Παράρτημα Α′

Ασκησεις

Α′.1 Ασκήσεις Κεφαλαίου 1: Εισαγωγή στη κβαντική φύση του φωτός.

Άσκηση 1. Συμβατικά στην περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος μακρινό υπέρυθρο (far infrared, FIR) έχουμε μήκος κύματος 25 μm $< \lambda <$ 1000 μm. Βρείτε σε τι x (Εξ. 1.10) αντιστοιχεί το FIR για θερμοκρασία (α′) 300 K δηλαδή περίπου για τη θερμοκρασία ενός ζώου, (β′) 6000 K δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ηλίου, (γ′) 6 K.

Άσκηση 2. Συμβατικά στην περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος υπεριώδες (ultraviolet, UV) έχουμε μήκη κύματος 10 nm $< \lambda <$ 400 nm. Βρείτε σε τι x (Εξ. 1.10) αντιστοιχεί το UV για θερμοκρασία (α′) 300 K δηλαδή περίπου για τη θερμοκρασία ενός ζώου, (β′) 6000 K δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ηλίου, (γ′) 6 K.

Άσκηση 3. Να εξεταστεί η συμπεριφορά του νόμου Planck στα εξής όρια: (α′) μηδενική συχνότητα, και (β′) άπειρη συχνότητα. Επίσης, να αποδειχθεί ότι (γ′) στις πολύ μικρές συχνότητες ταυτίζεται με το νόμο Rayleigh-Jeans, ενώ (δ′) στις πολύ μεγάλες συχνότητες ταυτίζεται με το νόμο Wien.

Λύση ασκήσεως 3.
Για $\nu \to 0 \Rightarrow x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \rho = \rho_0 \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^3}{e^x - 1} \right) = \rho_0 \lim_{x\to 0} \left(\frac{3x^2}{e^x} \right) = 0$$

β′

Για $\nu \to \infty \Rightarrow x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \rho = \rho_0 \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{e^x - 1} \right) \stackrel{\text{τελικά}}{=} \rho_0 \lim_{x\to\infty} \left(\frac{6}{e^x} \right) = 0$$

Για μικρές συχνότητες δηλαδή για μικρά x ($x \downarrow\downarrow$):

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots \tag{Α′.1}$$

δηλαδή

$$e^x - 1 = 1 + 1\frac{x}{1!} + 1\frac{x^2}{2!} + \cdots - 1 \approx x \quad \text{(1ης τάξεως προσέγγιση)}, \tag{Α′.2}$$

οπότε

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \simeq \rho_0 \frac{x^3}{x} = \rho_0 x^2 = \rho_{RJ}. \tag{Α′.3}$$

Για μεγάλες συχνότητες δηλαδή για μεγάλα x ($x \uparrow\uparrow$):

$$e^x - 1 \simeq e^x \Rightarrow \rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \simeq \rho_0 \frac{x^3}{e^x} = \rho_W \tag{Α′.4}$$

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι $\rho_W(\nu, T) \neq \rho_{RJ}(\nu, T)$ για μικρές και μεγάλες συχνότητες (δηλαδή για μικρά και μεγάλα x).

Λύση ασκήσεως 4.
Για μεγάλα x ($x \uparrow\uparrow$)

$$\lim_{x\to\infty} \rho_{RJ} = \rho_0 \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \neq \lim_{x\to\infty} \rho_W = \rho_0 \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0 \tag{Α′.5}$$

Για μικρά x ($x \downarrow\downarrow$), παρόλο που για $x \to 0$ και τα δύο μηδενίζονται

$$\lim_{x\to 0} \rho_{RJ} = \rho_0 \lim_{x\to 0} x^2 = 0 = \lim_{x\to 0} \rho_W = \rho_0 \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{e^x} = 0, \tag{Α′.6}$$

ωστόσο, παραμένουν άνισα. Πράγματι, με τη βοήθεια του αναπτύγματος

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots \tag{Α′.7}$$

διαπιστώνουμε ότι

$$e^x = 1 + 1\frac{x}{1!} + 1\frac{x^2}{2!} + \cdots \approx 1 + x \quad (\text{1ης τάξεως προσέγγιση}), \tag{Α′.8}$$

οπότε

$$\rho_W = \rho_0 \frac{x^3}{e^x} \approx \rho_0 \frac{x^3}{1+x} \neq \rho_0 x^2 = \rho_{RJ}. \tag{Α′.9}$$

Άσκηση 5. Αποδείξετε ότι η αντικατάσταση ενός ανύσματος θέσεως

$$\vec{r} \to -\vec{r} \tag{Α′.10}$$

ισοδυναμεί στις σφαιρικές συντεταγμένες με τις αντικαταστάσεις

$$\begin{aligned} r &\to \quad r \\ \theta &\to \quad \pi - \theta \\ \phi &\to \quad \pi + \phi \end{aligned} \tag{Α′.11}$$

Άσκηση 6. Η συνάρτηση Γ [63] είναι επέκταση σε πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς του παραγοντικού με το όρισμά του μετατοπισμένο κατά -1. Αποδεικνύεται τελικά ότι

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{για} \quad n = 1, 2, 3, ... \quad \textit{παραγοντική μορφή} \tag{Α′.12}$$

Η συνάρτηση Γ ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς εκτός από τους αρνητικούς ακεραίους και το μηδέν $(0, -1, -2, ...)$. Εάν ο μιγαδικός z έχει θετικό πραγματικό μέρος, $Real(z) > 0$, τότε ορίζεται από τη σχέση

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \textit{μορφή Euler} \tag{Α′.13}$$

Ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί σε όλους τους μιγαδικούς εκτός από τους μη θετικούς ακεραίους με τρόπο που δε μας ενδιαφέρει εδώ. Η συνάρτηση Γ χρησιμοποιείται κυρίως στις πιθανότητες και τη στατιστική. Ο συμβολισμός $\Gamma(z)$ οφείλεται στον Legendre. Υπάρχουν κι *άλλες μορφές*

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt \tag{A′.14}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 [\ln(1/t)]^{z-1} dt \tag{A′.15}$$

(α′) Ξεκινώντας από τη μορφή Euler, αποδείξτε ότι

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{A′.16}$$
$$\Gamma(1) = 1 \tag{A′.17}$$
$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{A′.18}$$
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \tag{A′.19}$$

Δίνεται το ολοκλήρωμα Gauss

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{A′.20}$$

(β′) Να αποδειχθεί ότι

$$I = \int_0^\infty e^{-\gamma r} r^n dr = \gamma^{-(n+1)} n! \tag{A′.21}$$

όπου $n = 1, 2, 3, ...$ και $\gamma > 0$.

Άσκηση 7. Ελέγξτε τα ακόλουθα [63,64]: (α') Θεωρώντας γνωστό ότι $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}|a|$, δείξτε ότι για $t > 0$, $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2(xt/2)}{x^2}dx = \frac{\pi t}{2}$. ($\beta'$) $e^{\pm i(\phi+\pi)} = -e^{\pm i\phi}$ (γ') $\int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi = 0$ (δ') Σε προσέγγιση πρώτης τάξεως $\sqrt{c+x} \approx \sqrt{c} + \frac{x}{2\sqrt{c}}$.

Λύση ασκήσεως 7.
Τα τρία πρώτα είναι πολύ απλά. Το ανάπτυγμα Taylor μια πραγματικής ή μιγαδικής συναρτήσεως $f(x)$, πραγματικής ή μιγαδικής μεταβλητής x, η οποία είναι απείρως παραγωγίσιμη σε ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό a είναι η δυναμοσειρά

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{A′.22}$$

όπου κατά τα γνωστά $n!$ είναι το παραγοντικό του n και $f^{(n)}(a)$ είναι η n-οστή παράγωγος της f στο σημείο a. Η μηδενικής τάξεως παράγωγος της f είναι εξ ορισμού η ίδια η f, $(x-a)^0 := 1$ και $0! := 1$. Για $a = 0$, η δυναμοσειρά καλείται και σειρά Maclaurin, δηλαδή

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \qquad (\text{Α}'.23)$$

Σε προσέγγιση πρώτης τάξεως

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x. \qquad (\text{Α}'.24)$$

Οπότε για την $f(x) = \sqrt{c+x}$, συνεπάγεται $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{c+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$, ενώ $f(0) = \sqrt{c}$. Άρα $f(x) \approx \sqrt{c} + \frac{x}{2\sqrt{c}}$.

Άσκηση 8. Για θερμοκρασία (α′) 300 K, (β′) 6000 K και (γ′) 6 K: Υπολογίστε το μήκος κύματος λ_Δ στο οποίο η πρόβλεψη του νόμου Rayleigh-Jeans ρ_{RJ} είναι διπλάσια από την πειραματική τιμή ρ την οποία εξηγεί ο νόμος Planck. Σε ποια περιοχή του ΗΜ φάσματος ανήκει το λ_Δ κάθε φορά;

Άσκηση 9. Υποθέστε ότι η ΗΜ ενέργεια ενός resonator ("ταλαντωτή") συχνότητας ν εντός της κοιλότητας μέλανος σώματος μπορεί να πάρει μόνο διακεκριμένες τιμές (είναι δηλαδή "κβαντισμένη") και μάλιστα ότι έχει τη μορφή

$$E_n = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (\text{Α}'.25)$$

αντί της μορφής $E_n = h\nu n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ που υπέθεσε ο Planck. Βρείτε πως διαφοροποιείται η πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα συχνότητας ΗΜ ακτινοβολίας μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία $\rho(\nu, T)$ (μονάδες $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m^3 Hz}}$) έναντι του νόμου του Planck (Εξ. 1.9).

Άσκηση 10. Υπολογίστε το λ_0 όπου παρουσιάζει μέγιστο ο νόμος του Planck $\rho(\lambda, T)$ θεωρώντας ότι μπορούν να προσεγγιστούν με μέλανα σώματα (1) το ανθρώπινο σώμα με θερμοκρασία $\theta \approx 36.6\ ^o$ C, (2) η φωτόσφαιρα του Ηλίου με 'ενεργό θερμοκρασία" $T \approx 5800$ K και (3) η "φωτόσφαιρα" του αστέρα Αλτάιρ με 'ενεργό θερμοκρασία" $T \approx 7000$ - 8500 K.

Απάντηση ασκήσεως 10. (1) ≈ 9355.2 nm ≈ 9.3552 μm δηλαδή στο υπέρυθρο (infrared, IR). (2) ≈ 500 nm δηλαδή στο πράσινο ενώ το κίτρινο είναι $\approx$ 570-590 nm. (3) ≈ 414 έως 341 nm δηλαδή ιώδες - υπεριώδες.

Άσκηση 11. Υποθέστε ότι αντί του νόμου του Planck $\rho(\lambda, T)$ της Εξ. 1.95 λείπει το -1 του παρονομαστή, δηλαδή έχουμε τον αντίστοιχο νόμο Wien. Αποδείξτε ότι τότε ο νόμος μετατοπίσεως του Wien θα ήταν $\lambda_0 T = \frac{hc}{5k_B}$.

Άσκηση 12. Για τα λ_0 και ν_0 των Εξ. 1.101 και 1.90, αποδείξτε ότι $\lambda_0\nu_0 \approx 0.568c$, ενώ αν αντί για το νόμο του Planck στη μορφή $\rho(\nu, T)$ και $\rho(\lambda, T)$ είχαμε τις αντίστοιχες εκφράσεις Wien δηλαδή έλειπε το -1 στον παρονομαστή, θα είχαμε $\lambda_0\nu_0 = \frac{3}{5}c$.

Άσκηση 13. Από την κατανομή του νόμου του Planck $\rho(\nu, T)$ να εξαχθεί η κατανομή $\rho(\omega, T)$ όπου $\omega = 2\pi\nu$ η κυκλική συχνότητα, δηλαδή να δειχθεί ότι

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_{\mathrm{B}} T}} - 1}. \tag{A′.26}$$

Άσκηση 14. Να αποδειχτούν οι Εξ. 1.59, 1.60, 1.61, καθώς και η Εξ. 1.62 που προκύπτουν με το χωρισμό των μεταβλητών x, y, z, εντός του $\vec{r}$. Οι αποδείξεις παραλήφθηκαν για λόγους συντομίας στο κυρίως κείμενο.

Απάντηση ασκήσεως 14. Χωρίζουμε τις μεταβλητές x, y, z, εντός του $\vec{r}$. Στην Εξ. 1.58

$$\nabla^2 \vec{E}_{\vec{r}} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_{\vec{r}} = \vec{0}$$

αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$\vec{E}_{\vec{r}}(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)\hat{e}$$

όπου το $\hat{e}$ ορίζει την πόλωση δηλαδή τον προσανατολισμό του $\vec{E}$. Οπότε

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}XYZ = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{g(y)} + \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{h(z)} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

Δηλαδή τρεις συναρτήσεις που εξαρτώνται από διαφορετικές μεταβλητές έχουν σταθερό άθροισμα, οπότε υποθέτουμε ότι κάθε μία από αυτές ισούται με μια σταθερά. Τις σταθερές αυτές τις ονομάζουμε $-k_x^2$, $-k_y^2$, $-k_z^2$, αντιστοίχως. Οπότε προκύπτει η Εξ. 1.62

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

αλλά και

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} \overset{\text{θέτουμε}}{=} -k_x^2 \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \overset{\text{θέτουμε}}{=} -k_y^2 \qquad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \overset{\text{θέτουμε}}{=} -k_z^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2X = 0 \qquad \frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2Y = 0 \qquad \frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2Z = 0$$

η΄

Άρα έχουμε λύσεις της μορφής

$$X(x) = A_1 \sin(k_x x) + B_1 \cos(k_x x) \quad \boxed{1}$$
$$Y(y) = A_2 \sin(k_y y) + B_2 \cos(k_y y) \quad \boxed{2}$$
$$Z(z) = A_3 \sin(k_z z) + B_3 \cos(k_z z) \quad \boxed{3}$$

Επομένως

$\vec{E}_{\vec{r}}(x, y, z) = (\hat{e}_x + \hat{e}_y + \hat{e}_z)$
$[A_1 \sin(k_x x) + B_1 \cos(k_x x)][A_2 \sin(k_y y) + B_2 \cos(k_y y)][A_3 \sin(k_z z) + B_3 \cos(k_z z)].$

Το $\hat{e}$ έχει γενικά τυχαίο προσανατολισμό, οπότε το αναλύσαμε σε συνιστώσες κατά τους άξονες x, y, z, δηλαδή $\hat{e} = \hat{e}_x + \hat{e}_y + \hat{e}_z$. Συνεπώς

το E_x θα είναι κάποιος πρώτος συνδυασμός των sin και cos που περιέχονται στις $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$
το E_y θα είναι κάποιος δεύτερος συνδυασμός των sin και cos που περιέχονται στις $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$
το E_z θα είναι κάποιος τρίτος συνδυασμός των sin και cos που περιέχονται στις $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$

Οι συνδυασμοί αυτοί θα πρέπει να είναι τέτοιοι ώστε

το E_x να μηδενίζεται για $y = 0$ και $z = 0$
το E_y να μηδενίζεται για $x = 0$ και $z = 0$
το E_z να μηδενίζεται για $x = 0$ και $y = 0$

οπότε προκύπτουν οι Εξ. 1.59, 1.60, 1.61.

$$E_x = E_{x0} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } y = 0 \text{ και } z = 0$$
$$E_y = E_{y0} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } z = 0$$
$$E_z = E_{z0} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{μηδενίζεται για } x = 0 \text{ και } y = 0$$

Άσκηση 15. Να αποδειχτεί η Εξ. 1.64 και οι Εξ. 1.65, 1.66, 1.67. Οι αποδείξεις παραλήφθηκαν για λόγους συντομίας στο κυρίως κείμενο.

Απάντηση ασκήσεως 15.

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(E_x,E_y,E_z)=0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \Rightarrow \\
&-E_{x0}k_x\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)e^{-i\omega t}+ \\
&-E_{y0}k_y\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)e^{-i\omega t}+ \\
&-E_{z0}k_z\sin(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)e^{-i\omega t}=0 \Rightarrow \\
&k_xE_{x0}+k_yE_{y0}+k_zE_{z0}=0, \text{που είναι η Εξ. 1.64.}
\end{aligned}$$

Από την (3η′) Εξίσωση Maxwell, $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix}
\hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\
\begin{array}{c}[E_{x0}\cos(k_x x)\\ \sin(k_y y)\sin(k_z z)]\end{array} & \begin{array}{c}[E_{y0}\cos(k_y y)\\ \sin(k_x x)\sin(k_z z)]\end{array} & \begin{array}{c}[E_{z0}\cos(k_z z)\\ \sin(k_x x)\sin(k_y y)]\end{array}
\end{vmatrix} e^{-i\omega t} = -\left(\frac{\partial B_x}{\partial t},\frac{\partial B_y}{\partial t},\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial B_x}{\partial t} &= [k_yE_{z0}\cos(k_z z)\sin(k_x x)\cos(k_y y)-k_zE_{y0}\cos(k_y y)\sin(k_x x)\cos(k_z z)]e^{-i\omega t}\Rightarrow \\
-\frac{\partial B_x}{\partial t} &= [k_yE_{z0}-k_zE_{y0}]\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)e^{-i\omega t}\Rightarrow \\
B_x &= \frac{[k_yE_{z0}-k_zE_{y0}]}{i\omega}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)e^{-i\omega t}\Rightarrow \\
B_x &= \frac{i}{\omega}[k_zE_{y0}-k_yE_{z0}]\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)e^{-i\omega t} \quad \text{που είναι η Εξ. 1.65.}
\end{aligned}$$

Ομοίως και για τις υπόλοιπες Εξ. 1.66 και 1.67. Με “δημιουργικό πνεύμα”, στη χρονική ολοκλήρωση, για $t=0$, θέσαμε $\vec{B}(0)=\vec{0}$.

ι΄

Άσκηση 16. Να ελεγθεί αν το $\vec{B}$ (Εξ. 1.65, 1.66, 1.67) ικανοποιεί την ΕΣΣ* στα τοιχώματα, αλλά και τι προκύπτει από τη (2η΄) Εξίσωση Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ και την (4η΄) Εξίσωση Maxwell, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.