Α′.2

Άσκηση 0. Ας υποθέσουμε ότι οι ‘ ταλαντωτές ’ του Planck δεν έχουν ενέργειες $E_n = h\nu n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, αλλά $E_n = h\nu(n + \frac{1}{2})$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ποιά μορφή πυκνότητας ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία, $\rho(\nu, T)d\nu$, προκύπτει;

Άσκηση 1. Από τις πιθανότητες (εξαναγκασμένης) απορροφήσεως, εξαναγκασμένης εκπομπής και αυθόρμητης εκπομπής, υπολογίστε τον τύπο Planck υποθέτοντας κατανομή Boltzmann με διαφορετικά στατιστικά βάρη και δισταθμικό άτομο σε θερμοδυναμική ισορροπία. Τι πρέπει να ισχύει μεταξύ των στατιστικών βαρών των δύο σταθμών g_1 και g_2 και των συντελεστών B_{12} και B_{21}; Ποιά σχέση προκύπτει μεταξύ A_{21} και B_{21};

Άσκηση 2. Ας συγκρίνουμε τις πιθανότητες αυθόρμητης εκπομπής και εξαναγκασμένης εκπομπής. Αν επιθυμούμε αυξημένη συνοχή χρειαζόμαστε μεγάλες ή μικρές συχνότητες, μεγάλες ή μικρές θερμοκρασίες; Κρίνοντας από τη σύγκριση των παραπάνω πιθανοτήτων είναι ευκολότερη η δημιουργία συνεκτικής δέσμης στα ραδιοκύματα ή στο υπέρυθρο;

Άσκηση 3. Έστω ότι επιθυμούμε η πιθανότητα αυθόρμητης εκπομπής να ισούται με την πιθανότητα εξαναγκασμένης εκπομπής. Σε τι θερμοκρασία είναι αυτό εφικτό στα FM ραδιοκύματα π.χ. σε συχνότητα 100 MHz και στο υπεριώδες π.χ. σε μήκος κύματος 200 nm;

Άσκηση 4. Το dalton (Da) ή η ενοποιημένη ατομική μονάδα μάζας (unified atomic mass unit), $u = 1.660538921(073) \times 10^{-27}$ kg, ορίζεται ως το 1/12 της μάζας του ατόμου του πιο κοινού ισοτόπου του άνθρακα ($^{12}_{6}$C). Ας θεωρήσουμε ότι αναφερόμαστε στο άτομο του $^{12}_{6}$C που έχει από 6 πρωτόνια, νετρόνια και ηλεκτρόνια. Δίνονται $m_p = 1.007276466812(090)\ u$, $m_n = 1.00866491600(43)\ u$, $m_e = 5.4857990946(0022)\ u$. Αν προσθέσουμε 6 m_p + 6 m_n + 6 m_e βρίσκουμε περίπου 12.099 u και όχι 12 u, πράγμα που οφείλεται στο ‘ έλλειμμα μάζας ’ δηλαδή στο ότι μέρος της μάζας ηρεμίας χρησιμοποιείται για να συνδεθούν τα πρωτόνια, νετρόνια, ηλεκτρόνια φτιάχνοντας το άτομο. Ας θεωρήσουμε την (εξαναγκασμένη) απορρόφηση και ας εστιάσουμε στη διατήρηση ενέργειας και ορμής. Σε ποια περιοχή μηκών κύματος, λ, η κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αρκετά μεγάλη (ας πούμε ίση με το ένα δέκατο της ενέργειας του φωτονίου που απορροφάται) ούτως ώστε να μη μπορούμε να την αγνοήσουμε στο ενεργειακό ισοζύγιο; Δίνονται $h = 6.62606957(29) \times 10^{-34}$ Js, $c = 2.99792458 \times 10^{8}$ m/s.

Άσκηση 5. Θεωρούμε συλλογή ατόμων υδρογόνου σε θερμοδυναμική ισορροπία και ότι οι ιδιοενέργειες κάθε ατόμου δίνονται από τη γνωστή σχέση Bohr $E_n \approx \frac{-13.6 \text{ eV}}{n^2}$. Υποθέστε ότι η θερμοκρασία είναι (α′) 4.2 K και (β′) 300 K. Δίνεται η σταθερά Boltzmann $k_B = 1.3806488(13) \times 10^{-23}$ JK^{-1} $= 8.6173324(78) \times 10^{-5}$ eV K^{-1}. (A) Συγκρίνετε τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται στην 1η τροχιά Bohr με τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται στη 2η τροχιά και συνεχίστε ανά ζεύγη έως την 5η τροχιά (ζεύγη 1η-2η, 2η-3η, 3η-4η, 4η-5η). (B) Συγκρίνετε τον αριθμό των ατόμων που μεταβαίνουν σε χρόνο dt από την 1η στη 2η τροχιά με εξαναγκασμένη διεργασία, $dN^{\text{εξ}}_{1\to 2}$, με τον αριθμό των ατόμων που μεταβαίνουν σε χρόνο dt από την 2η στην 1η τροχιά με εξαναγκασμένη διεργασία, $dN^{\text{εξ}}_{2\to 1}$, Συνεχίστε ανά ζεύγη έως την 5η τροχιά (ζεύγη 1η-2η, 2η-3η, 3η-4η, 4η-5η). Υποθέστε ότι $B_{12} = B_{21}$.

Άσκηση 6. Θεωρήστε μια κβαντική τελεία σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με εσωτερικό GaAs διαστάσεων $8 \times 4 \times 4$ nm και περίβλημα Al$_x$Ga$_{1-x}$As με μοριακό κλάσμα Al, x, τέτοιο ώστε η ασυνέχεια της ζώνης αγωγιμότητας μεταξύ των δύο υλικών να είναι $V_b = 224$ meV. Θεωρήστε κατά προσέγγιση την ενεργό μάζα στη ζώνη αγωγιμότητας ίση περίπου με αυτή του GaAs δηλαδή $m^* \approx 0.067 m_e$. (A) Πόσες ενεργειακές στάθμες έχει αυτή η κβαντική τελεία; Αν δεν μπορείτε να το αποδείξετε, θεωρείστε γνωστό ότι ένα κβαντικό φρέαρ εύρους L περιέχει $n(L) = 1 + \text{Int}\left[\sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}}\right]$ δέσμιες ενεργειακές καταστάσεις. Int(ξ) είναι το ακέραιο μέρος του ξ. (B) Σε τι μήκος κύματος αντιστοιχεί η μετάβαση από την θεμελιώδη στην πρώτη διεγερμένη στάθμη της εν λόγῳ κβαντικής τελείας; (Γ) Περαιτέρω, υποθέστε ότι έχουμε μια μεγάλη συλλογή από τέτοιες κβαντικές τελείες με ένα ηλεκτρόνιο στην κάθε μία και ότι η στατιστική Boltzmann με ίδια στατιστικά βάρη μπορεί να περιγράψει τον πληθυσμό των ενεργειακών σταθμών. Η θερμοκρασία ας είναι (α′) 4.2 K και (β′) 300 K. Συγκρίνετε τον αριθμό των κβαντικών τελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην θεμελιώδη στάθμη με τον αριθμό των κβαντικών τελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην 1η διεγερμένη στάθμη. (Δ) Έστω τώρα ότι όλη αυτή η συλλογή κβαντικών τελειών βρίσκεται εντός καταλλήλου ΗΜ πεδίου. Συγκρίνετε τον αριθμό των κβαντικών τελειών που μεταβαίνουν σε χρόνο dt από τη θεμελιώδη στην 1η διεγερμένη στάθμη με εξαναγκασμένη διεργασία, $dN^{\text{εξ}}_{1\to 2}$, με τον αριθμό των κβαντικών τελειών που μεταβαίνουν σε χρόνο dt από την 1η διεγερμένη στη θεμελιώδη στάθμη με εξαναγκασμένη διεργασία, $dN^{\text{εξ}}_{2\to 1}$. Δίνεται η ανηγμένη σταθερά Planck η′

$\hbar = 1.054571726(47) \times 10^{-34}$ Js, το στοιχειώδες φορτίο $e = 1.602176565(35) \times 10^{-19}$ C, η μάζα του ηλεκτρονίου $m_e = 9.10938291(40) \times 10^{-31}$ kg, η σταθερά Boltzmann $k_B = 1.3806488(13) \times 10^{-23}$ JK^{-1} $= 8.6173324(78) \times 10^{-5}$ eV K^{-1}.

Και γενικώς όποια σταθερά σας χρειάζεται, θεωρήστε την γνωστή.