Τομέας Φυσικής Στερεάς Καταστάσεως, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κβαντική Οπτική και Lasers. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Εξέταση της 30ης Αυγούστου 2016

Θέμα 1. Να αποδειχτούν οι σχέσεις: (α′) $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$, (β′) $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$, (γ′) $\hat{N}(\hat{a}|n\rangle) = (n-1)(\hat{a}|n\rangle)$ (δ′) $\hat{N}(\hat{a}^\dagger|n\rangle) = (n+1)(\hat{a}^\dagger|n\rangle)$, όπου $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ είναι ο τελεστής του αριθμού των φωτονίων, $\hat{a}^\dagger$ είναι ο τελεστής δημιουργίας φωτονίου και $\hat{a}$ είναι ο τελεστής καταστροφής φωτονίου.

Θέμα 2. Θεωρήστε την αναβίβαση και καταβίβαση ηλεκτρονίου μεταξύ των ενεργειακών σταθμών διστάθμικού συστήματος (ΔΣ).
(α′) Ορίστε τους σπίνορες που περιγράφουν το ηλεκτρόνιο σε κάθε μία από τις δύο στάθμες του ΔΣ καθώς και το κενό, σε μορφή πινάκων στήλης.
(β′) Ορίστε τους τελεστές αναβιβάσεως και καταβιβάσεως ηλεκτρονίων, $\hat{S}_+$ και $\hat{S}_-$ σε μορφή πινάκων. Δείξτε τι αποτέλεσμα έχει η δράση τους στους σπίνορες.
(γ′) Υπολογίστε τα $\hat{S}_+ + \hat{S}_-$ και $\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+$.
Δείξτε ότι ο τελεστής $\hat{S}_+\hat{S}_-$ μετρά τον αριθμό των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη, ενώ ο τελεστής $\hat{S}_-\hat{S}_+$ μετρά τον αριθμό των ηλεκτρονίων στην κάτω στάθμη.
(δ′) Δείξτε ότι η χαμιλτονιανή που περιγράφει το ΔΣ είναι $\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2\hat{S}_+\hat{S}_- + E_1\hat{S}_-\hat{S}_+$ και δείξτε πως προκύπτει $H_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-$.
(ε′) Δείξτε ότι

$$\{\hat{S}_+, \hat{S}_+^\dagger\} = \hat{\mathbf{I}} \quad \{\hat{S}_-, \hat{S}_-^\dagger\} = \hat{\mathbf{I}} \quad \{\hat{S}_+, \hat{S}_+\} = \hat{\mathbf{0}} \quad \{\hat{S}_-, \hat{S}_-\} = \hat{\mathbf{0}}.$$

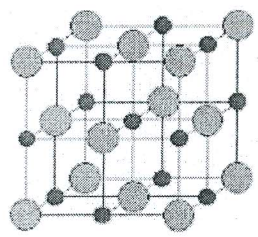
$\hat{\mathbf{I}}$ είναι ο διαγώνιος μοναδιαίος πίνακας 2×2 και $\hat{\mathbf{0}}$ είναι ο μηδενικός πίνακας 2×2.
(ϛ′) Εξηγήστε τη μεταθετική και την αντιμεταθετική ιδιότητα καθώς και τη σχέση τους με τους μεταθέτες και τους αντιμεταθέτες.
(ζ′) Ποια σωματίδια περιγράφονται με σχέσεις μεταθέσεως και ποια με σχέσεις αντιμεταθέσεως; Ποιες είναι αυτές οι σχέσεις; Πως θα μπορούσε να προκύψει η απαγορευτική αρχή Pauli από αυτές;
(η′) Ας θυμηθούμε τους πίνακες Pauli $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Αποδείξτε ότι οι πίνακες Pauli αντιμετατίθενται.
(θ′) Δείξτε ότι $[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$.
(ι′) Τέλος δείξτε ότι $\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \hat{\sigma}_x$ και $\hat{S}_+ - \hat{S}_- = i\hat{\sigma}_y$.

Θέμα 3. Θεωρήστε τον κρύσταλλο του χλωριούχου καλίου (KCl). Η δομή μπορεί να περιγραφεί με ένα εδροκεντρωμένο κυβικό πλέγμα με διατομική βάση (ζεύγος ανιόντος - κατιόντος). Για παράδειγμα, σε κάθε πλεγματικό σημείο τοποθετείται (1) ένα ανιόν Cl^- ακριβώς πάνω στο πλεγματικό σημείο και (2) ένα κατιόν K^+ σε απόσταση $(a/2)(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$ από το πλεγματικό σημείο, όπου a είναι η πλεγματική σταθερά. Για παράδειγμα στο πλεγματικό σημείο στην αρχή των αξόνων (στο 0) έχουμε ένα ανιόν και το αντίστοιχο κατιόν βρίσκεται στο κέντρο της συμβατικής κυβικής κυψελίδας. Δείτε την εικόνα.
(α′) Πόσα κατιόντα έχει ως πρώτους γείτονες ένα κενό ανιόντος;
Προσεγγίστε τώρα το φρέαρ που δημιουργείται για ένα ηλεκτρόνιο από ένα κενό ανιόντος με ένα τριδιάστατο απειρόβαθο φρέαρ με εύρος $L = a$ σε κάθε διάσταση.

(β′) Εκφράστε την ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης (ΘΣ) καθώς και την ενέργεια της 1ης διεγερμένης στάθμης (1ΔΣ) συναρτησει του L, του $\hbar$ και της ενεργού μάζας m^*.
(γ′) Βρείτε, σε eV, την ενέργεια του φωτονίου που αντιστοιχεί σε μετάβαση ενός παγιδεμένου ηλεκτρονίου από την ΘΣ στην 1ΔΣ, εάν η ενεργός μάζα είναι $m^* \approx 0.9m_e$.
(δ′) Βρείτε το αντίστοιχο μήκος κύματος λ σε nm. Αν η πειραματική τιμή για το λ όπου έχουμε τη μέγιστη απορρόφηση είναι 550 nm, βρείτε την σχετική επί τοις εκατό απόκλιση του απλοϊκού θεωρητικού μας προτύπου από αυτήν. Δίνονται $a \approx 6.3$ Å, $e \approx 1.6 \times 10^{-19}$ C, $h \approx 6.6 \times 10^{-34}$ J s, $c \approx 3.0 \times 10^{8}$ m/s, $m_e \approx 9.0 \times 10^{-31}$ kg.



Θέμα 4. Θεωρήστε μια κβαντική τελεία σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με εσωτερικό GaAs διαστάσεων 8 × 4 × 4 nm και περίβλημα $Al_xGa_{1-x}As$ με μοριακό κλάσμα Al, x, τέτοιο ώστε η ασυνέχεια της ζώνης αγωγιμότητας μεταξύ των δύο υλικών να είναι $V_b = 224$ meV. Θεωρήστε κατά προσέγγιση την ενεργό μάζα στη ζώνη αγωγιμότητας ίση περίπου με αυτή του GaAs, δηλαδή $m^* \approx 0.067m_e$. Θεωρήστε γνωστό ότι ένα κβαντικό φρέαρ εύρους L περιέχει $n = 1 + \mathrm{Int}\left[\sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2\hbar^2}}\right]$ δέσμιες ενεργειακές καταστάσεις. $\mathrm{Int}[\xi]$ είναι το ακέραιο μέρος του ξ.
(α′) Πόσες ενεργειακές στάθμες έχει αυτή η κβαντική τελεία;
(β′) Σε τι μήκος κύματος αντιστοιχεί η μετάβαση από τη θεμελιώδη στην πρώτη διεγερμένη στάθμη της εν λόγω κβαντικής τελείας;
(γ′) Υποθέστε ότι έχουμε μια μεγάλη συλλογή από τέτοιες κβαντικές τελείες με ένα ηλεκτρόνιο στην κάθε μία και ότι η στατιστική Boltzmann με ίδια στατιστικά βάρη μπορεί να περιγράψει τον πληθυσμό των ενεργειακών σταθμών. Η θερμοκρασία ας είναι 300 K. Συγκρίνετε τον αριθμό των κβαντικών τελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην θεμελιώδη στάθμη με τον αριθμό των κβαντικών τελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην 1η διεγερμένη στάθμη.
(δ′) Έστω τώρα ότι όλη αυτή η συλλογή κβαντικών τελειών βρίσκεται εντός καταλλήλου ΗΜ πεδίου. Συγκρίνετε τον αριθμό των κβαντικών τελειών που μεταβαίνουν σε χρόνο dt από τη θεμελιώδη στην 1η διεγερμένη στάθμη με εξαναγκασμένη διεργασία, $dN^{\varepsilon\xi}_{1\to2}$, με τον αριθμό των κβαντικών τελειών που μεταβαίνουν σε χρόνο dt από την 1η διεγερμένη στη θεμελιώδη στάθμη με εξαναγκασμένη διεργασία, $dN^{\varepsilon\xi}_{2\to1}$. Δίνονται $\hbar \approx 1.0 \times 10^{-34}$ Js, $e \approx 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9.0 \times 10^{-31}$ kg, $k_B \approx 1.4 \times 10^{-23}$ J/K$\approx 8.6 \times 10^{-5}$ eV/K.

ΘΕΜΑ 1 Να αποδειχτούν οι σχέσεις όπου $\hat{N} = \hat{a}^{+}\hat{a}$ είναι ο τελεστής του αριθμού των φωτονίων, $\hat{a}^{+}$ είναι ο τελεστής δημιουργίας φωτονίου και $\hat{a}$ ο τελεστής καταστροφής φωτονίου

(α') $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$

(β') $[\hat{N}, \hat{a}^{+}] = \hat{a}^{+}$

(γ') $\hat{N}\,(\hat{a}|n\rangle) = (n-1)\,(\hat{a}|n\rangle)$

(δ') $\hat{N}\,(\hat{a}^{+}|n\rangle) = (n+1)\,(\hat{a}^{+}|n\rangle)$

ΛΥΣΗ

(α') $$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^{+}\hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^{+}\underbrace{[\hat{a}, \hat{a}]}_{0} + \underbrace{[\hat{a}^{+}, \hat{a}]}_{-1}\hat{a} = -\hat{a}$$

(β') $$[\hat{N}, \hat{a}^{+}] = [\hat{a}^{+}\hat{a}, \hat{a}^{+}] = \hat{a}^{+}\underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^{+}]}_{1} + \underbrace{[\hat{a}^{+}, \hat{a}^{+}]}_{0}\hat{a} = \hat{a}^{+}$$

(γ') $$\hat{N}\,(\hat{a}|n\rangle) = \hat{N}\,\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \hat{a}^{+}\hat{a}\,\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sqrt{n}\,\hat{a}^{+}\sqrt{n-1}\,|n-2\rangle =$$
$$= \sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-1}\,|n-1\rangle = \sqrt{n}\,(n-1)\,|n-1\rangle =$$
$$= (n-1)\sqrt{n}\,|n-1\rangle = (n-1)\,(\hat{a}|n\rangle)$$

(δ') $$\hat{N}\,(\hat{a}^{+}|n\rangle) = \hat{N}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\,\hat{a}^{+}\hat{a}\,|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\,\hat{a}^{+}\sqrt{n+1}\,|n\rangle$$
$$= (n+1)\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = (n+1)\,(\hat{a}^{+}|n\rangle)$$

ΘΕΜΑ 2 Θεωρήστε την αναβίβαση και την καταβίβαση ηλεκτρονίου μεταξύ των ενεργειακών σταθμών διστάθμικού συστήματος (ΔΣ).

(α') Ορίστε τους σπίνορες που περιγράφουν το ηλεκτρόνιο σε κάθε μία από τις δύο στάθμες του ΔΣ καθώς και το κενό, σε μορφή πινάκων στήλης.

(β') Ορίστε τους τελεστές αναβιβάσεως και καταβιβάσεως ηλεκτρονίων $\hat{S}_{+}$ και $\hat{S}_{-}$ σε μορφή πινάκων. Δείξτε τι αποτέλεσμα έχει η δράση τους στους σπίνορες.

(γ') Βρείτε τα $\hat{S}_{+} + \hat{S}_{-}$ καθώς και $\hat{S}_{+}\hat{S}_{-} + \hat{S}_{-}\hat{S}_{+}$. Δείξτε ότι ο τελεστής $\hat{S}_{+}\hat{S}_{-}$ μετρά τον αριθμό των ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη, ενώ ο τελεστής $\hat{S}_{-}\hat{S}_{+}$ μετρά (*)

(δ') Δείξτε ότι η χαμιλτονιανή που περιγράφει το ΔΣ είναι

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2\hat{S}_{+}\hat{S}_{-} + E_1\hat{S}_{-}\hat{S}_{+}$$ και δείξτε πως προκύπτει $$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\,\hat{S}_{+}\hat{S}_{-}$$

ε') Δείξτε ότι $\{\hat{S}_{+}, \hat{S}_{+}^{+}\} = \hat{I}$, $\{\hat{S}_{-}, \hat{S}_{-}^{+}\} = \hat{I}$ $\{\hat{S}_{+}, \hat{S}_{+}\} = \hat{0}$ $\{\hat{S}_{-}, \hat{S}_{-}\} = \hat{0}$

όπου $\hat{I}$ είναι ο διαγώνιος μοναδιαίος πίνακας 2x2 και $\hat{0}$ είναι ο μηδενικός πίνακας 2x2

(*) Τον αριθμό των ηλεκτρονίων στην κάτω στάθμη

Εξηγήστε τη μεταθετική και την αντιμεταθετική ιδιότητα καθώς και
σχέση τους με τους μεταθέτες και τους αντιμεταθέτες.

Ποια σωματίδια περιγράφονται με μεταθέσεως σχέσεις και ποιά με αντιμεταθέσεως σχέσεις;
Πώς θα μπορούσε να προκύψει η απαγορευτική αρχή Pauli από αυτές;
Ποιες είναι αυτές οι σχέσεις;

Ας θυμηθούμε τους πίνακες Pauli $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Αποδείξτε ότι οι πίνακες Pauli αντιμετατίθενται

(θ') Δείξτε ότι $[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$

(ι') Δείξτε ότι $\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \hat{\sigma}_x$, $\hat{S}_+ - \hat{S}_- = i\hat{\sigma}_y$

ΛΥΣΗ

') $|\;\rangle = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \qquad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle$

') $\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_+^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_- \qquad \hat{S}_-^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_+$

$$\hat{S}_+|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \qquad \hat{S}_-|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$\hat{S}_+|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle \qquad \hat{S}_-|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

$$\hat{S}_+|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \qquad \hat{S}_-|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

γ') $\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

ΠΙΣΩ

δ') $\hat{H} = E_2\hat{S}_+\hat{S}_- + E_1\hat{S}_-\hat{S}_+ = E_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \end{pmatrix} = E_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ιδιοάνυσμα με ιδιοτιμή E_1

$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = E_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ιδιοάνυσμα με ιδιοτιμή E_2

$\circledast$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_- |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+ |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+ |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αν θέσουμε $E_1 \equiv 0 \Rightarrow E_2 = E_1 + \hbar\Omega = \hbar\Omega$

$$\Rightarrow \hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-$$

(ε') $\{\hat{S}_+, \hat{S}_+^\dagger\} = \hat{S}_+ \hat{S}_+^\dagger + \hat{S}_+^\dagger \hat{S}_+ = \hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ = \hat{I}$

$\{\hat{S}_-, \hat{S}_-^\dagger\} = \hat{S}_- \hat{S}_-^\dagger + \hat{S}_-^\dagger \hat{S}_- = \hat{S}_- \hat{S}_+ + \hat{S}_+ \hat{S}_- = \hat{I}$

$\{\hat{S}_+, \hat{S}_+\} = 2\hat{S}_+ \hat{S}_+ = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0}$

$\{\hat{S}_-, \hat{S}_-\} = 2\hat{S}_- \hat{S}_- = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0}$

(ς') μετάθέτης $[A, B] = AB - BA$

όταν $[A, B] = 0 \Rightarrow AB = BA$ μεταθετική ιδιότητα

αντιμεταθέτης $\{A, B\} = AB + BA$

όταν $\{A, B\} = 0 \Rightarrow AB = -BA$ αντιμεταθετική ιδιότητα

(ζ') σχέσεις μεταθέσεως: μποζόνια $[\hat{a}_m, \hat{a}_m^\dagger] = 1$

$[\hat{a}_m, \hat{a}_l] = 0$

$[\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_l^\dagger] = 0$

σχέσεις αντιμεταθέσεως: φερμιόνια $\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$

$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0$

$\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0$

$\{\hat{a}_r^\dagger, \hat{a}_r^\dagger\} = 0 \Rightarrow 2\hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r^\dagger = 0 \Rightarrow \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r^\dagger = 0$ δεν γίνεται να δημιουργήσω δύο φερμιόνια στην ίδια κατάσταση (η') π.χ.

$$\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\} = \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0}$$

όμοιως τα υπόλοιπα

(θ') $$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i\hat{\sigma}_z$$

(ι') $$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x$$

$$\hat{S}_+ - \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\hat{\sigma}_y$$

ΘΕΜΑ 3

0.5

(α') 6 άνω - κάτω, δεξιά - αριστερά, εμπρός - πίσω.

(β') Όπως αναφέρεται και στο βιβλίο ...

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n_1^2}{2m_1^* L_x^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_2^2}{2m_2^* L_y^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n_3^2}{2m_3^* L_z^2} \qquad n_i \in \mathbb{N}^*$$

και για $m_1^* = m_2^* = m_3^* = m^*$ και $L_x = L_y = L_z = L \Rightarrow$

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* L^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)$$

Άρα $\boxed{E_{\theta\Sigma} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2m^* L^2}}$ $\boxed{E_{1\Delta\Sigma} = \frac{6\hbar^2\pi^2}{2m^* L^2}}$

$n_1 = n_2 = n_3 = 1$ π.χ. $n_1 = n_2 = 1$ και $n_3 = 2$

(γ') $\boxed{h\nu} = E_{1\Delta\Sigma} - E_{\theta\Sigma} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2m^* L^2} = \frac{3h^2 4\pi^2}{8m^* L^2} = \frac{3h^2}{8m^* L^2} = \frac{3 \cdot 6.6^2 \cdot 10^{-68}\, J^2 s^2}{8 \cdot 0.9 \cdot 9 \cdot 10^{-31}\, kg\ 6.3^2\ 10^{-20}\, m^2}$

$\Rightarrow h\nu = 0.0508 \cdot 10^{-68+31+20}\, J = 0.0508\ 10^{-17}\, J$

$\Rightarrow h\nu = \frac{0.0508}{1.6\ 10^{-19}}\ 10^{-17}\, eV \simeq 0.0317 5 \cdot 10^{2}\, eV$ $\qquad 1eV = 1.6\ 10^{-19} J$

$\Rightarrow h\nu \simeq 3.2\ eV$

(δ') $h\nu = \frac{3h^2}{8m^* L^2}$, $c = \lambda\nu \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = \frac{3h^2}{8m^* L^2} \Rightarrow \lambda = hc\,\frac{8m^* L^2}{3h^2}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{8}{3}\,\frac{c m^* L^2}{h} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 10^8\, \frac{m}{s}\ 0.9\ 9 \cdot 10^{-31}\, kg\ 6.3^2\ 10^{-20}\, m^2}{3 \cdot 6.6 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s}$

$= 389.7\ 10^{8-31-20+34}\, m = 390 \cdot 10^{-9} m \Rightarrow$ $\qquad$ -51 $+42$ -9

$\boxed{\lambda = 390\ nm}$

$$\frac{\lambda_n - \lambda}{\lambda_n} = \frac{550 - 390}{550} = \frac{160}{550} = \frac{16}{55} = 0.29 \qquad 29\%$$

ΘΕΜΑ 4

(α) $n = 1 + \mathrm{Int}\left[\sqrt{\dfrac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}}\right]$

$L_x = 8\,nm \qquad L_y = 4\,nm = L_z$

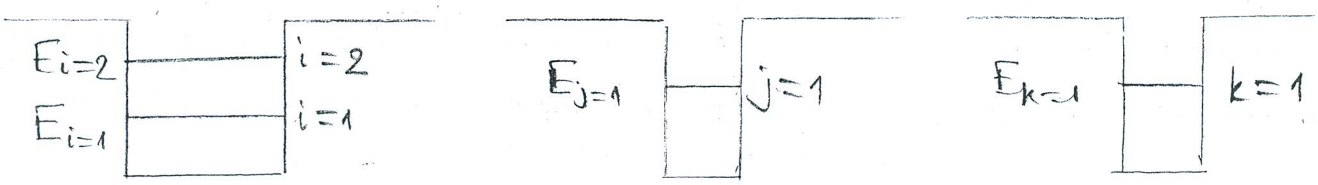
$$* \quad \frac{2m^* V_b L_x^2}{\pi^2\hbar^2} \simeq \frac{2 \cdot 0.067 \cdot 9 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot 224 \cdot 10^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\,J \cdot 64 \cdot 10^{-18}\,m^2}{10 \cdot 1^2 \cdot 10^{-68}\,J^2 s^2}$$

$$\simeq 25805 \cdot 10^{-31-3-19-18+67} \simeq 25805 \cdot 10^{-4} = 2.58$$

Άρα $\sqrt{\dfrac{2m^* V_b L_x^2}{\pi^2\hbar^2}} = \sqrt{2.58} < 2 \Rightarrow n_x = 2$

$$* \quad \frac{2m^* V_b L_y^2}{\pi^2\hbar^2} \simeq 2.58 \cdot \frac{16}{64} = \frac{2.58}{4} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{2m^* V_b L_y^2}{\pi^2\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m^* V_b L_z^2}{\pi^2\hbar^2}} < 1$$

$\Rightarrow n_y = 1 = n_z$



Δηλαδή, συνολικά, είτε βρισκόμαστε στην κατάσταση $i=j=k=1$

είτε » $i=2 \quad j=k=1$

με αντίστοιχες ενέργειες $E_{i=1} + E_{j=1} + E_{k=1} = E_{ΘΣ}$

ή $E_{i=2} + E_{j=1} + E_{k=1} = E_{1ΔΣ}$

(β) $\left.\begin{array}{l} h\nu = E_{1ΔΣ} - E_{ΘΣ} = E_{i=2} - E_{i=1} \\ c = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \dfrac{c}{\nu} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \dfrac{ch}{E_{i=2} - E_{i=1}}$

$$(\gamma')\quad \left.\begin{aligned} N_{\theta\Sigma} &= N_{o\lambda}\, e^{-\frac{E_{\theta\Sigma}}{k_B T}} \\ N_{1\Delta\Sigma} &= N_{o\lambda}\, e^{-\frac{E_{1\Delta\Sigma}}{k_B T}} \end{aligned}\right\} \quad \frac{N_{\theta\Sigma}}{N_{1\Delta\Sigma}} = e^{\frac{E_{1\Delta\Sigma} - E_{\theta\Sigma}}{k_B T}}.$$

$$(\delta')\quad \left.\begin{aligned} dN_{\theta\Sigma\to 1\Delta\Sigma} &= N_{\theta\Sigma}\, dW^{\epsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = N_{\theta\Sigma}\, B_{\theta\Sigma,1\Delta\Sigma} \cdot \rho(\nu,T)\, dt \\ dN_{1\Delta\Sigma\to\theta\Sigma} &= N_{1\Delta\Sigma}\, dW^{\epsilon\xi}_{\epsilon\kappa\pi} = N_{1\Delta\Sigma}\, B_{1\Delta\Sigma,\theta\Sigma} \cdot \rho(\nu,T)\, dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{dN_{\theta\Sigma\to 1\Delta\Sigma}}{dN_{1\Delta\Sigma\to\theta\Sigma}} = \frac{N_{\theta\Sigma}}{N_{1\Delta\Sigma}} = e^{\frac{E_{1\Delta\Sigma} - E_{\theta\Sigma}}{k_B T}}$$

με την προϋπόθεση ότι $B_{\theta\Sigma,1\Delta\Sigma} = B_{1\Delta\Sigma,\theta\Sigma}$