4. ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ-ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ

Μέχρι τώρα θεωρούσαμε ότι κατά την αλληλεπίδραση του ατόμου με την Η/Μ ακτινοβολία η ένταση της ακτινοβολίας παρέμενε σταθερή. Χωρίς αμφιβολία, το άτομο απορροφά ενέργεια (υπό μορφή φωτονίων) από το πεδίο καθώς επίσης του προσφέρει ενέργεια. Εάν το πεδίο είναι εξαιρετικά πυκνό (πολύ μεγάλος αριθμός φωτονίων στη μονάδα του όγκου) η αυξομείωση της έντασης του κατά τις ατομικές μεταπτώσεις θα μεταβάλλει ελάχιστα την ένταση του, ώστε αυτή να μπορεί να θεωρηθεί σταθερή. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση όμως, όπως στην περίπτωση στάσιμου Η/Μ κύματος σε κοιλότητα, θα πρέπει να μελετηθεί συγχρόνως με την κατάσταση του ατόμου και η κατάσταση του πεδίου κατά την αλληλεπίδραση. Διευκολύνει στην περίπτωση αυτή να εκφράζεται η κατάσταση του πεδίου με τη γλώσσα των φωτονίων. Το πρώτο βήμα για να επιτευχθεί αυτό είναι να βρεθεί μια έκφραση της Χαμιλτονιανής του πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού φωτονίων, αντί της γλώσσας που χρησιμοποιεί τα ανυσματικά μεγέθη της έντασης του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.

Έστω η κοιλότητα του σχήματος 7-1 & 7-2 μέσα στην οποία η Η/Μ ακτινοβολία, που διαδίδεται κατά τον άξονα της κοιλότητας (άξων z), προσκρούει και ανακλάται στα δύο κάτοπτρα (στις θέσεις $z=0$ & $z=L$) δημιουργώντας έτσι ένα στάσιμο κύμα. Η διάταξη των κατόπτρων επιτρέπει σε ορισμένα μόνο μήκη κύματος να αναπτυχθούν στην κοιλότητα που υπακούουν στη σχέση 5-21. Προκειμένου να εκφράσουμε τη Χαμιλτονιανή του πεδίου στην μορφή αρμονικού ταλαντωτή, λύνουμε τις εξισώσεις του

Maxwell που διέπουν την διάδοση της Η/Μ ακτινοβολίας. Από κει και πέρα θα είναι εύκολη η μετατροπή της στην γλώσσα των φωτονίων.

Αν εκφρασθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η μαγνητική μετατόπιση σαν Ε και Β, αντίστοιχα, οι εξισώσεις Maxwell, όταν δεν υπάρχουν φορτία στο χώρο, γράφονται

$$\begin{gathered}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t}=c^2\left(\nabla \wedge \underline{B}\right)\\ \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}=-\nabla \wedge \underline{E}\\ \nabla \cdot \underline{B}=0\\ \nabla \cdot \underline{E}=0\end{gathered} \qquad \textbf{(4.1)}$$

Η Η/Μ ακτινοβολία είναι πολωμένη και το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο γράφεται

$$\begin{gathered}\underline{E}=\hat{i}\,E_x\\ \underline{B}=\hat{j}B_y\end{gathered} \qquad \textbf{(4.2)}$$

ενώ οι συνοριακές συνθήκες επάνω στα κάτοπτρα επιβάλλουν στη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου τους περιορισμούς

$$E_x(0,t)=E_x(L,t)=0 \qquad \textbf{(4.3)}$$

Η E_x παράλληλα στην επιφάνεια του κατόπτρου είναι μηδέν διότι το υλικό του κατόπτρου είναι τέλειος αγωγός. Αν γινόταν κάποια στιγμή η συνιστώσα να μην είναι μηδέν, τότε η διαφορά δυναμικού που θα εμφανιζόταν στην επιφάνεια θα ανάγκαζε τα φορτία να μετακινηθούν. Αυτό όμως θα είχε σαν αποτέλεσμα να μηδενιστεί η διαφορά δυναμικού, δηλαδή η παράλληλη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου θα έπρεπε να ήταν μηδέν. Το μαγνητικό πεδίο εξάλλου, ανταλλάσσει την ενέργεια του με το ηλεκτρικό πεδίο όπως ένας ταλαντωτής ανταλλάσσει την ενέργεια του από κινητική σε δυναμική και το αντίθετο και παίρνει τη μέγιστη τιμή όπου η ηλεκτρική συνιστώσα γίνεται ελάχιστη. Σύμφωνα με τα πιο πάνω οι εξισώσεις του Maxwell (4-1) γράφονται

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\frac{\partial B_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.4)}$$

επειδή τα ανύσματα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι πολωμένα[2],

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \hat{i}E_x + \hat{j}0 + \hat{k}0 \\ \underline{B} &= \hat{i}0 + \hat{j}B_y + \hat{k}0 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.5)}$$

ενώ ισχύουν από τα εσωτερικά ανυσματικά γινόμενα

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \ \& \ \nabla \cdot \underline{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι οι συνιστώσες εκείνες του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου που επιζούν είναι συναρτήσεις των z και t, δηλαδή:

$$E_y, E_z, B_x, B_z = 0 \quad \& \quad E_x, B_z = f(z,t) \qquad \textbf{(4.6)}$$

Από τις εξισώσεις (4-4), απαλείφοντας διαδοχικά τις συνιστώσες, E_x & B_y προκύπτουν οι σχέσεις[3]

---

[2] και επειδή τα ανυσματικά εξωτερικά γινόμενα δίνονται από εκφράσεις της μορφής

$$\nabla \wedge \underline{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{κλπ}$$

[3] $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z}$ $\frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial z}$, διότι οι E_x & B_y είναι συνεχείς συναρτήσεις

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}&=0\\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}&=0\end{aligned} \quad \mathbf{(4.7)}$$

Οι (4-7) έχουν την μορφή εξίσωσης χορδής. Η λύση των εξισώσεων αυτών ακολουθεί τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών. Έστω ότι η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να χωριστεί σε γινόμενο δύο άλλων συναρτήσεων κάθε μίας από τις δύο μεταβλητές $E_x(z,t)=Z(z)G(t)$ ώστε η (4-7) να δίνει

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)}=\frac{\ddot{Z}(z)}{Z(z)}=-\kappa^2=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \quad \mathbf{(4.8)}$$

ή

$$\begin{aligned}\ddot{Z}+\kappa^2 Z&=0\\ \ddot{G}+\omega^2 G&=0\end{aligned} \quad \mathbf{(4.9)}$$

Οι (4-9) είναι εξισώσεις αρμονικού ταλαντωτή. Ας πάρουμε την πρώτη. Θα έχει λύση[4]

$$Z(z)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi l}{L}z\right) \quad \mathbf{(4.10)}$$

κάνοντας χρήση της συνθήκης ορθοκανονικότητας

$$\frac{1}{V}\int_V Z_l^* Z_{l'}dV=\delta_{ll'} \quad \mathbf{(4.11)}$$

Ο παράγων που αφορά την χρονική μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου, G(t), μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας αρμονικός ταλαντωτής ιδιοσυχνότητας ω. Σύμφωνα με το μηχανικό μοντέλο μπορούμε να θεωρήσουμε μία υποθετική

[4] εφόσον οι συνοριακές συνθήκες (4-3) οδηγούν στην $\kappa=\frac{l\pi}{L}$, $l=1,2,3\ldots$.

μάζα M_l σε μία θέση $q_l(t)$ η οποία εκτελεί αυτή την αρμονική ταλάντωση και που να αντιστοιχεί στην l τροπή ακτινοβολίας η οποία μπορεί να υποστηριχθεί στην κοιλότητα. Η δυναμική της ενέργεια αυτής της υποθετικής μάζας θα είναι $\frac{M_l \omega_l^2 q_l^2}{2}$. Θεωρώντας ότι η πυκνότητα ενέργειας που αντιστοιχεί στο ηλεκτρικό πεδίο $\varepsilon_0 G^2(t)/2$ της Η/Μ ακτινοβολίας (όπου ε_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού) ταυτίζεται με την πυκνότητα ενέργειας αυτής της υποθετικής μάζας (θα μπορούσαμε να την είχαμε ταυτίσει με την πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου), καταλήγουμε στις εκφράσεις

$$G(t) = \left(\frac{M_l \omega_l^2}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} q_l(t) \qquad \textbf{(4.12)}$$

και

$$E_x^l(z,t) = q_l(t) \left(\frac{2 M_l \omega_l^2}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi l}{L} z \right) \qquad \textbf{(4.13)}$$

Η συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου B_y υπολογίζεται από την $E_x(z,t)$ μέσα από την σχέση (4-4) και δεδομένου ότι το μαγνητικό πεδίο είναι μέγιστο όπου το ηλεκτρικό είναι ελάχιστο

$$B_y^l(z,t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^z E_x^l(z,t) dz + C = \frac{1}{c} \dot{q}(t) \left(\frac{2 M_l}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{\pi l}{L} z \right) \qquad \textbf{(4.14)}$$

Η Χαμιλτονιανή H_l της μιάς από τις δυνατές τροπές του Η/Μ πεδίου, και το αθροίσματος τους, Η, θα είναι επομένως:

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_l H_l, \ \mu\varepsilon \ H_l = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \left(E_l^2 + c^2 B_l^2\right) dV \\
H &= \sum_l \frac{1}{2}\left(M_l \dot{q}_l^2 + M_l {\omega_l}^2 q_l^2\right) = \sum_l \left(\frac{p_l^2}{2M_l} + \frac{M_l {\omega_l}^2 q_l^2}{2}\right)
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(4.15)}
$$

Η (4-15) είναι η χαρακτηριστική Χαμιλτονιανή ενός συστήματος αρμονικών ταλαντωτών με ιδιοτιμές

$$
E_n^l = \left(n_l + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_l \qquad \mathbf{(4.16)}
$$

που είναι ανεξάρτητη της αρχικά υποθετικής μάζας. Ο πρώτος προσθετέος στο δεξί μέλος της (4-15) αντιπροσωπεύει την κινητική ενέργεια του ταλαντωτή και αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο (γιατί έχει αρχικά υποτεθεί ότι προέρχεται από αυτό). Ο δεύτερος προσθετέος αντιπροσωπεύει τη δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή και αντιστοιχεί στο ηλεκτρικό πεδίο. Θα μπορούσε η αντιστοιχία αυτή να ήταν αντίστροφη, αν είχαμε κάνει αρχικά αυτή την υπόθεση.

4.1 Τελεστές καταστροφής και δημιουργίας, α και α⁺

Είναι τώρα εύκολο να κβαντωθεί η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το πεδίο αρκεί να εφαρμοστεί η αντιστοιχία τελεστών

$$
\boxed{\begin{aligned} q_l &\to q_l \\ p_l &\to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_l} \\ H_l &\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}} \qquad \mathbf{(4.17)}
$$

Το επόμενο βήμα είναι να εισαχθούν οι τελεστές α και α^+. Για λόγους ευκολίας αναφερόμαστε σε μία μόνο τροπή οπότε παραλείπεται ο δείκτης l. Οι τελεστές ορίζονται με τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} \alpha &= (2M\hbar\omega)^{-1/2}(M\omega q + ip) \\ a^+ &= (2M\hbar\omega)^{-1/2}(M\omega q - ip) \end{aligned} \quad \textbf{(4.18)}$$

και κάνουμε χρήση των αντιμεταθετικών ιδιοτήτων

$$\begin{aligned} &[\alpha, \alpha^+] = \alpha\alpha^+ - \alpha^+\alpha = 1 \\ &[q, p] = i\hbar \end{aligned} \quad \textbf{(4.19)}$$

Από τις σχέσεις (4-18) υπολογίζονται οι τελεστές θέσης και ορμής μέσα από τους τελεστές α και α^+

$$\boxed{\begin{aligned} q &= \left(\frac{\hbar}{2M\omega}\right)^{1/2}(\alpha^+ + \alpha) \\ p &= i\left(\frac{M\hbar\omega}{2}\right)^{1/2}(\alpha^+ - \alpha) \end{aligned}} \quad \textbf{(4.20)}$$

Με αντικατάσταση των (4-20) στην (4-15) για μία τροπή ακτινοβολίας, την οποία παραλείπουμε, η Χαμιλτονιανή του ελεύθερου πεδίου παίρνει τη κβαντισμένη της έκφραση

$$\boxed{H = \hbar\omega\left(\alpha^+\alpha + \frac{1}{2}\right)} \quad \textbf{(4.21)}$$

Οι τελεστές α και α^+ έχουν τις πιο κάτω ιδιότητες

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^{+}\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle, \quad \alpha\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle \\ \left|n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\alpha^{+}\right)^{n}\left|0\right\rangle, \quad \alpha\left|0\right\rangle = 0 \\ a^{+}\alpha\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle \end{array}\right. \qquad \textbf{(4.22)}$$

Οι ιδιοτιμές τις Χαμιλτονιανής δίνονται από την σχέση (4-16)

$$H\left|n\right\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\left|n\right\rangle \qquad \textbf{(4.23)}$$

όπου $\left|n\right\rangle$ παριστά την κατάσταση του Η/Μ πεδίου με n αριθμό φωτονίων. Την ονομάζουμε κατάσταση φωτονικών αριθμών. Τα $\left|n\right\rangle$ αποτελούν ένα πλήρες σύστημα βάσεων, $\left\langle n \mid m\right\rangle = \delta_{nm}$.

Με βάση τις (4-13) & (4-20) το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται

$$E_x(z,t) = \left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\left(\alpha^{+}+\alpha\right)\sin kz \;\; , k = \frac{\pi}{L} l \qquad \textbf{(4.24)}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η αναμενόμενη τιμή του τελεστή του ηλεκτρικού πεδίου ως προς τις καταστάσεις $\left|n\right\rangle$ είναι μηδέν

$$\left\langle n\right|E_x(z,t)\left|n\right\rangle = 0 \qquad \textbf{(4.25)}$$

ενώ η αναμενόμενη τιμή του τελεστή της έντασης θα είναι διάφορος του μηδενός

$$\left\langle n\right|E^{2}{}_{x}(z,t)\left|n\right\rangle \neq 0 \qquad \textbf{(4.26)}$$

Η (4-26) υποδηλώνει ότι υπάρχουν διαταραχές του ηλεκτρικού πεδίου. Οι διαταραχές αυτές που αντιστοιχούν στην ενέργεια μηδενικού σημείου $\frac{\hbar\omega}{2}$ της σχέσης (4-23), θεωρούνται η αιτία που προκαλεί την αυθόρμητη εκπομπή στο διεγερμένο άτομο, όπως θα αναφερθεί στο εδάφιο 4.6.

4.2. Υπολογισμός της Χαμιλτονιανής δισταθμικού ατόμου μέσα από σπινοριακούς αναστροφείς S και S^+

Σε ένα δισταθμικό ατομικό σύστημα οι καταστάσεις με μικρότερη και μεγαλύτερη ενέργεια, αντίστοιχα, παρίστανται με τα δυδιάστατα ανύσματα[5]

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4.27)}$$

Οι σπινοριακοί τελεστές[6]

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad S^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4.28)}$$

έχουν την ιδιότητα να ανυψώνουν και κατεβάζουν τις καταστάσεις του δισταθμικού ατόμου

$$S\,|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \quad \text{και} \quad S^+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \qquad \textbf{(4.29)}$$

ενώ

$$S|\downarrow\rangle = 0 \quad S^+|\uparrow\rangle = 0 \qquad \textbf{(4.30)}$$

με άθροισμα

$$S^+ + S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4.31)}$$

και γινόμενο

---

[5] Είτε και αντίστροφα όπως αναφέρεται στην [2].

[6] Από συνδυασμούς των σπινοριακών πινάκων του Pauli, σ_x, σ_y και υπακούουν την αγκύλη Poisson : $\{S^+, S\} = S^+S + SS^+ = 1$

$$S^+ S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

Τα ιδιοανύσματα του τελεστή S^+ S είναι τα $\left|\downarrow\right\rangle$ & $\left|\uparrow\right\rangle$ με ιδιοτιμές 0 και 1

$$\begin{aligned} S^+ S\left|\uparrow\right\rangle &= 1\left|\uparrow\right\rangle \\ S^+ S\left|\downarrow\right\rangle &= 0\left|\downarrow\right\rangle \end{aligned} \tag{4.33}$$

Το δισταθμικό άτομο έχει ιδιοκαταστάσεις με ενέργεια E_1 και E_2, με $E_1 < E_2$ και ο πίνακας που παριστά την Χαμιλτονιανή γράφεται

$$H_{ατομ} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1 + \hbar\Omega \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

επειδή $E_2 - E_1 = \hbar\Omega$

Αν μετράμε την E_2 με αναφορά την E_1 μπορούμε να θέσουμε E_1=0 και η (4-34) γίνεται

$$H_{ατομ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\Omega \end{pmatrix} = \hbar\Omega \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

ή λόγω της (4-32)

$$\boxed{H_{ατομ} = \hbar\Omega S^+ S} \tag{4.36}$$

4.3. Η Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης ατόμου και πεδίου

Θεωρούμε ότι η αλληλεπίδραση ανάμεσα στο πεδίο και το δισταθμικό άτομο γίνεται με μηχανισμό ηλεκτρικού δίπολου. Άλλοι μηχανισμοί αλληλεπίδρασης είναι δυνατόν να συμβούν (ηλεκτρικού τετραπόλου ή μαγνητικού δίπολου) αλλά έχουν μικρότερες πιθανότητες.

Η ενέργεια του ατομικού ηλεκτρικού δίπολου P μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο E είναι $-P \cdot E$ και επομένως η Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης ακτινοβολίας με δισταθμικό άτομο στη μορφή πίνακα (δες αντίστοιχες εκφράσεις στις 3-9, 3-18 και 5-11) στο μοντέλο ηλεκτρικού δίπολου θα είναι για πολωμένο πεδίο μέσα από την 4-13

$$H_{\alpha\lambda\lambda} = -eE_x(z,t)x_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -ex_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} q(t)\left(\frac{2M\omega^2}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin(kz) \quad \textbf{(4.37)}$$

Αντικαθιστώντας το q της (4-20) στην (4-37)

$$H_{\alpha\lambda\lambda} = -ex_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\alpha^+ + \alpha\right)\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin(kz) \quad \textbf{(4.38)}$$

ή από την 4-31

$$H_{\alpha\lambda\lambda} = \hbar g\left(S^+ + S\right)\left(\alpha^+ + \alpha\right) \quad \textbf{(4.39)}$$

με

$$\hbar g = -ex_{12}\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin(kz) \quad \textbf{(4.40)}$$

Η συνολική Χαμιλτονιανή, επομένως, του ατομικού συστήματος και πεδίου θα είναι από τον συνδυασμό των (4-39), (4-36) και (4-21) παραλείποντας την ενέργεια μηδενικού πεδίου

$$\boxed{H = \hbar\omega\alpha^+\alpha + \hbar\Omega S^+ S + \hbar g\left(S^+ + S\right)\left(\alpha^+ + \alpha\right)} \quad \textbf{(4.41)}$$

4.4. Προσέγγιση Rabi

Η Χαμιλτονιανή (4-41) μπορεί να απλοποιηθεί με τη βοήθεια της προσέγγισης Rabi[7]. Ο τελευταίος της προσθετέος αναλύεται στους όρους

$$\left(S^{+}+S\right)\left(a^{+}+a\right)=S^{+}a^{+}+S^{+}a+Sa^{+}+Sa \qquad \textbf{(4.42)}$$

Από τους τέσσερις προσθετέους του δεύτερου μέλους της (4-42) είναι δυνατόν να παραληφθούν ο πρώτος και ο τελευταίος διότι δεν έχουν φυσική σημασία στο συγκεκριμένο πρόβλημα της αλληλεπίδρασης δισταθμικού ατόμου με Η/Μ ακτινοβολία. Έστω ότι αρχικά το σύστημα βρίσκεται στη θεμελιώδη κατάσταση $\left|\downarrow,n\right\rangle$ (ή τη διεγερμένη $\left|\uparrow,n\right\rangle$) και το πεδίο έχει n φωτόνια. Αν επιδράσουν επάνω τους οι δύο τελεστές αυτοί θα προκύψουν νέες καταστάσεις χωρίς λογική υπόσταση, δηλαδή

$$\begin{aligned} S^{+}a^{+}\left|\downarrow,n\right\rangle &= \sqrt{n+1}\left|\uparrow,n+1\right\rangle \quad (A) \\ Sa\left|\uparrow,n\right\rangle &= \sqrt{n}\left|\downarrow,n-1\right\rangle \quad (B) \end{aligned} \qquad \textbf{(4.43)}$$

δηλαδή στην (Α) το σύστημα απορροφά ένα φωτόνιο από το πεδίο και διεγείρεται ενώ ο αριθμός των φωτονίων αυξάνεται κατά ένα! Στην (Β) περίπτωση ενώ το σύστημα αποδιεγείρεται εκπέμποντας ένα φωτόνιο το πεδίο συγχρόνως χάνει ένα φωτόνιο! Τα άλλα δύο απομένοντα γινόμενα τελεστών δίνουν συμβατά αποτελέσματα

$$\begin{aligned} Sa^{+}\left|\uparrow,n\right\rangle &= \sqrt{n+1}\left|\downarrow,n+1\right\rangle \\ S^{+}a\left|\downarrow,n\right\rangle &= \sqrt{n}\left|\uparrow,n-1\right\rangle \end{aligned} \qquad \textbf{(4.44)}$$

Η Χαμιλτονιανή με τη προσέγγιση Rabi θα είναι επομένως

[7] Isidor Isaac Rabi 1898-1988. Γεννηθείς στην Αυστρία, εργάσθηκε στο Columbia University, ΗΠΑ και επίσης συνεργάσθηκε στην Ευρώπη με τους Sommerfeld, Bohr, Pauli, Stern, Heisenberg.

$$H_R = \hbar\Omega S^+ S + \hbar\omega a^+ a + \hbar g\left(S^+ a + S a^+\right) \qquad \textbf{(4.45)}$$

Με τη προσέγγιση Rabi απλοποιούνται τα βήματα για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων ατομικής μετάβασης που αποτελεί τον σκοπό αυτού του κεφαλαίου. Τώρα η Χαμιλτονιανή θα εκφράζεται μέσα από σπινοριακούς τελεστές και τελεστές δημιουργίας και καταστροφής μετά από την κβάντωση του πεδίου που εισαγάγαμε στο κεφάλαιο αυτό. Με αυτό το μοντέλο δισταθμικού ατόμου δεν γίνεται αναφορά σε μεταπτώσεις προς άλλες καταστάσεις. Σε αυτή τη περίπτωση θα αναφερθούμε στο κεφάλαιο 6.

4.5. Υπολογισμός της πιθανότητας απορρόφησης φωτονίου

Το σύστημα βρίσκεται αρχικά στη θεμελιώδη κατάσταση $\left|\downarrow, n\right\rangle$ και αλληλεπιδρά με πεδίο n φωτονίων. Οι δυνατές καταστάσεις ατόμου – πεδίου είναι δύο: είτε αδιέγερτο άτομο – αριθμός φωτονίων n, είτε διεγερμένο άτομο – αριθμός φωτονίων (n – 1)

$$\left|\Psi(t)\right\rangle = C_1(t)\left|\downarrow, n\right\rangle + C_2(t)\left|\uparrow, n-1\right\rangle \qquad \textbf{(4.46)}$$

με αρχικές συνθήκες

$$C_1(0) = 1 \quad \& \quad C_2(0) = 0 \qquad \textbf{(4.47)}$$

Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε, τους συντελεστές $C(t)$ & $C_2(t)$, την αναμενόμενη τιμή των τελεστών που προσδιορίζουν τον φωτονικό αριθμό,

$\left\langle a^{+}a\right\rangle$ και τις ατομικές μεταπτώσεις, $\left\langle SS^{+}\right\rangle$. Οι εκφράσεις των $\left\langle a^{+}a\right\rangle$ και $\left\langle SS^{+}\right\rangle$ υπολογίζονται ως εξής, βλέπε άσκηση 4-2

$$\begin{cases} \left\langle a^{+}a\right\rangle = \langle \Psi(t)|a^{+}a|\,\Psi(t)\rangle \\ \\ \left\langle S^{+}S\right\rangle = \langle \Psi(t)|S^{+}S|\,\Psi(t)\rangle \end{cases} \tag{4.48}$$

και

$$\begin{aligned} \left\langle a^{+}a\right\rangle &= n - |C_2|^2 \\ \left\langle S^{+}S\right\rangle &= |C_2|^2 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Όπως δείχνει η 4-49, επαληθεύεται η αρχή της διατήρησης της ενέργειας

$$\left\langle a^{+}a\right\rangle + \left\langle S^{+}S\right\rangle = n \tag{4.50}$$

Η πιθανότητα απορρόφησης $|C_2|^2$ υπολογίζεται από την λύση της εξίσωσης του Schrödinger (3-10) με βάση τις αρχικές συνθήκες (4-47) και εφαρμογή της Χαμιλτονιανής Rabi (4-45). Προκύπτει το σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\omega & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \Omega-\omega+n\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

Ορίζεται ως συχνότητα Rabi Ω_n

$$\Omega_n = \sqrt{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2 n} \tag{4.52}$$

Η συχνότητα Rabi δίνει ένα μέτρο της έντασης αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο ηλεκτρικό πεδίο και στην ατομική μετάπτωση. Ακολουθώντας τα βήματα που αναφέρονται στο παράρτημα (7-1) και με εφαρμογή των αρχικών συνθηκών η λύση των εξισώσεων αυτών βρίσκεται να είναι

$$
\begin{aligned}
C_1(t) &= e^{-i\left[n\omega+\frac{\Omega-\omega}{2}\right]t}\left\{\cos(\Omega_n t)+i\frac{\Omega-\omega}{2\Omega_n}\sin(\Omega_n t)\right\} \\
C_2(t) &= e^{-i\left[n\omega+\frac{\Omega-\omega}{2}\right]t}\left\{-i\frac{g\sqrt{n}}{\Omega_n}\sin(\Omega_n t)\right\}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.53)}
$$

Από την (4-53) η πιθανότητα απορρόφησης υπολογίζεται ίση με

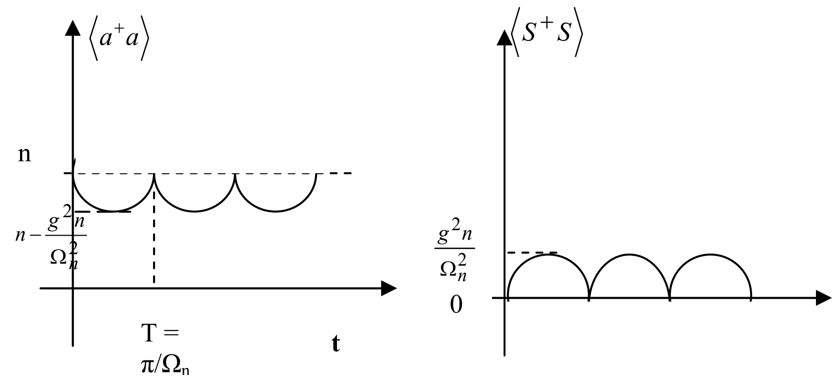
$$
\boxed{|C_2|^2 = \frac{g^2 n}{\Omega_n^2}\sin^2(\Omega_n t)} \qquad \textbf{(4.54)}
$$

Συνεπώς οι αναμενόμενες τιμές των τελεστών θα είναι

$$
\left\langle a^+ a\right\rangle_t = n - \frac{g^2 n}{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2 n}\sin^2(\Omega_n t) \qquad \textbf{(4.55)}
$$

$$
\left\langle S^+ S\right\rangle_t = \frac{g^2 n}{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2 n}\sin^2(\Omega_n t) \qquad \textbf{(4.56)}
$$

Η χρονική εξέλιξη των αναμενόμενων τιμών των φωτονικών αριθμών και ατομικών μεταπτώσεων παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 4-1. Μέσα σε χρόνο Τ/2 ($=\pi/2\Omega_n$) η πιθανότητα να απορροφηθεί το φωτόνιο γίνεται μέγιστη. Εάν το σύστημα είναι μακριά από τον συντονισμό, $\Omega \neq \omega$, η μέγιστη τιμή της πιθανότητας είναι $\frac{g^2 n}{\Omega_n^2}$, μικρότερη της μονάδας. Στο συντονισμό , $\Omega = \omega$, η μέγιστη τιμή της πιθανότητας απορρόφησης γίνεται ίση με τη μονάδα, η αναμενόμενη τιμή των φωτονικών αριθμών είναι n-1 ενώ το ατομικό σύστημα μεταβαίνει από τη κατάσταση 0 στη 1. Είναι επομένως φανερό ότι η συχνότητα Rabi προσδιορίζει τον χρόνο μέσα στον οποίο θα πραγματοποιηθεί εξαναγκασμένη μετάπτωση και τη πιθανότητα να συμβεί αυτό. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως δίνει ένα μέτρο της έντασης αλληλεπίδρασης ανάμεσα στο ηλεκτρικό πεδίο και στην ατομική μετάπτωση.



Σχήμα 4-1 Χρονική εξέλιξη των αναμενόμενων των φωτονικών αριθμών και ατομικών μεταπτώσεων περίπτωση απορρόφησης φωτονίου

4.6 Υπολογισμός της πιθανότητας εκπομπής φωτονίου

Η διαδικασία ακολουθεί ανάλογα βήματα όπως και στον υπολογισμό της απορρόφησης φωτονίου. Στην αρχική κατάσταση το άτομο είναι διεγερμένο και ο αριθμός των φωτονίων στο πεδίο είναι n

$$|\Psi_2(0)\rangle = |\uparrow, n\rangle \quad \textbf{(4.57)}$$

Σε μια μετέπειτα χρονική στιγμή t η κατάσταση του συστήματος θα περιγράφεται από την

$$|\Psi(t)\rangle = C_1 |\downarrow, n+1\rangle + C_2 |\uparrow, n\rangle \quad \textbf{(4.58)}$$

όπου οι αρχικές συνθήκες επιβάλουν

$$C_1(0)=0 \quad \& \quad C_2(0)=1 \tag{4.59}$$

Η μέση τιμή του αριθμού φωτονίων και ατομικών μεταπτώσεων υπολογίζεται ανάλογα σε

$$\begin{aligned} \left\langle a^+ a \right\rangle_t &= n + |C_1|^2 \\ \left\langle S^+ S \right\rangle_t &= |C_2|^2 \end{aligned} \tag{4.60}$$

και επομένως[8]

$$\left\langle S^+ S \right\rangle_t + \left\langle a^+ a \right\rangle_t = n + 1 \tag{4.61}$$

δηλαδή μετά από την εκπομπή θα προστεθεί στα αρχικά n φωτόνια και άλλο ένα. Οι συντελεστές C_1 και C_2 υπολογίζονται να είναι

$$\begin{aligned} C_1(t) &= e^{-i\left[(n+1)\omega + \frac{\Omega-\omega}{2}\right]t}\left[-i\frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_{n+1}}\sin(\Omega_{n+1}t)\right] \\ C_2(t) &= e^{-i\left[(n+1)\omega + \frac{\Omega-\omega}{2}\right]t}\left[\cos(\Omega_{n+1}t) - i\frac{\Omega-\omega}{2\Omega_{n+1}}\sin(\Omega_{n+1}t)\right] \end{aligned} \tag{4.62}$$

και

$$\begin{aligned} |C_1|^2 &= \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2}\sin^2(\Omega_{n+1}t) \\ |C_2|^2 &= 1 - \frac{g^2(n+1)}{\Omega_{n+1}^2}\sin^2(\Omega_{n+1}t) \end{aligned} \tag{4.63}$$

όπου

$$\Omega_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2(n+1)} \tag{4.64}$$

[8] Επειδή $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$

Όταν ο αριθμός των φωτονίων είναι μηδέν, (n=0), η πιθανότητα αποδιέγερσης, έτσι όπως υπολογίσθηκε στην (4-63), γίνεται

$$\left|C_1\right|^2 = \frac{g^2}{\Omega_1^2}\sin^2\left(\Omega_1 t\right) \qquad \textbf{(4.65)}$$

Απουσία Η/Μ πεδίου, (n=0), όπως αναφέρθηκε στο εδάφιο 4.1, σαν παράγων αλληλεπίδρασης, g, θεωρείται η αλληλεπίδραση με το ηλεκτρικό πεδίο που αντιστοιχεί στην ενέργεια μηδενικού πεδίου.

Στην επόμενη παράγραφο θα περιγραφεί μία τεχνική υπολογισμού πιθανοτήτων με τη βοήθεια του εξελικτικού τελεστή για τη Χαμιλτονιανή Rabi.

4.7 Ο εξελικτικός τελεστής για τη Χαμιλτονιανή Rabi

Η εξέλιξη της κυματικής συνάρτησης, $\Psi(x,t)$, συστήματος με Χαμιλτονιανή H , όταν αυτή τη στιγμή $t=0$ είναι

$$\Psi(x,0) = \Phi(x) \qquad \textbf{(4.66)}$$

ευρίσκεται από την επίλυση της εξισώσεως του Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi \qquad \textbf{(4.67)}$$

υπό την συνθήκη (4-66). Αυτό είναι το λεγόμενο πρόβλημα των αρχικών τιμών. Όταν η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου (όταν δηλαδή το σύστημα είναι διατηρητικό) η ζητούμενη λύση παίρνει τη μορφή:

$$\Psi(x,t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)\Phi(x) \qquad \textbf{(4.68)}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η (4-68) υπακούει τη δυναμική εξίσωση (4-67) του συστήματος και ότι κατά την αρχική στιγμή ταυτίζεται με τη δεδομένη κυματική συνάρτηση (4-66).

Ο εκθετικός τελεστής που προηγείται της αρχικής καταστάσεως, $\Phi(x)$, στην (4-68) έχει πάρει το όνομα εξελικτικός τελεστής. Με την επίδραση του στην αρχική κατάσταση οδηγούμαστε στην εξέλιξη της στο χρόνο. Η (4-68) μας παρέχει μία συνταγή για την εύρεση της ζητούμενης κυματικής συνάρτησης, όπως αυτή εξελίσσεται στο χρόνο. Αυτό γίνεται με χρήση, του αναπτύγματος του εξελικτικού τελεστή, δηλαδή

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) = \{1 + \frac{1}{1!}(-\frac{i}{\hbar}t)H + \frac{1}{2!}(-\frac{i}{\hbar}t)^2 H^2 + \\ + \frac{1}{3!}(-\frac{i}{\hbar}t)^3 H^3 + \frac{1}{4!}(-\frac{i}{\hbar}t)^4 H^4 + \cdots\}\Phi(x)\end{aligned} \qquad \textbf{(4.69)}$$

Για την εφαρμογής της (4-69) έχουμε μπροστά μας ένα φοβερά επίπονο έργο. Μας χρειάζονται τα αποτελέσματα των διαφόρων δυνάμεων του τελεστή H απάνω στην Φ. Για μικρούς χρόνους μπορούμε χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστικά τους πρώτους όρους του αναπτύγματος. Για μεγαλύτερους χρόνους θα πρέπει να πάμε βαθύτερα στο ανάπτυγμα και τα πράγματα δυσκολεύουν, διότι γενικά εμπλεκόμαστε σε απροσμέτρητη πολυπλοκότητα. Τα μαθηματικά, όμως, φτιάχτηκαν για την εξαγωγή πληροφορίας από τα πολύπλοκα. Αν έχουμε κάτι πολύπλοκο, ψάχνουμε για κανονικότητες τις οποίες εκμεταλλευόμενοι μπορούμε να καταλήξουμε σε κάτι χρησιμοποιήσιμο. Μια τέτοια απλοποίηση θα δούμε αμέσως παρακάτω με την Χαμιλτονιανή Rabi.

Η Χαμιλτονιανή Rabi έχει τη μορφή

$$H_R = \hbar\Omega S^+ S + \hbar\omega a^+ a + \hbar g(S^+ a + S a^+) \qquad \textbf{(4.70)}$$

Ως γνωστόν κατάλληλη βάση για έκφραση της (4-70) σε στοιχεία πίνακα είναι οι ατομικές-φωτονικές καταστάσεις

$$|s,n\rangle = |s\rangle|n\rangle \quad (s = \downarrow,\uparrow \ ; \ n = 0,1,2, \ \cdots) \qquad \textbf{(4.71)}$$

Η γενική κυματική κατάσταση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των (4-71)

$$|\Phi\rangle = \sum_{s,n} \varphi_{sn} |s,n\rangle \qquad \textbf{(4.72)}$$

Προκειμένου να βρούμε την εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος με Χαμιλτονιανή (4-70) αρκεί να γνωρίζουμε την εξέλιξη των διαφόρων καταστάσεων της βάσης, $|s,n\rangle$. Για το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι η (4-70) μπορεί να γραφτεί ως

$$H_R = H_0 + H_1 \qquad \textbf{(4.73)}$$

όπου

$$H_0 = \hbar\omega(S^+S + a^+a) + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \qquad \textbf{(4.74)}$$

$$H_1 = \hbar(\Omega - \omega)(S^+S - \frac{1}{2}) + \hbar g(S^+a + Sa^+) \qquad \textbf{(4.75)}$$

Ουσιαστικά για να σπάσουμε την (4-70) στα δύο συνθετικά της H_0 και H_1 προσθαφαιρούμε στη Χαμιλτονιανή Rabi τον τελεστή $\hbar(\Omega - \omega)(S^+S - \frac{1}{2})$. Το ξεχώρισμα της (4-70) σε H_0 και H_1 έγινε από τον D. F. Walls [5] και έχει το πλεονέκτημα ότι τα δύο κομμάτια της Χαμιλτονιανής αντιμετατίθενται , (4-76), και επιπλέον ότι η H_o είναι διαγώνια έναντι της βάσεως $\{ |s,n\rangle \}$.

Από το ότι

$$[H_0, H_1] = 0$$

(4.76)

έπεται ότι ο εξελικτικός τελεστής $U(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_R t)$ μπορεί να πάρει τις μορφές

$$U(t) = U_0(t) U_1(t) \qquad \textbf{(4.77)}$$

όπου

$$U_0(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_0 t) \ , \quad U_1(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar} H_1 t) \qquad \textbf{(4.78)}$$

Για το τμήμα της Χαμιλτονιανής H_0 οι συναρτήσεις βάσεως είναι ιδιοκαταστάσεις, δηλαδή

$$H_0 \left\{ \begin{array}{l} \left|\downarrow, n\right\rangle \\ \left|\uparrow, n\right\rangle \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \left[n\hbar\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] \left|\downarrow, n\right\rangle \\ \left[(n+1)\hbar\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] \left|\uparrow, n\right\rangle \end{array} \right. \qquad \textbf{(4.79)}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$f(H_o) \left\{ \begin{array}{l} \left|\downarrow, n\right\rangle \\ \left|\uparrow, n\right\rangle \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} f\left[n\hbar\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] \left|\downarrow, n\right\rangle \\ f\left[(n+1)\hbar\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] \left|\uparrow, n\right\rangle \end{array} \right. \qquad \textbf{(4.80)}$$

Έχουμε

$$U_o(t) \left\{ \begin{array}{l} \left|\downarrow, n\right\rangle \\ \left|\uparrow, n\right\rangle \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} e^{-i\left[n\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] t} \left|\downarrow, n\right\rangle \\ e^{-i\left[(n+1)\omega + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega) \right] t} \left|\uparrow, n\right\rangle \end{array} \right. \qquad \textbf{(4.81)}$$

Έτσι, λοιπόν, μας μένει να βρούμε την επίδραση του τελεστή $U_1(t)$ στις καταστάσεις $\left|s,n\right\rangle$ προκειμένου να έχουμε το πλήρες αποτέλεσμα του εξελικτικού τελεστή.

Το τμήμα της Χαμιλτονιανής H_1 δυστυχώς δεν είναι διαγώνιο, αλλά ευτυχώς το τετράγωνο του είναι και ισούται με

$$H_1^{\,2} = \hbar^2\left[\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2 + g^2\left(S^+S + a^+a\right)\right] = \hbar^2 G \qquad \textbf{(4.82)}$$

Παροτρύνεστε κάνοντας χρήση των μεταθετικών ιδιοτήτων των σπινοριακών τελεστών S^+,S και φωτονικών τελεστών α^+,α να δείξετε την (4-82). Με βάση την (4-82) δίνουμε μία εύχρηστη έκφραση για τον εξελικτικό τελεστή [1] με Χαμιλτονιανή H_1.

Έχουμε, τροποποιώντας το ανάπτυγμα του τελεστή $\exp[-iH_1 t/\hbar)$ ως

$$\begin{aligned} U_1(t) &= 1 - \frac{iH_1}{\hbar\sqrt{G}}\frac{1}{1!}\sqrt{G}t - \frac{1}{2!}\left(\sqrt{G}t\right)^2 + \frac{iH_1}{\hbar\sqrt{G}}\frac{1}{3!}\left(\sqrt{G}t\right)^3 + \\ &+ \frac{1}{4!}\left(\sqrt{G}t\right)^4 - \frac{iH_1}{\hbar\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}t\right)^5 - \cdots \end{aligned} \qquad \textbf{(4.83)}$$

Η σειρά την τελεστών H_1 και δυνάμεων του $\sqrt{G}$ δεν έχει σημασία δεδομένου ότι $G = H_1^{\,2}/\hbar^2$. Μαζεύοντας του άρτιους και περιττούς όρους ως προς $\sqrt{G}$ στην (4-83) λαμβάνουμε

$$U_1(t) = \cos\left(\sqrt{G}t\right) - \frac{iH_1}{\hbar\sqrt{G}}\sin\left(\sqrt{G}t\right) \qquad \textbf{(4.84)}$$

Η μορφή (4-84) επιτρέπει τώρα εύκολα την εύρεση του αποτελέσματος του τελεστή $U_1(t)$ στις καταστάσεις $\left|s,n\right\rangle$. Ως παράδειγμα θεωρούμε την περίπτωση $U_1(t)\left|\downarrow,n\right\rangle$ και παίρνουμ

$$U_1(t)\left|\downarrow,n\right\rangle=\left[\cos(\Omega_n t)+i\frac{\Omega-\omega}{2\Omega_n}\sin(\Omega_n t)\right]\left|\downarrow,n\right\rangle-i\frac{g\sqrt{n}}{\Omega_n}\sin(\Omega_n t)\left|\uparrow,n-1\right\rangle$$

(4.85)

όπου

$$\Omega_n=\sqrt{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2+g^2 n} \qquad \textbf{(4.86)}$$

είναι η γνώριμη μας συχνότητα Rabi. Αφήνουμε τώρα ως άσκηση να δείξετε το αποτέλεσμα.

$$U_1(t)\left|\uparrow,n\right\rangle=$$

$$=\left[\cos(\Omega_{n+1}t)-i\frac{\Omega-\omega}{2\Omega_{n+1}}\sin(\Omega_{n+1}t)\right]\left|\uparrow,n\right\rangle-i\frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_{n+1}}\sin(\Omega_{n+1}t)\left|\downarrow,n+1\right\rangle$$

(4.87)

Με τη βοήθεια του τύπου (4-87) σε συνδυασμό με τις (4-79) και (4-81) είμαστε τώρα σε θέση να γράψουμε το αποτέλεσμα του εξελικτικού τελεστή επί της καταστάσεως $\left|\downarrow,n\right\rangle$. Έχουμε

$$U(t)\left|\downarrow,n\right\rangle=$$

$$=\exp\left[-i\left(n\omega+\frac{\Omega-\omega}{2}\right)t\right]\left\{\begin{array}{l}\left[\cos\left(\Omega_n t\right)+i\dfrac{\Omega-\omega}{2\Omega_n}\sin\left(\Omega_n t\right)\right]\left|\downarrow,n\right\rangle\\ -i\dfrac{g\sqrt{n}}{\Omega_n}\sin\left(\Omega_n t\right)\left|\uparrow,n-1\right\rangle\end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.88)}$$

και η εξέλιξη της κατάστασης δισταθμικού ατόμου όταν αρχικά είναι διεγερμένο θα είναι

$$U(t)\left|\uparrow,n\right\rangle =$$

$$=\exp\left[-i\left((n+1)\omega+\frac{\Omega-\omega}{2}\right)t\right]\left\{\begin{array}{l}\left[\cos\left(\Omega_{n+1}\,t\right)-i\dfrac{\Omega-\omega}{2\Omega_{n+1}}\sin\left(\Omega_{n+1}\,t\right)\right]\left|\uparrow,n\right\rangle \\ -i\dfrac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_{n+1}}\sin\left(\Omega_{n+1}\,t\right)\left|\downarrow,n+1\right\rangle\end{array}\right\} \qquad \textbf{(4.89)}$$

Από τις 4-88 και 4-89 υπολογίζονται οι πιθανότητες απορρόφησης και εκπομπής φωτονίου, όπως προηγουμένως στις 4-53, 4-54, 4-62, 4-63 αυτή τη φορά όμως χωρίς τη λύση διαφορικών εξισώσεων. Η πιο πάνω τεχνική, όπως βλέπετε, παρακάμπτει το πρόβλημα των ιδιοτιμών και παρέχει την εξέλιξη οπουδήποτε γραμμικού συνδυασμού καταστάσεων της μορφής $\left|s,n\right\rangle$ που συνιστά και τη πιο γενική μορφή αρχικών καταστάσεων. Στην πράξη η κατάσταση ατόμου-φωτονίων είναι μείγμα καταστάσεων $\left|s,n\right\rangle$.

4.6. Ασκήσεις

Άσκηση 4-1

Θεωρείστε δισταθμικό άτομο σε κοιλότητα συντονισμού. Υποθέστε ότι το άτομο δέχεται την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου $\underline{E} = \hat{i}E_0(z)\cos\omega t$.

(α) Βρείτε την εξίσωση που διέπει τη κίνηση των πλατών C_1, C_2, στη κυματική συνάρτηση του ατόμου $\Psi(\underline{r},t) = C_1(t)u_1(\underline{r}) + C_2(t)u_2(\underline{r})$ στη μορφή $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = H'\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

όπου

$$H' = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_1+\hbar\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ex_{12} \\ -ex_{12} & 0 \end{pmatrix} E_0\cos\omega t .$$

Πάρτε $E_1=0$ και x_{12} πραγματικό και εκφράστε την πιο πάνω Χαμιλτονιανή χρησιμοποιώντας σπινοριακούς αναστροφείς S^+, S.

(β) Για τη πιο πάνω περίπτωση βρείτε τη Χαμιλτονιανή του συστήματος άτομο-μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας ω, στη μορφή

$$H = \hbar\omega\alpha^+\alpha + \hbar\Omega S^+ S + \hbar g\left(S + S^+\right)\left(\alpha + \alpha^+\right)$$

Ασκηση 4-2

Χρησιμοποιώντας ως βάση τις καταστάσεις ατόμου-φωτονίων $\left|\downarrow, n\right\rangle$, $\left|\uparrow, n\right\rangle$, n=0, 1, 2…, βρείτε τη κυματική συνάρτηση του κβαντισμένου συστήματος 'άτομο-μονοχρωματική ακτινοβολία' (στη προσέγγιση Rabi) υπό τις εξής αρχικές συνθήκες $\left|\Psi_1(0)\right\rangle = \left|\downarrow, n\right\rangle$, $\left|\Psi_2(0)\right\rangle = \left|\uparrow, n\right\rangle$. Υπολογίστε για τις περιπτώσεις αυτές την εξέλιξη των αναμενόμενων τιμών των φωτονικών αριθμών και των ατομικών ταλαντώσεων. Βρείτε τις αντίστοιχες πιθανότητες απορρόφησης και εκπομπής ενός φωτονίου.

Άσκηση 4-3

Θεωρείστε δισταθμικό άτομο σε κοιλότητα συντονισμού το οποίο δέχεται την επίδραση πολωμένου Η/Μ κύματος σε κατεύθυνση κάθετη στον άξονα της κοιλότητας. Χειριστείτε την επίδραση του Η/Μ κύματος ως διαταραχή στη δυναμική του ατόμου και δείξτε ότι η κβαντική πραγμάτευση αναδεικνύει αυτόματα την ύπαρξη αυθόρμητης εκπομπής. Υπολογίστε με βάση τα δεδομένα της συσκευής, τη θέση του ατόμου και πυκνότητα ακτινοβολίας, την πιθανότητα της προκαλούμενης και αυθόρμητης αποδιέγερσης του ατόμου.

Άσκηση 4-4

Η κυματική συνάρτηση του αρμονικού ταλαντωτή στη θεμελιώδη του κατάσταση είναι η (7-12). Βρείτε τη τιμή της έκφρασης $\alpha\Phi_0$ καθώς και την ενέργεια που αντιστοιχεί στη κυματική συνάρτηση $\alpha^{+}\,\Phi_0$ και ερμηνέψετε τα αποτελέσματα σας κάνοντας χρήση της γλώσσας με αριθμούς φωτονίων. Επαναλάβατε το ίδιο για την έκφραση $\dfrac{\alpha^{+2}}{\sqrt{2!}}\Phi_0$.