Τομέας Φυσικής Συμπυκνωμένης Ύλης. Τμήμα Φυσικής. Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
Κβαντική Οπτική και Lasers. Διδάσκων: Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

Εξέταση, 22 Ιουνίου 2021

Θέμα 1. Δισταθμικό σύστημα σε ημικλασική προσέγγιση και προσέγγιση διπόλου. Δίνονται οι εξισώσεις πριν από την προσέγγιση περιστρεφομένου κύματος

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t)\frac{i\Omega_R}{2}\left[e^{i\Delta t} + e^{-i\Sigma t}\right] \tag{1}$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t)\frac{i\Omega_R}{2}\left[e^{-i\Delta t} + e^{i\Sigma t}\right] \tag{2}$$

(α′) Εξηγήστε και ορίστε τα σύμβολα, Ω_R, Δ, Σ, $C_1(t)$, $C_2(t)$.
(β′) Ας υποθέσουμε πως η ισχύς της διαταραχής είναι μεγάλη ώστε τα Δ και Σ να είναι μηδαμινά συγκρινόμενα με το Ω_R. Πώς θα απλοποιηθούν τότε οι Εξ. (1)-(2);
Για τις απλοποιημένες εξισώσεις:
(γ′) Βρείτε τα $C_1(t)$, $C_2(t)$ με αρχικές συνθήκες $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$.
(δ′) Υπολογίστε τις πιθανότητες παρουσίας του ηλεκτρονίου στις στάθμες, $P_1(t)$ και $P_2(t)$, καθώς και την περίοδο, T_R, και το μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως, A_R, των ταλαντώσεων Rabi.
(ε′) Υπολογίστε το μέσο ρυθμό μεταβιβάσεως, $k = \frac{\langle P_2(t)\rangle}{t_{2,\text{μέση}}}$, όπου $\langle P_2(t)\rangle$ είναι η μέση τιμή της πιθανότητας παρουσίας του ηλεκτρονίου στη στάθμη 2, και $t_{2,\text{μέση}}$ είναι ο χρόνος, ο οποίος απαιτείται ώστε να φτάσει η $P_2(t)$, πρώτη φορά, στην τιμή αυτή, έχοντας αρχικά τοποθετήσει το ηλεκτρόνιο στη στάθμη 1.

Θέμα 2. Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών LASER στην αδιάστατη μορφή

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1}, \tag{3}$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2, \tag{4}$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \left\{\frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1)\right\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)}. \tag{5}$$

Στη στάσιμη κατάσταση, αγνοώντας το $\frac{A'}{A} \ll 1$, ισχύουν οι εξισώσεις

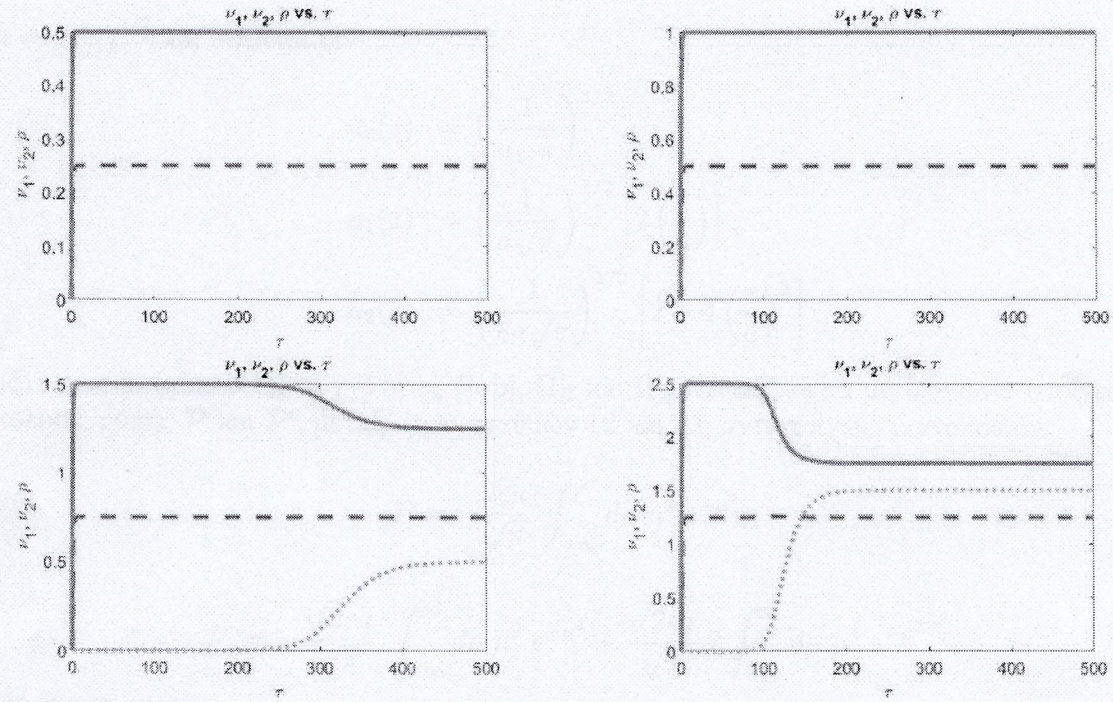
$$\nu_1 = \tau_1 r_N, \quad \forall\, r_N \tag{6}$$

$$\nu_2 = \begin{cases} r_N, & \forall\, r_N \le 1 \\ \tau_1 r_N + (1-\tau_1), & \forall\, r_N \ge 1 \end{cases} \tag{7}$$

$$\varrho = \begin{cases} 0, & \forall\, r_N \le 1 \\ r_N - 1, & \forall\, r_N \ge 1 \end{cases} \tag{8}$$

Η αριθμητική επίλυση των Εξ. (3),(4),(5) φαίνεται στο Σχήμα 1, όπου μεταβάλλουμε μόνο μία από τις παραμέτρους r_N, τ_1, τ_0, $\frac{A'}{A}$.

(α′) Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών, $\frac{t_1}{t_2}$;
(β′) Ποιά παράμετρος μεταβάλλεται και ποια είναι η τιμή της μεταβαλλομένης παραμέτρου σε κάθε εικόνα;
(γ′) Γιατί υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται να γίνει η ϱ αισθητή στις κάτω εικόνες;
(δ′) Γιατί πριν αρχίσει να γίνεται η ϱ αισθητή, σε όλες τις εικόνες, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = 2$;



Σχήμα 1 *Αλλάζουμε μία πάραμετρο μόνο και παρακολουθούμε τη χρονική εξέλιξη των Εξ.* (3),(4),(5).

Θέμα 3. Δίνονται τα ατομικά τροχιακά (συμβολισμός $n\ell m$) του ατόμου του υδρογόνου 210 ($2p_z$) και 32±2 (με κατάλληλο άθροισμα και διαφορά τους φτιάχνονται τα $3d_{x^2-y^2}$ και $3d_{xy}$)

$$\psi_{210}(r,\theta,\varphi) = \left(32\pi a_0^3\right)^{-1/2} \frac{r}{a_0} \cos\theta \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right), \tag{9}$$

$$\psi_{32\pm2}(r,\theta,\varphi) = \left(26244\pi a_0^3\right)^{-1/2} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \sin^2\theta \exp(\pm 2i\varphi) \exp\left(-\frac{r}{3a_0}\right). \tag{10}$$

(α′) Βρείτε και δικαιολογήστε την ομοτιμία και τον αριθμό των κομβικών επιφανειών των ατομικών αυτών τροχιακών.
(β′) Είναι η μετάβαση 210 ↔ 32±2 επιτρεπόμενη στα πλαίσια της προσεγγίσεως διπόλου; Ικανοποιούνται οι κανόνες $\Delta\ell = \pm1$ και $\Delta m = 0, \pm1$;
Δίνεται πως $(\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}) \Leftrightarrow (r' = r, \theta' = \pi - \theta, \varphi' = \varphi + \pi)$.

Θέμα 4. Κβαντική τελεία και οι μεταβλητές χωρίζονται. Στους άξονες x και y έχουμε φρέατα τα οποία χωράνε μία μόνο στάθμη, ενώ στον άξονα z έχουμε απλό αρμονικό ταλαντωτή, του οποίου οι στάθμες ισαπέχουν κατά $\hbar\Omega$. Επικεντρωνόμαστε στις κατώτερες τρεις στάθμες, ας τις ονομάσουμε $k = 1, 2, 3$ ($n = 0, 1, 2$). Οπότε, έχουμε τριστάθμικό σύστημα. Θεωρήστε ημικλασική προσέγγιση με ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα z. Οι ιδιοσυναρτήσεις στον άξονα z είναι

$$Z_n(z) = u_n(z) \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right), \tag{11}$$

όπου $a = \left(\frac{\hbar}{m\Omega}\right)^{1/2}$ και δίνονται οι

$$u_0(z) = \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}, \tag{12}$$

$$u_1(z) = \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \left[2\left(\frac{z}{a}\right)\right], \tag{13}$$

$$u_2(z) = \left(\frac{1}{8a\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \left[2 - 4\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Αποδείξτε πως οι (κυκλικές) συχνότητες Rabi, Ω_R και Ω'_R καθώς και τα μη διαγώνια στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής $\mathcal{P}$ και $\mathcal{P}'$, μεταξύ των σταθμών 12 και 23, αντιστοίχως, ικανοποιούν

(α΄)

$$\mathcal{P} = -\frac{2ea}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, \mu^2\, e^{-\mu^2}, \tag{15}$$

(β΄)

$$\mathcal{P}' = -\frac{\sqrt{2}ea}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, \mu^2\, e^{-\mu^2} + \frac{\sqrt{2}ea}{\sqrt{\pi}}\, 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, \mu^4\, e^{-\mu^2}, \tag{16}$$

κι επειδή δίνεται πως

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, \mu^2\, e^{-\mu^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, \mu^4\, e^{-\mu^2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \tag{18}$$

έχουμε τελικά

(γ΄)

$$\left|\frac{\Omega_R}{\Omega'_R}\right| = \left|\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}'}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{19}$$

Να απαντηθούν 10 υποερωτήματα, όποια θέλετε.

$$\dot{c}_1(t) = c_2(t)\frac{i\Omega_R}{2}\left[e^{i\Delta t}+e^{-i\Sigma t}\right] \quad (\Gamma)$$
$$\dot{c}_2(t) = c_1(t)\frac{i\Omega_R}{2}\left[e^{-i\Delta t}+e^{i\Sigma t}\right]$$

πριν από οποιαδήποτε προσέγγιση μεγάλο Ω_R

1

ΘΕΜΑ 1ο

Α' ΤΡΟΠΟΣ

Ας υποθέσουμε πως $e^{\cdots} \sim 1$ δηλαδή $\Delta \sim 0$, $\Sigma \sim 0$

δηλαδή πως υπερισχύει συντριπτικά ο όρος $\frac{i\Omega_R}{2}$ έξω από την τετράγωνη παρένθεση.

external ext

Τότε οι εξισώσεις γίνονται:

$$\dot{c}_1(t) = c_2(t)\frac{i\Omega_R}{2}2 = i\Omega_R c_2(t) \quad (\Omega_R)$$
$$\dot{c}_2(t) = c_1(t)\frac{i\Omega_R}{2}\cdot 2 = i\Omega_R c_1(t)$$

$$\ddot{c}_1(t) = i\Omega_R \dot{c}_2(t) = (i\Omega_R)^2 c_1(t)$$
$$\ddot{c}_2(t) = i\Omega_R \dot{c}_1(t) = (i\Omega_R)^2 c_2(t)$$

ΔΛΜ $c_k(t) = U_k e^{i\lambda_k t} \Rightarrow \lambda_k^2 = \Omega_R^2$

$\lambda_k = \pm\Omega_R$

$$c_1(t) = Ae^{i\Omega_R t}+Be^{-i\Omega_R t} \quad (\Lambda1)$$
$$c_2(t) = \Gamma e^{i\Omega_R t}+\Delta e^{-i\Omega_R t} \quad (\Lambda2)$$

Α.Σ. $c_1(0)=1$, $c_2(0)=0$

$1 = A+B$ ①

$0 = \Gamma+\Delta \Rightarrow \Delta = -\Gamma$ ②

$(\Omega_R)(\Lambda1)(\Lambda2) \Rightarrow$

$$A i\Omega_R e^{i\Omega_R t} + B(-i\Omega_R)e^{-i\Omega_R t} = i\Omega_R\left(\Gamma e^{i\Omega_R t}+\Delta e^{-i\Omega_R t}\right) \xRightarrow{t=0}$$

$A - B = \Gamma + \Delta$ ③

$$\Gamma i\Omega_R e^{i\Omega_R t} + \Delta(-i\Omega_R)e^{-i\Omega_R t} = i\Omega_R\left(Ae^{i\Omega_R t}+Be^{-i\Omega_R t}\right) \xRightarrow{t=0}$$

$\Gamma - \Delta = A + B$ ④

①②③④ $\quad \Delta = -\Gamma \quad A = B \quad 2\Gamma = 2A \quad \Gamma = A \quad 1 = A + A = 2A$

$A = B = \Gamma = \frac{1}{2} = -\Delta$ ⑤

$$c_1(t) = \frac{e^{i\Omega_R t}+e^{-i\Omega_R t}}{2} \Rightarrow c_1(t) = \cos(\Omega_R t) \Rightarrow P_1(t) = \cos^2(\Omega_R t) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\Omega_R t)$$

$$c_2(t) = \frac{e^{i\Omega_R t}-e^{-i\Omega_R t}}{2} \Rightarrow c_2(t) = i\sin(\Omega_R t) \Rightarrow P_2(t) = \sin^2(\Omega_R t) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\Omega_R t)$$

$$\frac{1}{f} = T = \frac{2\pi}{2\Omega_R} = \frac{\pi}{\Omega_R} \qquad A = 1 \qquad \frac{A}{T} = \frac{1}{\frac{\pi}{\Omega_R}} = \frac{\Omega_R}{\pi}$$

$$\langle P_1(t)\rangle = \langle P_2(t)\rangle = \frac{1}{2}$$

$$P_2(t) = \langle P_2(t)\rangle \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\Omega_R t) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(2\Omega_R t) = 0$$

$\Rightarrow$ (1η φορά) $2\Omega_R t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{2mean} = \frac{\pi}{4\Omega_R}$

$$k = \frac{\langle P_2(t)\rangle}{t_{2mean}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4\Omega_R}} = \frac{4\Omega_R}{2\pi} = \frac{2\Omega_R}{\pi} = 2\frac{A}{T} = 2\frac{1}{\pi/\Omega_R}$$

Β' ΤΡΟΠΟΣ

μέγα $\frac{\Omega_R}{2}$

$$\dot{c}_1(t) = i\Omega_R c_2(t)$$
$$\dot{c}_2(t) = i\Omega_R c_1(t)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\vec{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & i\Omega_R \\ i\Omega_R & 0 \end{bmatrix}}_{iA} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix}}_{\vec{x}(t)}$$

ΔΛΜ $\vec{x}(t) = \vec{u} e^{i\lambda t}$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{u}\, i\lambda e^{i\lambda t}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = iA\vec{x}(t) \Rightarrow \vec{u}\, i\lambda e^{i\lambda t} = iA\vec{u} e^{i\lambda t} \Rightarrow A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

$$(A-\lambda I)\vec{u} = \vec{0}$$

$$\det(A-\lambda I) = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \Omega_R \\ \Omega_R & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \Omega_R^2 \Rightarrow \lambda = \pm\Omega_R$$

α) $\lambda_1 = -\Omega_R$

$$\begin{bmatrix} 0 & \Omega_R \\ \Omega_R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = -\Omega_R \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \Omega_R u_{21} &= -\Omega_R u_{11} \\ \Omega_R u_{11} &= -\Omega_R u_{21} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_{21} = -u_{11}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix} \qquad |\vec{u}_1|^2 = 1 \Rightarrow 2|c|^2 = 1 \Rightarrow |c|^2 = 1/2$$

π.χ. $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

β) $\lambda_2 = \Omega_R$

$$\begin{bmatrix} 0 & \Omega_R \\ \Omega_R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \Omega_R \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \Omega_R u_{22} &= \Omega_R u_{12} \\ \Omega_R u_{12} &= \Omega_R u_{22} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_{12} = u_{22}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} \qquad |\vec{u}_2|^2 = 1 \Rightarrow 2|c|^2 = 1 \Rightarrow |c|^2 = 1/2 \Rightarrow \text{π.χ. } c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Γενική λύση $\vec{x}(t) = \sigma_1 \vec{u}_1 e^{i\lambda_1 t} + \sigma_2 \vec{u}_2 e^{i\lambda_2 t}$

$$\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \sigma_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-i\Omega_R t} + \sigma_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\Omega_R t}$$

A.Σ. $\quad c_1(0)=1 \qquad c_2(0)=0$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}+\frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} \\ 0 &= -\frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}+\frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sigma_1=\sigma_2=\sigma \end{aligned}\right\} \quad 1=2\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sigma=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

μέγα Ω_R

3

$$c_1(t)=\frac{1}{2}e^{-i\Omega_R t}+\frac{1}{2}e^{i\Omega_R t} \Rightarrow c_1(t)=\frac{e^{i\Omega_R t}+e^{-i\Omega_R t}}{2} \Rightarrow$$

$$c_2(t)=-\frac{1}{2}e^{-i\Omega_R t}+\frac{1}{2}e^{i\Omega_R t} \Rightarrow c_2(t)=\frac{e^{i\Omega_R t}-e^{-i\Omega_R t}}{2} \Rightarrow$$

$$c_1(t)=\cos(\Omega_R t) \Rightarrow P_1(t)=\cos^2(\Omega_R t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\Omega_R t)$$

$$c_2(t)=i\sin(\Omega_R t) \Rightarrow P_2(t)=\sin^2(\Omega_R t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\Omega_R t)$$

$$\frac{1}{f}=T=\frac{2\pi}{2\Omega_R}=\frac{\pi}{\Omega_R} \qquad A=1$$

ΘΕΜΑ 2ο

(α') Άν π.χ. κοιτάξουμε τα διαγράμματα της άνω σειράς όπου $\varrho=0$, στη στάσιμη κατάσταση

ΑΝΩ ΑΡΙΣΤΕΡΑ

$$\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{r_N}{\tau_1 r_N}=\frac{1}{\tau_1}= \qquad \text{ή} \qquad AA \quad \frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{0.5}{0.25}=2 \qquad \text{Άρα } \tau_1=0.5$$

$$A\Delta \quad \frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{1}{0.5}=2 \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{t_1}{t_2}=\frac{1}{2}}$$

ΑΝΩ ΔΕΞΙΑ

(β') Δόθηκε πως μεταβάλλεται μόνο μία παράμετρος από τις $\tau_1, \tau_\varphi, \frac{A'}{A}, r_N$.
Αφού τα διαγράμματα της κάτω σειράς έχουν $\varrho \neq 0$, ενώ τα διαγράμματα της άνω σειράς έχουν $\varrho=0$ $\Rightarrow$ μεταβάλλεται η κρίσιμη κανονικοποιημένη άντληση, r_N.

Άλλωστε, από τα διαγράμματα στη στάσιμη κατάσταση έχουμε

ΑΑ $\nu_2=r_N=0.5$

ΚΑ $\nu_2=\tau_1 r_N+(1-\tau_1)=1.25$

$0.5r_N+0.5=1.25$

$0.5r_N=0.75 \Rightarrow r_N=1.5$

ΑΔ $\nu_2=r_N=1$

ΚΔ $\nu_2=\tau_1 r_N+(1-\tau_1)=1.75$

$0.5r_N+0.5=1.75$

$0.5r_N=1.25 \Rightarrow r_N=2.5$

(γ') Στις γενικές εξισώσεις 1,2,3 όταν $\varrho=0$

$$\frac{d\nu_1}{d\tau}=-\frac{\nu_1}{\tau_1}+\nu_2$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau}=r_N-\nu_2$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau}=\frac{A'}{A}\nu_2\frac{1}{\tau_\varphi(1-\tau_1)}$$

$$r_N\uparrow \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{d\nu_2}{d\tau}\uparrow \Rightarrow \nu_2\uparrow \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{d\varrho}{d\tau}\uparrow$$

(δ') όταν $\varrho=0$, αρχίζοντας την άντληση ανεβάζουμε ηλεκτρόνια στις άνω στάθμες και αυτά μοιράζονται στις άνω και κάτω στάθμες ανάλογα με το χρόνο ζωής τους, στη συγκεκριμένη περίπτωση $\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{t_2}{t_1}=\frac{1}{\tau_1}=2$

Πιο περίπλοκα, μπορεί να δειχτεί από τις εξ. 1,2,3 για $\varrho=0$

$$\left.\begin{array}{l}\nu_2(\tau)=r_N\\ \nu_1(\tau)=\tau_1 r_N\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{r_N}{\tau_1 r_N}=2$$

$$ⓐ\quad \frac{d\nu_1}{d\tau} = -\frac{\nu_1}{\tau_1} + \theta(\nu_2-\nu_1) + \nu_2 \xRightarrow{\theta=0} \frac{d\nu_1}{d\tau} = -\frac{\nu_1}{\tau_1} + \nu_2 \quad (a')$$

ΝΑΟ: $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{t_1}{t_2} = \tau_1$

$$ⓑ\quad \frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \theta(\nu_1-\nu_2) - \nu_2 \xRightarrow{\theta=0} \frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N - \nu_2 \quad (b')$$

$$ⓒ\quad \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{\theta}{\tau_0} + \left[\theta(\nu_2-\nu_1) + \frac{A'}{A}\nu_2\right]\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \Longrightarrow \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{A'}{A}\nu_2 \frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \quad (c')$$

$(b') \Rightarrow \frac{d^2\nu_2}{d\tau^2} = -\frac{d\nu_2}{d\tau}$ ΔΛΜ $\nu_2(\tau) = \nu_{20}e^{i\lambda\tau}$

$\nu_{20}(i\lambda)^2 e^{i\lambda\tau} = -\nu_{20}(i\lambda)e^{i\lambda\tau} \Rightarrow -\lambda^2 = -i\lambda \Rightarrow \lambda^2 - i\lambda = 0 \Rightarrow$

$\lambda(\lambda - i) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = i$

$\lambda = 0 \Rightarrow \nu_2(\tau) = \nu_{20}$ Α.Σ $\nu_2(0) = r_N \Rightarrow \boxed{\nu_2(\tau) = r_N}$

$\lambda = i \Rightarrow \nu_2(\tau) = \nu_{20}e^{-\tau}$ $\Rightarrow \nu_2(\tau) = r_N e^{-\tau}$

(a') $\frac{d\nu_1}{d\tau} = -\frac{\nu_1}{\tau_1} + r_N$ ή $\frac{d\nu_1}{d\tau} = -\frac{\nu_1}{\tau_1} + r_N e^{-\tau}$ $\qquad \frac{r_N}{\nu_{10}} = \frac{1-\tau_1}{\tau_1}$

$\frac{d^2\nu_1}{d\tau^2} = -\frac{1}{\tau_1}\frac{d\nu_1}{d\tau}$

$\frac{d^2\nu_1}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau_1}\frac{d\nu_1}{d\tau} = 0$

ΔΛΜ $\nu_1(\tau) = \nu_{10}e^{i\mu\tau}$

$\nu_{10}(i\mu)^2 e^{i\mu\tau} + \frac{1}{\tau_1}\nu_{10}(i\mu)e^{i\mu\tau} = 0$

$-\mu^2 + i\mu = 0 \Rightarrow \mu^2 - i\mu = 0 \Rightarrow \mu(\mu - i) = 0$

$\mu = 0$ ή $\mu = i$

$\mu = 0 \quad \nu_1(\tau) = \nu_{10}$

$\mu = i \quad \nu_1(\tau) = \nu_{10}e^{-\tau}$

$\frac{d^2\nu_1}{d\tau^2} = -\frac{1}{\tau_1}\frac{d\nu_1}{d\tau} + r_N(-1)e^{-\tau}$ $\qquad \nu_{10} = \frac{\tau_1 r_N}{1-\tau_1}$

ΔΛΜ $\nu_1(\tau) = \nu_{10}e^{i\mu\tau}$

$\nu_{10}(i\mu)^2 e^{i\mu\tau} = -\frac{1}{\tau_1}\nu_{10}\, i\mu\, e^{i\mu\tau} + r_N(-1)e^{-\tau}$

$\nu_{10}\left(-\mu^2 + i\mu\frac{1}{\tau_1}\right)e^{i\mu\tau} = -r_N e^{-\tau}$

πρέπει $\mu = i$

$\nu_{10}\left(+1 - \frac{1}{\tau_1}\right) = -r_N \Rightarrow \frac{\tau_1 - 1}{\tau_1} = \frac{-r_N}{\nu_{10}}$

$(a') \Rightarrow 0 = -\frac{\nu_{10}}{\tau_1} + r_N \Rightarrow \frac{\nu_{10}}{\tau_1} = r_N \Rightarrow \nu_{10} = \tau_1 r_N$

οπότε $\boxed{\nu_1(\tau) = \tau_1 r_N}$

$\nu_1(\tau) = \frac{\tau_1 r_N}{1-\tau_1} e^{i\mu\tau}$ (όμως $\mu = i$)

$\nu_1(\tau) = \frac{\tau_1 r_N}{1-\tau_1} e^{-\tau}$

$(a') \Rightarrow \nu_{10}(-1)e^{-\tau} = -\frac{1}{\tau_1}\nu_{10}e^{-\tau} + r_N \Rightarrow$

$\nu_{10}e^{-\tau} = \frac{1}{\tau_1}\nu_{10}e^{-\tau} - r_N \Rightarrow \nu_{10}\left(1 - \frac{1}{\tau_1}\right)e^{-\tau} = r_N$

ΑΤΟΠΟ; σταθερό

ΘΕΜΑ 3ο

210 $(2p_z)$ $\quad \psi_{210}(r,\theta,\varphi) = (32\pi a_0^3)^{-1/2} \dfrac{r}{a_0} \cos\theta \cdot \exp\left(-\dfrac{r}{2a_0}\right)$

32±2 $\begin{pmatrix} 3d_{x^2-y^2} \\ 3d_{xy} \end{pmatrix}$

$$\psi_{32\pm2}(r,\theta,\varphi) = \underbrace{(26244\pi a_0^3)^{-1/2} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{3a_0}\right)}_{\alpha} \sin^2\theta \, e^{\pm 2i\varphi}$$

$$\frac{(\psi_{322} + \psi_{32\bar{2}})}{\sqrt{2}} = \alpha \frac{2\cos 2\varphi}{\sqrt{2}}$$

όταν $\vec{r} \to \vec{r}\,' = -\vec{r}$

$$\frac{\psi_{322} - \psi_{32\bar{2}}}{i\sqrt{2}} = \alpha \frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{2}}$$

$r' = r$

$\theta' = \pi - \theta$

$\varphi' = \pi + \varphi$

(α) ομοτιμία

210 περιττή $\quad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ και r

32±2 άρτιες $\quad \sin^2\theta$ και r και $e^{\pm 2i(\varphi+\pi)} = e^{\pm 2i\varphi} \cancel{e^{\pm 2\pi i}}^{\,1}$

κομβικές επιφάνειες $n-1$ τον αριθμό

$2p_z$ 210 1 $\quad \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ επίπεδο xy

32±2 2 $\quad 3d_{x^2-y^2}$ $\quad \sin^2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ή $\pi \Rightarrow$ άξονας z

$\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ή $\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$ ή $\dfrac{3\pi}{4}$

δηλαδή δύο επίπεδα περιέχοντα τον άξονα z, το ένα με $\varphi = \pi/4$ και το άλλο με $\varphi = 3\pi/4$

$3d_{xy}$ $\quad \sin^2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ή $\theta = \pi \Rightarrow$ άξονας z

$\sin 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = 0$ ή $\pi \Rightarrow \varphi = 0$ ή $\pi/2$

δηλαδή δύο επίπεδα zx $(\varphi = 0)$ και zy $(\varphi = \pi/2)$

(β) $\Delta l = 1 \quad \Delta m = \pm 2$ δηλ. δεν ικανοποιούνται οι κανόνες

$2p_z$ 210 περιττή (Π) και $3d_{x^2-y^2}$ ή $3d_{xy}$ (32±2) άρτιες (Α)

Το $\int d^3r \, \underbrace{\Phi^* \vec{r}\, \Psi}_{\text{(Α) άρτια}}$ έχει άρτια (Α) ολοκληρωτέα ποσότητα, αλλά μηδενίζεται... (0)

$$\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\, (32\pi a_0^3)^{-1/2}\, \frac{r}{a_0}\cos\theta \cdot \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) \cdot r\hat{e}_r$$

$$(26244\pi a_0^3)^{-1/2}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{r}{3a_0}\right)\sin^2\theta\; e^{\pm 2i\varphi}$$

$$= \frac{(839808)^{-1/2}}{\pi}\; \underbrace{\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \cdot \cos\theta\, \hat{e}_r \cdot \sin^2\theta \cdot \exp(\pm 2i\varphi)}_{I_{\theta\varphi}} \cdot$$

$$a_0 \underbrace{\int_0^\infty \frac{r^2}{a_0^2}\frac{dr}{a_0}\frac{r}{a_0}\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) \cdot \frac{r}{a_0}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{r}{3a_0}\right)}_{I_r}$$

$$I_r = \int_0^\infty d\mu \cdot \mu^6\, e^{-\frac{\mu}{2}} \cdot e^{-\frac{\mu}{3}} = \int_0^\infty d\mu \cdot \mu^6 \cdot \exp\left(-\frac{5\mu}{6}\right) = \frac{40310784}{15625} \simeq 2580$$

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = -\vec{r} \iff \begin{aligned} r' &= r \\ \theta' &= \pi - \theta \\ \varphi' &= \pi + \varphi \end{aligned}$$

$I_{\theta\varphi}$ ολοκληρωτέα ποσότητα $\quad \underbrace{\underset{A}{\sin^3\theta}\;\; \underset{\Pi}{\cos\theta}\;\; \underset{\Pi}{\hat{e}_r} \cdot \underset{A}{\exp(\pm 2i\varphi)}}_{A}$

Συνοψίζοντας

$k_1=\{n_1,l_1,m_1\}$	$k_2=\{n_2,l_2,m_2\}$	$\Phi^*_{k_1}$	Φ_{k_2}	$\Phi^*_{k_1}\vec{r}\,\Phi_{k_2}$	$\int \Phi^*_{k_1}\vec{r}\,\Phi_{k_2}\,d^3r$
$210 \quad 2p_z$	$32\pm2 \quad 3d_{x^2-y^2}$, $3d_{xy}$	Π	Α	Α	$\emptyset$ ↑ ΚΙ ΟΜΩΣ

$$\Delta l=1 \qquad \Delta m=\pm 2$$

κι όμως $\vec{r}_{12}=\int d^3r\, \underbrace{\Phi^*_{k_1}\vec{r}\,\Phi_{k_2}}_{\text{ΑΡΤΙΟ}}=\emptyset$ το ολοκλήρωμα μηδενίζεται παρόλο που η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι άρτια

Οι κανόνες επιλογής $\Delta l=\pm1$, $\Delta m=\emptyset,\pm1$ (για επιτρεπόμενες μεταβάσεις στο άτομο υδρογόνου εξακολουθούν να ισχύουν).

Γενικά όμως, σε οποιοδήποτε σύστημα, εντός της προσεγγίσεως δίπόλου, θα πρέπει να κοιτάμε το ολοκλήρωμα $\int d^3r\, \Phi^*_{k_1}\vec{r}\,\Phi_{k_2}$

ΤΣ (ΘΕΜΑ 4ο) με 1Δ ΑΑΤ

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογιστεί ο λόγος $\frac{\Omega_R}{\Omega_R'} = \frac{\wp_R}{\wp'_R}$ σε αυτό το σύστημα.

ΛΥΣΗ:

$$\wp = -eZ_{12} = -eZ_{21} = \int d^3r\, \Phi_1^*(\vec r)\, z\, \Phi_2(\vec r) \qquad a = \left(\frac{\hbar}{m\Omega}\right)^{1/2}$$

$$\Phi_1(\vec r) = X_1(x)\cdot Y_1(y)\cdot Z_1(z) \qquad Z_n(z) = u_n(z)\cdot \exp\left(-\frac{m\Omega z^2}{2\hbar}\right)$$

$$\Phi_2(\vec r) = X_1(x)\cdot Y_1(y)\cdot Z_2(z)$$

$$Z_1(z)\, Z_2(z) = \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} 2\,\frac{z}{a}\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\cdot 2\right)$$

$$Z_1(z)\cdot Z_2(z) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\, 2\,\frac{z}{a}\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{a^2}\right)$$

$$\wp = -e\underbrace{\int dx\,(X_1(x))^2}_{=1}\ \underbrace{\int dy\,(Y_1(y))^2}_{=1}\cdot\int dz\,\frac{2z^2}{\sqrt{\pi}\,a^2}\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{a^2}\right)$$

$$\wp = -e\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int d\left(\frac{z}{a}\right)\left(\frac{z}{a}\right)^2\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{a^2}\right) \Rightarrow \wp = -e\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int d\mu\cdot\mu^2\cdot\exp(-\mu)$$

$$\Rightarrow \boxed{\wp = -\frac{ea\,2}{\sqrt{\pi}}\int d\mu\,\mu^2 e^{-\mu^2}}$$

$$\wp' = -eZ_{23} = -eZ_{32} = \int d^3r\,\Phi_3^*(\vec r)\, z\,\Phi_2(\vec r)$$

$$\Phi_2(\vec r) = X_1(x)\cdot Y_1(y)\cdot Z_2(z)$$

$$\Phi_3(\vec r) = X_1(x)\cdot Y_1(y)\cdot Z_3(z) \qquad \cdot\exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\cdot 2\right)$$

$$Z_2(z)\cdot Z_3(z) = \left(\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} 2\,\frac{z}{a}\left(\frac{1}{8a\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\left[2-4\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]$$

$$Z_2(z)\cdot Z_3(z) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,2\,\frac{z}{a}\left[2-4\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]\exp\left(-\frac{z^2}{a^2}\right)$$

$$\wp' = -e\cdot 1\cdot 1\cdot\int dz\,\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,2\,\frac{z^2}{a}\left[2-4\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]\exp\left(-\frac{z^2}{a^2}\right)$$

$$\wp' = -e\,\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}}\,a\int d\left(\frac{z}{a}\right)\left(\frac{z}{a}\right)^2\left[2-4\left(\frac{z}{a}\right)^2\right]\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{a^2}\right)$$

$$\wp' = -e\,\frac{\sqrt{2}\,a}{2\sqrt{\pi}}\int d\mu\cdot\mu^2\left(2-4\mu^2\right)\cdot\exp\left(-\mu^2\right)$$

$$\wp' = -\frac{ea\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}\left\{2\int d\mu\,\mu^2 e^{-\mu^2} - 4\int d\mu\,\mu^4 e^{-\mu^2}\right\} \Rightarrow \boxed{\wp' = -\frac{ea\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int d\mu\,\mu^2 e^{-\mu^2} + \frac{ea\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot 2\int d\mu\,\mu^4 e^{-\mu^2}}$$

$$\wp' = -\,ea\sqrt{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\, \mu^2 e^{-\mu^2} = \text{Wolfram Alpha Widget} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \simeq 0.886227$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu\, \mu^4 e^{-\mu^2} = \text{Wolfram Alpha Widget} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \simeq 1.32934$$

Επομένως $\quad p = -\frac{ea\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{2}} \Rightarrow p = -ea$

$$p' = -\frac{ea\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{\pi}}} \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{2} + \frac{ea\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{\pi}}} 2 \cdot \frac{3\cancel{\sqrt{\pi}}}{4} = -ea\frac{\sqrt{2}}{2} + ea\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = ea\frac{\sqrt{2}}{2}(3-1)$$

$$p' = \sqrt{2}\, ea$$

Άρα $\quad \frac{p}{p'} = \frac{-ea}{\sqrt{2}\, ea} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$