frac{A'}{A} \simeq$ αμελητέο $\Rightarrow$ πρέπει ($\tau_1 \neq 1$)

(ε3) $\Rightarrow \frac{\rho}{\tau_0} = \rho(v_2 - v_1)\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \Rightarrow \rho = \rho\frac{v_2 - v_1}{1-\tau_1} \Rightarrow \rho(v_2 - v_1) = \rho(1-\tau_1)$ (3)

(1)+(2) $r_N = \frac{v_1}{\tau_1} \Rightarrow v_1 = r_N \cdot \tau_1 \Rightarrow v_1 = 1.5 \cdot 0.5 \Rightarrow v_1 = 0.75$

(2)+(3) $r_N - v_2 = \rho(1-\tau_1)$ (4)

$\rho = 0 \Rightarrow v_2 = r_N \Rightarrow v_2 = 1.5$ (αρχικό στάδιο)

$\rho > 0 \Rightarrow$ (3) $\Rightarrow v_2 - v_1 = 1 - \tau_1 \Rightarrow v_2 = v_1 + 1 - \tau_1 = 0.75 + 1 - 0.5 \Rightarrow v_2 = 1.25$

(4) $\Rightarrow \rho = \frac{r_N - v_2}{1-\tau_1} \Rightarrow \rho = \frac{1.5 - 1.25}{1 - 0.5} \Rightarrow \rho = 0.5$