Α′.1

Άσκηση 1. Συμβατικά στην περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος μακρινό υπέρυθρο (far infrared, FIR) έχουμε μήκος κύματος 25 μm $< \lambda <$ 1000 μm. Βρείτε σε τι x (Εξ. 1.9) αντιστοιχεί το FIR για θερμοκρασία (α′) 300 K δηλαδή περίπου για τη θερμοκρασία ενός ζώου, (β′) 6000 K δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ηλίου, (γ′) 6 K.

Άσκηση 2. Συμβατικά στην περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος υπεριώδες (ultraviolet, UV) έχουμε μήκη κύματος 10 nm $< \lambda <$ 400 nm. Βρείτε σε τι x (Εξ. 1.9) αντιστοιχεί το UV για θερμοκρασία (α′) 300 K δηλαδή περίπου για τη θερμοκρασία ενός ζώου, (β′) 6000 K δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ηλίου, (γ′) 6 K.

Άσκηση 3. Να εξεταστεί η συμπεριφορά του νόμου Planck στα εξής όρια: (α′) μηδενική συχνότητα, και (β′) άπειρη συχνότητα. Επίσης, να αποδειχθεί ότι (γ′) στις πολύ μικρές συχνότητες ταυτίζεται με το νόμο Rayleigh-Jeans, ενώ (δ′) στις πολύ μεγάλες συχνότητες ταυτίζεται με το νόμο Wien.

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι $\rho_W(\nu, T) \neq \rho_{RJ}(\nu, T)$ για μικρές και μεγάλες συχνότητες (δηλαδή για μικρά και μεγάλα x).

Άσκηση 5. Αποδείξετε ότι η αντικατάσταση ενός ανύσματος θέσεως

$$\vec{r} \to -\vec{r} \tag{Α′.1}$$

ισοδυναμεί στις σφαιρικές συντεταγμένες με τις αντικαταστάσεις

$$\begin{aligned} r \to & \quad r \\ \theta \to & \quad \pi - \theta \\ \phi \to & \quad \pi + \phi \end{aligned} \tag{Α′.2}$$

Άσκηση 6. Η συνάρτηση Γ [44] είναι επέκταση σε πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς του παραγοντικού με το όρισμά του μετατοπισμένο κατά -1. Αποδεικνύεται τελικά ότι

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{για} \quad n = 1, 2, 3, ... \quad \textit{παραγοντική μορφή} \tag{Α′.3}$$

β′

Η συνάρτηση Γ ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς εκτός από τους αρνητικούς ακεραίους και το μηδέν $(0, -1, -2, ...)$. Εάν ο μιγαδικός z έχει θετικό πραγματικό μέρος, $Real(z) > 0$, τότε ορίζεται από τη σχέση

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \textit{μορφή Euler} \tag{A′.4}$$

Ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί σε όλους τους μιγαδικούς εκτός από τους μη θετικούς ακεραίους με τρόπο που δε μας ενδιαφέρει εδώ. Η συνάρτηση Γ χρησιμοποιείται κυρίως στις πιθανότητες και τη στατιστική. Ο συμβολισμός $\Gamma(z)$ οφείλεται στον Legendre. Υπάρχουν κι *άλλες μορφές*

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt \tag{A′.5}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 [\ln(1/t)]^{z-1} dt \tag{A′.6}$$

(α′) Ξεκινώντας από τη μορφή Euler, αποδείξτε ότι

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{A′.7}$$
$$\Gamma(1) = 1 \tag{A′.8}$$
$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{A′.9}$$
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \tag{A′.10}$$

Δίνεται το ολοκλήρωμα Gauss

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{A′.11}$$

(β′) Να αποδειχθεί ότι

$$I = \int_0^\infty e^{-\gamma r} r^n dr = \gamma^{-(n+1)} n! \tag{A′.12}$$

όπου $n = 1, 2, 3, ...$ και $\gamma > 0$.

Άσκηση 7. Ελέγξτε τα ακόλουθα [44,45]: • Θεωρώντας γνωστό ότι $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}|a|$, δείξτε ότι για $t > 0$, $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2(xt/2)}{x^2}dx = \frac{\pi t}{2}$. • $e^{\pm i(\phi+\pi)} = -e^{\pm i\phi}$ • $\int_0^{2\pi} e^{i\phi} d\phi = 0$

γ′

- Σε προσέγγιση πρώτης τάξεως $\sqrt{c+x} \approx \sqrt{c} + \frac{x}{2\sqrt{c}}$.

Άσκηση 8. Για θερμοκρασία (α′) 300 K, (β′) 6000 K και (γ′) 6 K: Υπολογίστε το μήκος κύματος λ_Δ στο οποίο η πρόβλεψη του νόμου Rayleigh-Jeans ρ_{RJ} είναι διπλάσια από την πειραματική τιμή ρ την οποία εξηγεί ο νόμος Planck. Σε ποια περιοχή του ΗΜ φάσματος ανήκει το λ_Δ κάθε φορά;