

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

7. Λύση γραμμικού ομογενούς συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων

Tο σύστημα του ενδιαφέροντος μας είναι το

$$\begin{aligned} i\dot{C}_1 - \Delta_1 C_1 &= GC_2 \\ i\dot{C}_2 - \Delta_2 C_2 &= GC_1 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$C_1 = e^{-i\lambda t} X, \quad C_2 = e^{-i\lambda t} Y \quad (7.2)$$

Εισάγουμε τις (7-2) στις (7-1)

$$\lambda X = \Delta_1 X + GY$$

$$\lambda Y = GX + \Delta_2 Y$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 - \lambda & G \\ G & \Delta_2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0 \quad (7.3)$$

Θέλουμε τα λ και X, Y για τα οποία λύνεται το αλγεβρικό σύστημα (7-3).

Το σύστημα είναι ομογενές και για να βρούμε λύση πέραν της μηδενικής θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να είναι μηδέν

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 - \lambda & G \\ G & \Delta_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (7.4)$$

Η (7-4) δίνει τα λ για τα οποία οι εκφράσεις (7-2) μπορούν να είναι λύσεις.

Έχουμε: $(\Delta_1 - \lambda)(\Delta_2 - \lambda) - G^2 = 0$ και

$$\lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{\sqrt{(\Delta_2 - \Delta_1)^2 + 4G^2}}{2} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \Omega_R \\ \lambda_2 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - \frac{\sqrt{(\Delta_2 - \Delta_1)^2 + 4G^2}}{2} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - \Omega_R \end{cases} \quad (7.5)$$

όπου Ω_R η συχνότητα Rabi. Θέλουμε και τα αντίστοιχα X και Y . Για την λύση λ_1 (ιδιοτιμή) πέστε X_1, Y_1 και για την λ_2 : X_2, Y_2 . Πάμε στις (7-3), π.χ. για $\lambda = \lambda_1$

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 - \lambda_1 & G \\ G & \Delta_2 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.6)$$

Μια και η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι μηδέν οι δύο εξισώσεις του συστήματος είναι συμβατές και για τον υπολογισμό επιλέγουμε όποια βολεύει καλύτερα. Παίρνουμε την πρώτη για $\lambda = \lambda_1$

$$(\Delta_1 - \lambda_1)X_1 + GY_1 = 0 \quad (7.7)$$

Η (7-7) είναι εξίσωση ευθείας και τα ζητούμενα X_1, Y_1 είναι οι συντεταγμένες των σημείων που την επαληθεύουν. Εκφράζουμε τα Y συναρτήσει των X .

$$Y_1 = \frac{\lambda_1 - \Delta_1}{G} X_1 \quad (7.8)$$

Ομοίως για την ιδιοτιμή λ_2 έχουμε για τα X, Y τη σχέση

$$Y_2 = \frac{\Delta_2 - \lambda_2}{G} X_2 \quad (7.9)$$

Επειδή το σύστημα (7-1) είναι γραμμικό το άθροισμα των δύο λύσεων που βρήκαμε είναι πάλι λύση και μάλιστα η πιο γενική. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned}
 C_1 &= e^{-i\lambda_1 t} X_1 + e^{-i\lambda_2 t} X_2 \\
 C_2 &= \frac{\lambda_1 - \Delta_1}{G} e^{-i\lambda_1 t} X_1 + \frac{\lambda_2 - \Delta_2}{G} e^{-i\lambda_2 t} X_2 \quad (7.10)
 \end{aligned}$$

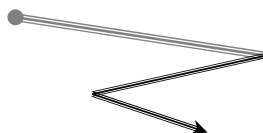
Η (7-10) είναι η γενική λύση γιατί περιέχει όλες τις αυθαίρετες σταθερές του προβλήματος οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν ώστε η λύση να προσαρμοστεί στις συνθήκες του προβλήματος.

Τα διανύσματα $\begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix}$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_j ($j=1,2$) λέγονται

ιδιοδιανύσματα. Αν ξέρω ένα από την κάθε λύση τα ξέρω όλα, διότι για την ίδια λύση το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Για τον υπολογισμό των σταθερών X_1 και X_2 εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες που αντιστοιχούν στο εκάστοτε πρόβλημα.

Άσκηση 7-1.1:

Δείξτε ότι δύο ιδιοδιανύσματα X_i, Y_i , που αντιστοιχούν σε διαφορετικές λύσεις είναι κάθετα μεταξύ τους.



8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. G. J. Papadopoulos. *Phys.Rev.* 37 2482 (1971)
2. M. Sargent III, M. O. Scully, W. E. Lamb Jr. *Laser Physics*, Addison-Wesley, London (1977)
3. O. Svelto. *Principles of Lasers*. Plenum Press, New York, (1982)
4. D R Tilley *Physics and Computing. The value of computers in undergraduate physics teaching.* *Phys. Bull.* 38, 456 (1985)
5. D. F. Walls, *J. Phys.* A4, 638 (1971)
6. F. Pallikari et al, *J. Sol-Gel Sci. & Tech.* 7, 203-209 (1996)
7. G. H. Wannier, *Statistical Physics*. Dover Publications Inc., New York (1966)
8. G. J. Papadopoulos, *Time dependent quantum tunneling. Group theoretical methods in Physics*, Proc. Moscow USSR, Springer-Verlag (1990)
9. W. Koechner, *Solid State Laser Engineering*, Springer Series in Optical Sciences
10. F. Viras and T.A.King. *On the Universality of Low Frequency Raman Scattering from Amorphous Solids' J.Non-Cryst. Solids*, 119, 65-74 (1990)
11. Einstein, *Phys. Z.* 18, 121 (1917)
12. A. Einstein, *Verh. Deutsch Phys. Ges.* 18, 318 (1916)
13. A. Einstein, *Mitt. Phys. Ges. Zürich*, 16, 47 (1916)
14. A. Einstein, *Phys.Zeitschr.*, 18, 121 (1917)
15. A. Einstein *Annalen der Physik*, 17, 132 (1905)
16. A. L. Schawlow, C. H. Townes, *Phys. Rev.* 112, 1940 (1958)
17. T. H. Maiman, *Nature*, 187, 493 (1960)
18. W. Javan, R. Bennet and R. Herriott, *Phys. Rev. Lett.* 6, 106 (1961)

19. K. Mendelsson. The Quest for Absolute Zero- the meaning of low temperature physics. Taylor & Francis Ltd, London (1977).
20. H. Kragh, Max Planck: The reluctant revolutionary. *Physics World*, 13 (12), (2000).
21. A. Pais. Subtle is the Lord. The Science and the Life of Albert Einstein. Oxford University Press, Oxford (1982)
22. A. Yariv, Introduction to Optical Electronics. Holt, Rinehart and Winston, New York, (1976)

Κβαντική Οπτική και Lasers.

Copyright© 2009, Γ.Ι. Παπαδοπουλος, Φ.Λ. Παλληκάρη,

ΕΚΠΑ Πανεπιστημιούπολη, Ζωγράφου 15784, Αθήνα

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή του έργου ή τμήματος του υπό οποιαδήποτε μορφή και οποιοδήποτε τρόπο χωρίς τη γραπτή άδεια των συγγραφέων.