Κβαντική Οπτική και Lasers.

Εξέταση της 10ης Οκτωβρίου 2014. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Θέμα 1.

(α΄) Να εξεταστεί η συμπεριφορά του νόμου Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος στα εξής όρια: μηδενική συχνότητα και άπειρη συχνότητα.

(β΄) Να αποδειχθεί ότι στις πολύ μικρές συχνότητες ταυτίζεται με το νόμο Rayleigh-Jeans, ενώ στις πολύ μεγάλες συχνότητες ταυτίζεται με το νόμο Wien.

Θέμα 2.

(α΄) Θεωρήστε τη Χαμιλτονιανή Rabi ενός ΗΜ τρόπου. Ποιούς όρους της αγνοούμε ώστε να καταλήξουμε στη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings και για ποιό λόγο;

(β΄) Θεωρήστε τώρα τη Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings ενός ΗΜ τρόπου. Υπολογίστε τα $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$, $\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{S}_- \rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{S}_+ \rangle$, $< \hat{S}_+\hat{a} >$, $< \hat{S}_+\hat{a}^\dagger >$, $< \hat{S}_-\hat{a}^\dagger >$, $< \hat{S}_-\hat{a} >$ για την κατάσταση:

$$\left|\psi(t) >= \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \right| \downarrow, 1 > + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \mid \uparrow, 0 >$$

(γ΄) Χρησιμοποιώντας τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger για την παραπάνω κατάσταση, δείξτε ότι ικανοποιείται το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} -\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(δ΄) Ορίζοντας $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ και δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $\vec{x}(t) = \vec{v}e^{-i\lambda t}$, δείξτε ότι

$$\lambda = \frac{\omega + \Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega - \Omega}{2}\right)^2 + g^2}$$

Θέμα 3.

Αναβίβαση και καταβίβαση ηλεκτρονίου μεταξύ των ενεργειακών σταθμών δισταθμικού ατόμου.

(α΄) Ορίστε τους σπίνορες που περιγράφουν το ηλεκτρόνιο σε κάθε μία από τις δύο στάθμες του ατόμου καθώς και στο κενό, σε μορφή πινάκων στήλης.

(β΄) Ορίστε τους τελεστές αναβιβάσεως και καταβιβάσεως ηλεκτρονίων, $\hat{S}_+$ και $\hat{S}_-$, σε μορφή πινάκων. Δείξτε τι αποτέλεσμα έχει η δράση τους στους σπίνορες.

(γ΄) Βρείτε τα $\hat{S}_+ + \hat{S}_-$ καθώς και $\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+$.

(δ΄) Αποδείξτε ότι εν τέλει

$\hat{H}_{ατόμου} = E_2\, \hat{S}_+\hat{S}_- + E_1\, \hat{S}_-\hat{S}_+$

και επιπλέον δείξτε πως προκύπτει

$\hat{H}_{ατόμου} = \hbar\Omega\, \hat{S}_+\hat{S}_-$

εξηγώντας όλα τα σύμβολα.

ΘΕΜΑ 2δ

Η κατάσταση $|\psi(t)\rangle = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\downarrow,1\rangle + \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}|\uparrow,0\rangle$ είναι μερική περίπτωση της

$$|\psi_E(t)\rangle = c_1(t)|\downarrow,n+1\rangle + c_2(t)|\uparrow,n\rangle \text{ για } c_1(t) = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \text{ κ } c_2(t) = \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \text{ κ } n=0$$

Άρα χρησιμοποιώντας τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger για την $|\psi(t)\rangle$ καταλήγουμε σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$i\begin{pmatrix} i\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ -i\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \vec{x}(t)$$

ΘΕΜΑ 2δ

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} i\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ -i\Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Leftarrow \vec{x}(t)$$

$$= -i\begin{pmatrix} -\Omega \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \\ \Omega \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Άρα $i\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix}\vec{x}(t)$

$\vec{x}(t) = \vec{u}\, e^{-i\lambda t}$

$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{u}\,(-i\lambda)\, e^{-i\lambda t}$

$$i\vec{u}(-i)\lambda \cancel{e^{-i\lambda t}} = \begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix}\vec{u}\,\cancel{e^{-i\lambda t}}$$

$$\begin{pmatrix} \omega & g \\ g & \Omega \end{pmatrix}\vec{u} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow (A-\lambda I)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \det(A-\lambda I) = 0$$

ΘΕΜΑ 2β'

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{\frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}}}_{c_1(t)} |\downarrow, n+1\rangle + \underbrace{\frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}}}_{c_2(t)} |\uparrow, n\rangle$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = n + |c_1(t)|^2 = n + 1/2$$

$$\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle = n+1+|c_1(t)|^2 = n+1+1/2 = n + 3/2$$

$$\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{S}_+ \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \hat{S}_+ \hat{a} \rangle = \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{n+1} = \frac{e^{2i\Omega t}}{2} \sqrt{n+1}$$

$$\langle \hat{S}_+ \hat{a}^\dagger \rangle = 0$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{a}^\dagger \rangle = \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2}} \sqrt{n+1} = \frac{e^{-2i\Omega t}}{2} \sqrt{n+1}$$

$$\langle \hat{S}_- \hat{a} \rangle = 0$$

Συνέχεια ΘΕΜΑΤΟΣ 2δ

$$\begin{vmatrix} \omega-\lambda & g \\ g & \Omega-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\omega-\lambda)(\Omega-\lambda) - g^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega\Omega - \omega\lambda - \Omega\lambda + \lambda^2 - g^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (\omega+\Omega)\lambda + \omega\Omega - g^2 = 0$$

$$\Delta = (\omega+\Omega)^2 - 4\omega\Omega + 4g^2 =$$

$$\omega^2 + \Omega^2 + \underline{2\omega\Omega - 4\omega\Omega} + 4g^2$$

$$(\omega-\Omega)^2 + 4g^2$$

$$\lambda = \frac{(\omega+\Omega) \pm \sqrt{(\omega-\Omega)^2 + 4g^2}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\omega+\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega-\Omega}{2}\right)^2 + g^2}$$

Όλα τα υπόλοιπα υπάρχουν στις σημειώσεις παραδίστηση ή