Τομέας Φυσικής Στερεάς Καταστάσεως, Τμήμα Φυσικής, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Κβαντική Οπτική και Lasers. Διδάσκων Κ. Σιμσερίδης

Εξέταση της 30ης Ιουνίου 2015

Θέμα 1. Θεωρήστε την αναβίβαση και καταβίβαση ηλεκτρονίου μεταξύ των ενεργειακών σταθμών δισταθμικού συστήματος (ΔΣ).
(α′) Ορίστε τους σπίνορες που περιγράφουν το ηλεκτρόνιο σε κάθε μία από τις δύο στάθμες του ΔΣ καθώς και στο κενό, σε μορφή πινάκων στήλης.
(β′) Ορίστε τους τελεστές αναβιβάσεως και καταβιβάσεως ηλεκτρονίων, $\hat{S}_+$ και $\hat{S}_-$ σε μορφή πινάκων. Δείξτε τι αποτέλεσμα έχει η δράση τους στους σπίνορες.
(γ′) Βρείτε τα $\hat{S}_+ + \hat{S}_-$ καθώς και $\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+$.
(δ′) Δείξτε ότι η χαμιλτονιανή που περιγράφει το ΔΣ είναι $\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2\hat{S}_+\hat{S}_- + E_1\hat{S}_-\hat{S}_+$ και δείξτε πως προκύπτει $H_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-$.
(ε′) Δείξτε ότι

$$\{\hat{S}_+, \hat{S}_+^\dagger\} = \hat{\mathbf{I}} \quad \{\hat{S}_-, \hat{S}_-^\dagger\} = \hat{\mathbf{I}} \quad \{\hat{S}_+, \hat{S}_+\} = \hat{\mathbf{0}} \quad \{\hat{S}_-, \hat{S}_-\} = \hat{\mathbf{0}}$$

$\hat{\mathbf{I}}$ είναι ο διαγώνιος μοναδιαίος πίνακας 2×2 και $\hat{\mathbf{0}}$ είναι ο μηδενικός πίνακας 2×2.
(ϛ′) Ας θυμηθούμε τώρα τους πίνακες Pauli $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Αποδείξτε ότι οι πίνακες Pauli αντιμετατίθονται.

Θέμα 2. Θεωρήστε γνωστό το νόμο του Planck

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Να αποδειχθούν οι δύο διατυπώσεις του νόμου των Stefan-Boltzmann
(α′) για την πυκνότητα ενέργειας, $\varrho(T)$, και
(β′) για την ένταση ακτινοβολίας, I.
(γ′) Να αποδειχθεί ο νόμος του Planck στη μορφή $\rho(\lambda, T)$.
(δ′) Ποιές είναι οι μονάδες μετρήσεως των $\rho(\nu, T)$, $\rho(\lambda, T)$, $\varrho(T)$, I στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων; Δίνεται $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx = \frac{\pi^4}{15}$.

Θέμα 3. Θεωρήστε τις διαφορικές εξισώσεις ρυθμών laser στην αδιάστατη μορφή

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \quad (\varepsilon_1)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \varrho(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \quad (\varepsilon_2)$$

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = -\frac{\varrho}{\tau_0} + \left\{\frac{A'}{A}\nu_2 + \varrho(\nu_2 - \nu_1)\right\}\frac{1}{\tau_0(1 - \tau_1)} \quad (\varepsilon_3)$$

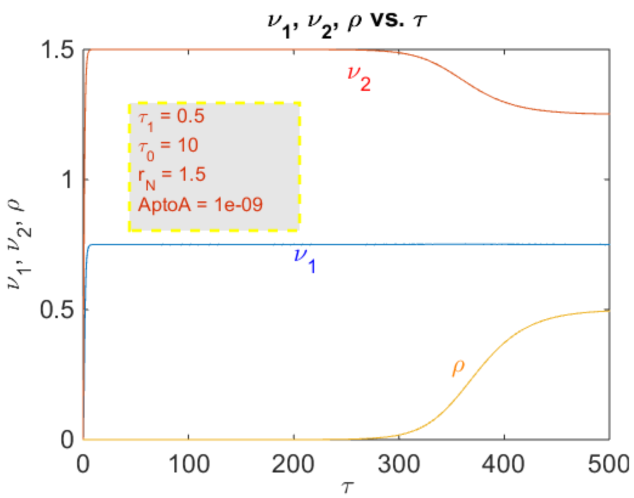
(α΄) Αποδείξτε ότι εάν $\frac{A'}{A} << 1$, τότε στη στάσιμη κατάσταση ισχύουν οι εξισώσεις

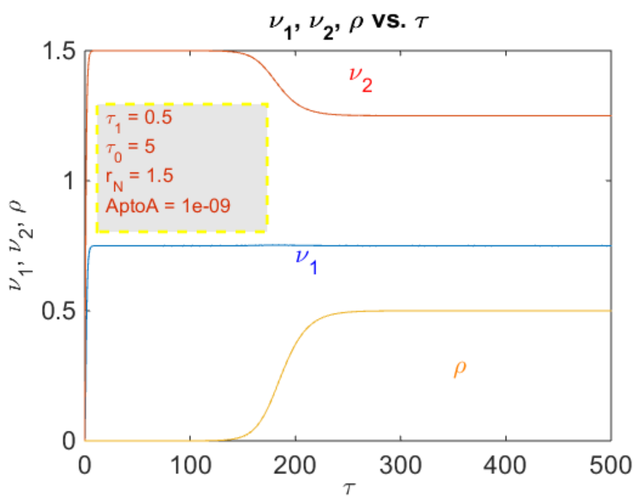
$$\nu_1 = \tau_1 r_N, \quad \forall\, r_N \quad (\Lambda_1'')$$

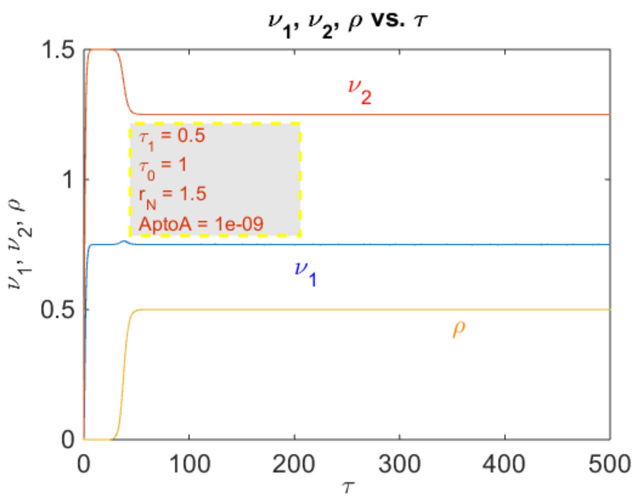
$$\nu_2 = \begin{cases} r_N, & \forall\, r_N < 1 \\ \tau_1 r_N + (1-\tau_1), & \forall\, r_N > 1 \end{cases} \quad (\Lambda_2'')$$

$$\varrho = \begin{cases} 0, & \forall\, r_N < 1 \\ r_N - 1, & \forall\, r_N > 1 \end{cases} \quad (\Lambda_3'')$$

Οι εικόνες παριστάνουν τη λύση των εξισώσεων (ε_1), (ε_2), (ε_3).
(β΄) Πόσος είναι ο λόγος των χρόνων ζωής των σταθμών 1 και 2;
(γ΄) Γιατί υπάρχει διαφορά στο χρόνο που χρειάζεται η ϱ για να γίνει αισθητή;
~~**(δ΄)**~~ Στην τελευταία εικόνα παρατηρούμε μια πρόσκαιρη μικρή αύξηση της ν_1 κατά την απότομη πτώση της ν_2 η οποία συνοδεύεται με απότομη αύξηση της ϱ. ~~Εξηγήστε γιατί το τοπικό αυτό ακρότατο της ν_1 ταυτίζεται με σημείο καμπής της ν_2.~~







ΘΕΜΑ 1

α') σπινορες: πινακες στήλης 2 συνιστωσών

$$|\ \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle, \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle$$

β') $\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\hat{S}_+|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ τιποτε $\quad \hat{S}_+|0\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_+|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ το ανεβάζει $\quad \hat{S}_+|1\rangle = |2\rangle$

$\hat{S}_+|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ το πετά έξω $\quad \hat{S}_+|2\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_+$ τελεστής αναβιβάσεως ηλεκτρονιων

$\hat{S}_-|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ τιποτε $\quad \hat{S}_-|0\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ το πετά έξω $\quad \hat{S}_-|1\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ το κατεβαζει $\quad \hat{S}_-|2\rangle = |1\rangle$

$\hat{S}_-$ τελεστής καταβιβάσεως ηλεκτρονιων

γ') $\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x$ αντιδιαγώνιος

$$\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{I}}$$

διαγώνιος

δ') $E_2\hat{S}_+\hat{S}_- + E_1\hat{S}_-\hat{S}_+ = E_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} = \hat{H}_{\Delta\Sigma}$ ... διότι

$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \end{pmatrix} = E_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{H}_{\Delta\Sigma}|1\rangle = E_1|1\rangle$ ← ιδιοτιμές

$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = E_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{H}_{\Delta\Sigma}|2\rangle = E_2|2\rangle$

ιδιοανύσματα

$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2\hat{S}_+\hat{S}_- + E_1\hat{S}_-\hat{S}_+$

θέτοντας $E_1 = 0$ επίπεδο αναφοράς

$E_2 - E_1 = \hbar\Omega$

$\Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-$$

ε') $\{\hat S_+, \hat S_+^\dagger\} = \{\hat S_+, \hat S_-\} = \hat S_+\hat S_- + \hat S_-\hat S_+ = \hat{\mathbb{I}}$

$\{\hat S_-, \hat S_-^\dagger\} = \{\hat S_-, \hat S_+\} = \hat S_-\hat S_+ + \hat S_+\hat S_- = \hat{\mathbb{I}}$

$\{\hat S_+, \hat S_+\} = \underset{\text{εναλλακτικά}}{\{\hat S_-^\dagger, \hat S_-^\dagger\}} = \hat S_+\hat S_+ + \hat S_+\hat S_+ = 2\hat S_+\hat S_+ = 2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = \hat 0$

$\{\hat S_-, \hat S_-\} = \{\hat S_+^\dagger, \hat S_+^\dagger\} = \hat S_-\hat S_- + \hat S_-\hat S_- = 2\hat S_-\hat S_- = 2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = \hat 0$

ς') $\{\hat\sigma_x, \hat\sigma_y\} = \hat\sigma_x\hat\sigma_y + \hat\sigma_y\hat\sigma_x = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix} = \hat 0$

ομοίως

$\{\hat\sigma_y, \hat\sigma_z\} = \hat 0 \quad , \quad \{\hat\sigma_z, \hat\sigma_x\} = \hat 0$

Δηλαδή οι πίνακες Pauli αντιμετατίθονται

ΘΕΜΑ 2) ν. Planck $\rho(\nu,T) = \dfrac{8\pi h}{c^3}\dfrac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}$ $\quad [\rho] = \dfrac{Js}{m^3} = \dfrac{J}{m^3 Hz}$

α') για την πυκνότητα ενέργειας $\mathcal{E}(T) := \displaystyle\int_0^\infty \rho(\nu,T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu$

$x := \dfrac{h\nu}{k_BT} \Rightarrow \nu = \dfrac{k_BTx}{h} \Rightarrow d\nu = \dfrac{k_BT}{h}dx$ $\quad\Rightarrow$

$$\mathcal{E}(T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{k_BT}{h}\frac{(k_BT)^3}{h^3}\underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx}_{\pi^4/15} \Rightarrow \mathcal{E}(T) = \frac{8\pi^5k_B^4}{15c^3h^3}\cdot T^4 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \alpha T^4}$$

1η μορφή ν. Stefan-Boltzmann

$\alpha = \dfrac{8\pi^5k_B^4}{15c^3h^3}$

β') $\Phi_\sigma = \dfrac{n}{4}\langle\upsilon\rangle$ ροή σωματιδίων $\quad [\Phi_\sigma] = \dfrac{1}{m^2 s}$

$\Rightarrow \Phi_\gamma = \dfrac{n}{4}c$ ροή φωτονίων $\quad [\Phi_\gamma] = \dfrac{1}{m^2\cdot s}$

$I = \langle h\nu\rangle\Phi_\gamma$ ένταση ακτινοβολίας $\quad [I] = \dfrac{J}{m^2\cdot s} = \dfrac{W}{m^2}$

$\langle h\nu\rangle = \dfrac{\mathcal{E}}{n} = \dfrac{\text{πυκνότητα ενέργειας}}{\text{πυκνότητα σωματιδίων}}$ $\quad [\langle h\nu\rangle] = \dfrac{J/m^3}{1/m^3} = J$

$I = \dfrac{\alpha T^4}{\cancel{n}}\dfrac{\cancel{n}}{4}c = \dfrac{\alpha c}{4}T^4$

$\Rightarrow \boxed{I = \sigma T^4}$ 2η μορφή ν. Stefan-Boltzmann

$\sigma = \dfrac{2\pi^5k_B^4}{15c^2h^3}$

γ') $\displaystyle\int_0^\infty \rho(\lambda,T)\,d\lambda := \int_0^\infty \rho(\nu,T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu = \frac{8\pi h\cancel{c^3}(-c)}{\cancel{c^3}}\int_\infty^0 \frac{1}{\lambda^3\lambda^2}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}\,d\lambda$

$c = \lambda\nu \Rightarrow \nu = \dfrac{c}{\lambda} \Rightarrow d\nu = \dfrac{-c}{\lambda^2}d\lambda$

$\displaystyle = 8\pi hc\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}\,d\lambda$

$$\Rightarrow \rho(\lambda,T) = 8\pi hc \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T}-1}$$

$$[\rho(\nu,T)][d\nu] = [\rho(\lambda,T)][d\lambda] \Rightarrow \frac{J}{m^3 \cancel{Hz}} \cancel{Hz} = [\rho(\lambda,T)]\, m \Rightarrow [\rho(\lambda,T)] = \frac{J}{m^4} = \frac{J}{m^3 \cdot m}$$

δ') έχει ήδη απαντηθεί κατά τη λύση των α', β', γ'.

ΘΕΜΑ 3

α') Αν $\frac{A'}{A} << 1$, τότε στη στάσιμη κατάσταση οι εξισώσεις $(\Sigma_1), (\Sigma_2), (\Sigma_3)$ γίνονται

$$0 = \nu_2 + \beta(\nu_2 - \nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \quad (1)$$

$$0 = r_N + \beta(\nu_1 - \nu_2) - \nu_2 \quad (2)$$

(1), (2) πρόσθεση κατά μέλη $\Rightarrow r_N = \frac{\nu_1}{\tau_1} \Rightarrow \boxed{\nu_1 = \tau_1 r_N \,, \ \forall r_N}$ $(\Lambda 1'')$

$$0 = -\frac{\beta}{\tau_0} + \beta(\nu_2 - \nu_1)\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)} \quad (3) \Rightarrow \text{για } \tau_0 \neq 0,\ \tau_1 \neq 1$$

$$\beta(1-\tau_1) = \beta(\nu_2 - \nu_1) \quad (4)$$

(2)(4) πρόσθεση κατά μέλη $\Rightarrow \beta(1-\tau_1) = r_N - \nu_2 \Rightarrow \beta = \frac{r_N - \nu_2}{1-\tau_1}$ (5)

αν $\underline{\beta = 0}$, τότε (2) $\Rightarrow \underline{\nu_2 = r_N}$ (6)

αν $\underline{\beta > 0}$, τότε (4) $\Rightarrow 1-\tau_1 = \nu_2 - \nu_1 \Rightarrow \nu_2 = \nu_1 + (1-\tau_1) \xrightarrow{(\Lambda 1'')} \nu_2 = \tau_1 r_N + (1-\tau_1)$ (7)

(5)(7) $\Rightarrow \beta = \frac{r_N - \tau_1 r_N - (1-\tau_1)}{(1-\tau_1)} \Rightarrow \underline{\beta = r_N - 1}$ (8)

άρα αν $\beta > 0 \Rightarrow r_N > 1$

Συνοψίζοντας

$$\boxed{\nu_2 = \begin{cases} r_N, & \forall r_N < 1 \\ \tau_1 r_N + (1-\tau_1), & \forall r_N > 1 \end{cases}} \quad (\Lambda 2'')$$

$$\boxed{\beta = \begin{cases} 0, & \forall r_N < 1 \\ r_N - 1, & \forall r_N > 1 \end{cases}} \quad (\Lambda 3'')$$

β') $\tau_1 = \frac{t_1}{t_2} = \frac{\text{χρόνος ζωής της 1}}{\text{χρόνος ζωής της 2}} = 0.5 = \frac{1}{2}$ σε όλες τις εικόνες γ')

Στις εικόνες αυτές αλλάζει το τ_0 (10 -> 5 -> 1).

Η επίδραση του τ_0 υπάρχει σε δύο όρους της (Ε3)

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \underbrace{-\frac{\rho}{\tau_0}}_{1\text{ος}} + \underbrace{\left\{\frac{A'}{A}\nu_2 + \rho(\nu_2-\nu_1)\right\}\frac{1}{\tau_0(1-\tau_1)}}_{2\text{ος}} \quad (\varepsilon_3)$$

Παρατηρούμε ότι όσο μειώνεται το τ_0, η ρ αρχίζει να γίνεται αισθητή νωρίτερα.
Αυτό συμβαίνει διότι για μικρούς χρόνους όπου ρ~0, κυριάρχος όρος στην (ε3) είναι ο $(A'/A)\nu_2(1/(\tau_0(1-\tau_1))$. Όταν το τ_0 μειώνεται, αυτός ο όρος μεγαλώνει και άρα η αύξηση του ρ αρχίζει να γίνεται αισθητή νωρίτερα.

Ας υπολογίσουμε τους συντελεστές των δύο αυτών όρων καθώς και το άθροισμά τους μόλις αρχίσει η ρ να γίνεται αισθητή, για διαφορετικές τιμές τους τ_0.

τ_0	$-\frac{1}{\tau_0}$	$\frac{(\nu_2-\nu_1)}{\tau_0(1-\tau_1)}$	άθροισμα
10	-0.1	$\frac{1.5-0.75}{10(1-0.5)}=\frac{3}{20}=0.15$	0.05
5	-0.2	$\frac{1.5-0.75}{5(1-0.5)}=0.3$	0.1
1	-1	$\frac{1.5-0.75}{1(1-0.5)}=1.5$	0.5

Δηλαδή αυξάνοντας το τ_0, το αλγεβρικό άθροισμα των όρων αυξάνεται ⇒ η ρ εξελίσσεται γρηγορότερα

δ) για να έχουμε τοπικό ακρότατο στη ν_1, θα πρέπει $\frac{d\nu_1}{d\tau}=0$, οπότε η (ε_1) γίνεται

$$0 = \nu_2 + \rho(\nu_2-\nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \Rightarrow -\nu_2 = \rho(\nu_2-\nu_1) - \frac{\nu_1}{\tau_1} \quad (*)$$

$$\frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \rho(\nu_1-\nu_2) - \nu_2 \quad (\varepsilon_2) \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N + \cancel{\rho(\nu_1-\nu_2)} + \cancel{\rho(\nu_2-\nu_1)} - \frac{\nu_1}{\tau_1}$$

$$\Rightarrow \frac{d\nu_2}{d\tau} = r_N - \frac{\nu_1}{\tau_1} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\nu_2}{d\tau^2} = -\frac{1}{\tau_1}\frac{d\nu_1}{d\tau}}$$

σημείο καμπής $\left\{\begin{array}{l} \text{αρνητικό} \\ 0 \\ \text{θετικό} \end{array}\right.$ $\quad$ $\begin{array}{l} \text{θετικό (λίγο πριν το τοπικό μέγιστο)} \\ 0 \quad \text{(στο τοπικό μέγιστο)} \\ \text{αρνητικό (λίγο μετά το τοπικό μέγιστο)} \end{array}$