

A'.3

Άσκηση 1. Θεωρήστε τις εξισώσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις Rabi μετά την Rotating Wave Approximation, RWA.

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t) \frac{iE_0\mathcal{P}}{2\hbar} e^{-i(\Omega-\omega)t} \quad (\text{A'.25})$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t) \frac{iE_0\mathcal{P}}{2\hbar} e^{i(\Omega-\omega)t} \quad (\text{A'.26})$$

Θέλουμε να λύσουμε τις Εξ.(A'.25)-(A'.26) με αρχικές συνθήκες $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$.

(α') Κάντε το μετασχηματισμό

$$C_1(t) = \mathcal{C}_1(t) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} \quad (\text{A'.27})$$

$$C_2(t) = \mathcal{C}_2(t) e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} \quad (\text{A'.28})$$

και αποδείξτε ότι προκύπτει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathcal{C}}_1(t) \\ \dot{\mathcal{C}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1(t) \\ \mathcal{C}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A'.29})$$

Ορίσαμε αποσυντονισμό (detuning) το $\Delta := \omega - \Omega$ και συχνότητα Rabi το $\Omega_R := \frac{E_0\mathcal{P}}{\hbar}$.

(β') Ορίστε το διάνυσμα

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1(t) \\ \mathcal{C}_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A'.30})$$

και τον πίνακα

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} = -i\mathcal{A} = -i \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A'.31})$$

οπότε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων γίνεται

$$\dot{\vec{x}}(t) = \tilde{\mathcal{A}}\vec{x}(t) \quad (\text{A'.32})$$

Δοκιμάστε λύσεις της μορφής

$$\vec{x}(t) = \vec{v}e^{\lambda t} \quad (\text{A'.33})$$

ι'

και αποδειξτε ότι εν τέλει έχουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (A'.34)$$

όπου $\tilde{\lambda} = -i\lambda$.

(γ') Λύστε το πρόβλημα για $\Delta = 0$.

(δ') Λύστε το πρόβλημα για $\Delta \neq 0$.

(ε') Συγκρίνετε το πλάτος και την περίοδο των ταλαντώσεων που προκύπτουν στις περιπτώσεις $\Delta = 0$ και $\Delta \neq 0$.