Maxwell equations in terms of total charge and current

§1.6

§1.6 Εξισώσεις του Maxwell ως προς ολικό φορτίο κ ρεύμα. Συνοριακές συνθήκες σε διεπιφάνεια

θ. Gauss

$$\oint_{S=\partial V} \vec{\Delta}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\Delta}\, dV$$

θ. Stokes

$$\oint_{\ell=\partial S} \vec{\Delta}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{\Delta}\cdot d\vec{a}$$

differential form

integral form

ν. Gauss (ηλεκτρισμός) (1η)

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \int_V \frac{\rho\, dV}{\varepsilon_0} = \frac{q_{\text{εντός}V}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\Phi_{E,S=\partial V} = \oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{εντός}}}{\varepsilon_0}}$$

ν. Gauss (μαγνητισμό) (2η)

$$\boxed{\cdot\vec{B} = 0} \qquad \oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{\Phi_{B,S=\partial V} = \oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0}$$

ν. Faraday (επαγωγής) (3η)

$$\boxed{\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \qquad \oint_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_S -\frac{\partial B}{\partial t}\cdot d\vec{a} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{B,S} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{ΗΕΔ}} = \oint_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial\Phi_{B,S}}{\partial t}}$$

ν. Ampère κ διόρθωση Maxwell (4η)

$$\boxed{\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

$$\oint_{\ell=\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_S \left(\mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{a} = \int_S \mu_0\vec{J}\cdot d\vec{a} + \int_S \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{a} \Rightarrow$$

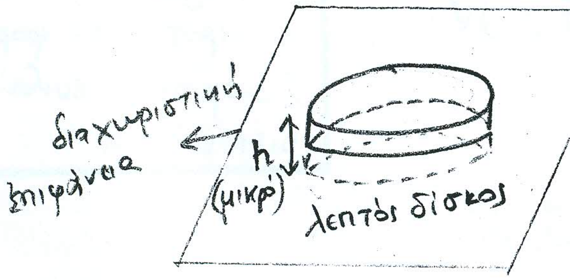
$$\boxed{\oint_{\ell=\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{διαπερνάς}} + \mu_0\varepsilon_0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{E,S}}_{I_{\text{μετατοπισεως}}}}$$

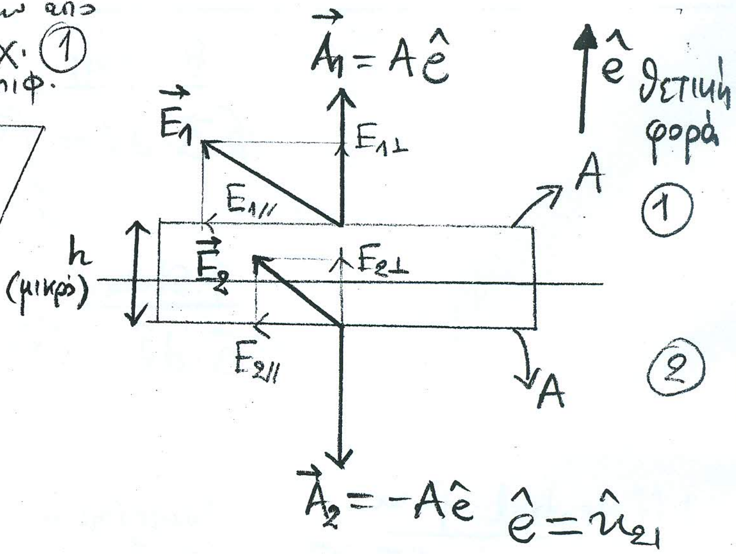
Συνοριακές Συνθήκες στη διεπιφάνεια

§1.6 ②

1η $\Phi_{E,S} = \oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_{εντός V}}{\varepsilon_0}$

πάνω από διαχ. ① επιφ.





κάτω από ② διαχ. επιφ

$\hat{e} = \hat{n}_{21}$

Jackson $\hat{n} = \hat{n}_{12}$

Άρα $\Phi_{E,\text{άνω κύκλου}} + \Phi_{E,\text{κάτω κύκλου}} + \Phi_{E,\text{παράπλευρη}} = \frac{q_{εντός}}{\varepsilon_0}$

$$A E_{1\perp} - A E_{2\perp} + \int_{A_{παράπλευρη}} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

Αλλά όταν $h \to 0 \Rightarrow A_{παράπλευρη} \to 0 \Rightarrow \int_{A_{παράπλευρη}} \vec{E}\cdot d\vec{a} \to 0$

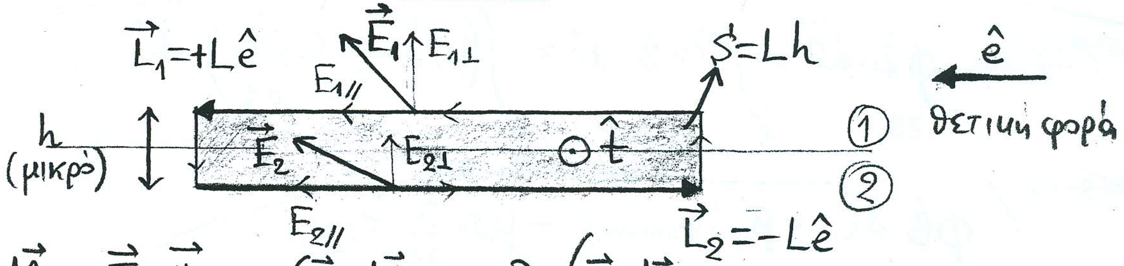
$$\Rightarrow \boxed{E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

και

αν $\sigma = 0$ $\boxed{E_{1\perp} = E_{2\perp}}$

2η $\Phi_{B,S} = \oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$ ΟΜΟΙΩΣ... $\boxed{B_{1\perp} = B_{2\perp}}$

η $\oint_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{B,S}$



Άρα $\vec{E}_1\cdot\vec{L}_1 + \int_{\substack{\text{μικρό}\\\text{αριστερό}\\\text{τμήμα h}}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \vec{E}_2\cdot\vec{L}_2 + \int_{\substack{\text{μικρό}\\\text{δεξί}\\\text{τμήμα h}}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}$

λλά όταν $h \to 0 \Rightarrow S = h\cdot L \to 0 \Rightarrow \int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} \to 0$

$h \to 0 \Rightarrow \int_{\text{μικρό αριστερό τμήμα}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0 = \int_{\text{μικρό δεξί τμήμα}} \vec{E}\, d\vec{\ell}$

$$\Rightarrow \vec{E}_1\cdot\vec{L}_1 + \vec{E}_2\cdot\vec{L}_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

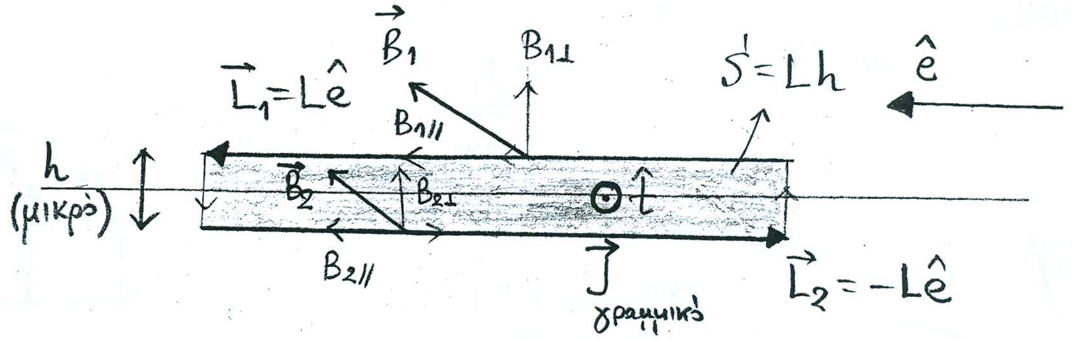
$$E_{1//}L - E_{2//}L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_{1//} = E_{2//}}$$

4η $\oint_{\ell=\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{διαπερνά } S} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{E,S}$

§1.6 ③



$\hat{t}$ Jackson

δηλαδή

$I_{\text{διαπερνά } S} = J_{\substack{\text{γραμμικό} \\ \text{διαπ.} S}} \cdot L$

A $\qquad \frac{A}{m} \qquad m$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{B}_1\cdot\vec{L}_1 + \int\limits_{\substack{\text{μικρό} \\ \text{αριστερό τμήμα } h}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} + \vec{B}_2\cdot\vec{L}_2 + \int\limits_{\substack{\text{μικρό} \\ \text{δεξιό τμήμα } h}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 J_{\substack{\text{γραμμικό} \\ \text{διαπ.} S}} L + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S'=L\cdot h} \vec{E}\cdot d\vec{a} \\ \text{Αλλά όταν } h\to 0 \Rightarrow \int\limits_{\substack{\text{μικρό} \\ \text{αριστερό τμήμα } h}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = 0 = \int\limits_{\substack{\text{μικρό} \\ \text{δεξιό τμήμα } h}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} \\ h\to 0 \Rightarrow S' = h\cdot L \to 0 \Rightarrow \int\limits_{S=L\cdot h} \vec{E}\cdot d\vec{a} \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_{1//}L - B_{2//}L = \mu_0 J_{\substack{\text{γραμμικό} \\ \text{διαπερ.} S}} L \Rightarrow \boxed{B_{1//} - B_{2//} = \mu_0 J_{\substack{\text{γραμμικό} \\ \text{διαπερνά } S}}}$$

και

αν $J_{\substack{\text{γραμμικό} \\ \text{διαπερνά } S}} = 0$

$$\boxed{B_{1//} = B_{2//}}$$

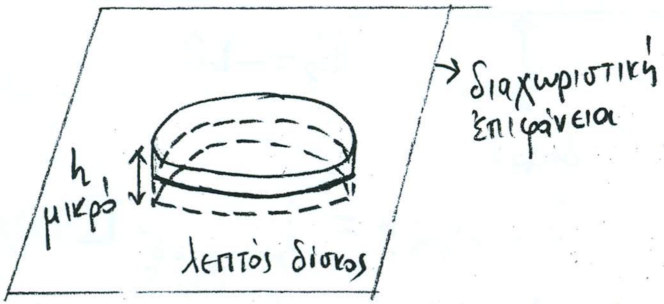
Δες κ Wolski-2.pdf p.9 summary of boundary conditions

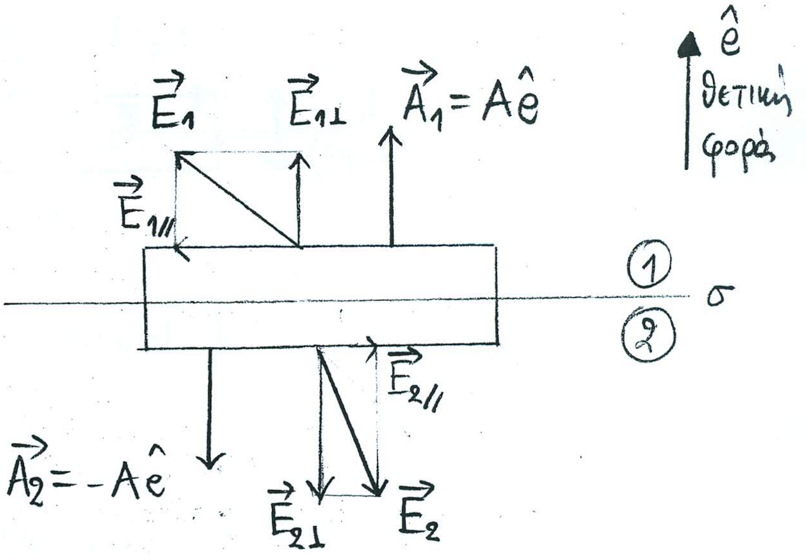
Wolski §8.1 p.23 general boundary conditions

Συνοριακές Συνθήκες στη διεπιφάνεια

$$\Phi_{E,S=\partial V} = \oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{εντόςV}}}{\varepsilon_0}$$

ύλικο ①
πάνω από
διαχ. επιφ.





λικό
② κάτω από
διαχ. επιφ.

$$|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2| = A > 0$$

Άρα

$$\Phi_{E,\substack{\text{άνω}\\\text{κύκλου}}} + \Phi_{E,\substack{\text{κάτω}\\\text{κύκλου}}} + \Phi_{E,\text{παράπλευρη}} = \frac{q_{\text{εντοςV}}}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E}_1\cdot\vec{A}_1 + \vec{E}_2\cdot\vec{A}_2 + \underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{a}}_{\substack{\text{Απαράπλευρη επιφάνεια}\\ \text{εμβαδού } 2\pi r\cdot h}} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \\ \text{Άλλα όταν } h\to 0 \Rightarrow A_{\text{παράπλευρη}} = 2\pi r\cdot h \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{E}_1\cdot\vec{A}_1 + \vec{E}_2\cdot\vec{A}_2 = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1\cdot A\hat{e} + \vec{E}_2\cdot(-A)\hat{e} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

	$(\vec{E}_1-\vec{E}_2)\cdot\hat{e} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	$\hat{e}=\hat{n}_{21}$ από το 2 προς το 1
ή	$(\vec{E}_1-\vec{E}_2)\cdot\hat{n}_{21} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	
ή	$(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\cdot\hat{n}_{12} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	$\hat{n}_{12}$ από το 1 προς το 2
ή	$\underbrace{E_{1\perp} - E_{2\perp}}_{\text{αλγεβρικές τιμές}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$	$=\hat{n}$ Jackson

$\boxed{\text{και αν } \sigma = 0 \quad E_{1\perp} = E_{2\perp}}$

§1.6 ㉑

$$\Phi_{B,S=\partial V} = \oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$$

... ομοίως

$$\boxed{(\vec{B}_1-\vec{B}_2)\cdot\hat{e} = 0}$$

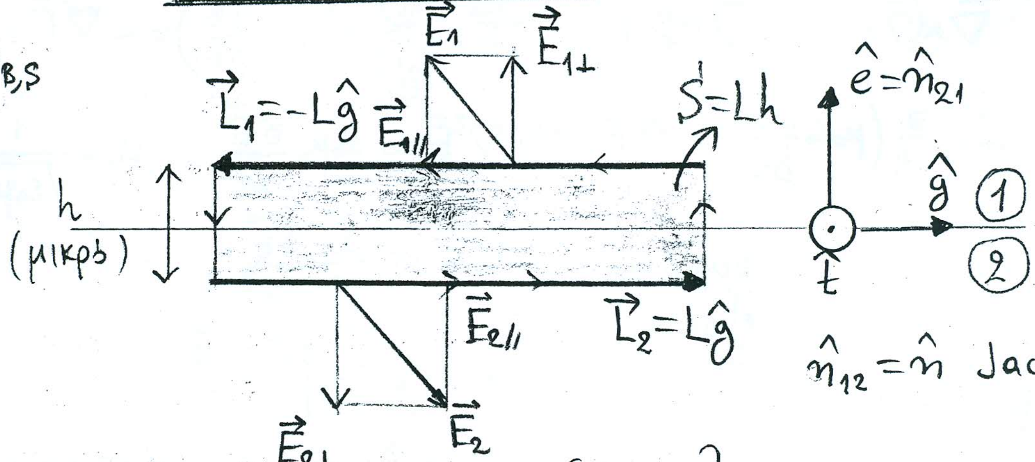
ή $(\vec{B}_1-\vec{B}_2)\cdot\hat{n}_{21} = 0$

ή $(\vec{B}_2-\vec{B}_1)\cdot\hat{n}_{12} = 0$

ή $\underbrace{B_{1\perp} - B_{2\perp}}_{\text{αλγεβρικές τιμές}} = 0$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp}$$

$$\oint_{=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{B,S}$$



$\hat{n}_{12}=\hat{n}$ Jackson

$$\vec{E}_1\cdot\vec{L}_1 + \int_{\substack{\text{μικρό}\\\text{αριστερό}\\\text{τμήμα h}}}\vec{E}\cdot d\vec{l} + \vec{E}_2\cdot\vec{L}_2 + \int_{\substack{\text{μικρό}\\\text{δεξιό}\\\text{τμήμα h}}}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{S=Lh}\vec{B}\cdot d\vec{a}$$

ρα όταν $h\to 0 \Rightarrow S=Lh\to 0 \Rightarrow \int_{S=Lh}\vec{B}\cdot d\vec{a}\to 0$

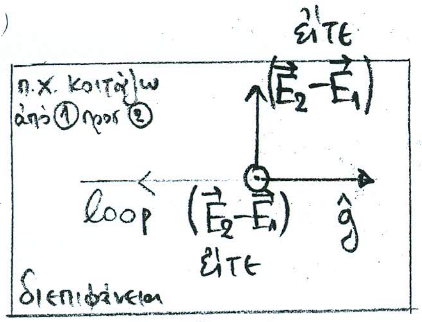
$$h\to 0 \Rightarrow \int_{\text{ματh}}\vec{E}\cdot d\vec{l}\to 0 \text{ και } \int_{\text{μδτh}}\vec{E}\cdot d\vec{l}\to 0$$

$\vec{E}_1\cdot\vec{L}_1 + \vec{E}_2\cdot\vec{L}_2 = 0 \Rightarrow$

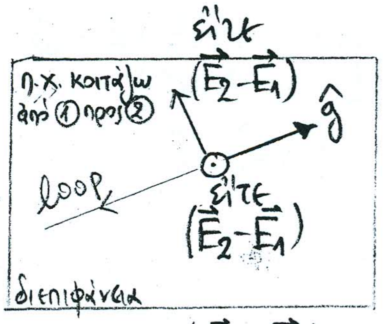
$(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\cdot\hat{g} = 0 \Rightarrow$

$E_{2\parallel} = E_{1\parallel}$

ή διαφορά $(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\perp\hat{g}$ ΚΑΘΕΤΗ



διαφορά $(\vec{E}_2-\vec{E}_1)$ κάθετη στο $\hat{g}$



ή διαφορά $(\vec{E}_2-\vec{E}_1)$ κάθετη στο $\hat{g}$

ΑΡΑ η διαφορά $(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\underset{\text{ΚΑΘΕΤΗ}}{\overset{\text{ΕΙΝΑΙ}}{\perp}}$ στη ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

δηλαδή

$$(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\times\hat{n}_{12} = \vec{0}$$

$$\boxed{(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\cdot\hat{g} = 0}$$

ή $E_{2\parallel} = E_{1\parallel}$

ή $(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\times\hat{n}_{12} = \vec{0}$

ΥΠΑΡΞΗ ΗΜ κυμάτων όταν $\rho=0$, $\vec{J}=\vec{0}$

(I)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1_\eta)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad (2_\eta)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (3_\eta)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (4_\eta)$$

$$\xrightarrow[\vec{J}=\vec{0}]{\rho=0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \quad (1_\eta')$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad (2_\eta')$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (3_\eta')$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (4_\eta')$$

Ταυτότητα:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\Delta})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Delta})-\nabla^2\vec{\Delta} \quad (T)$$

∇^2 Laplacian

I) @$\vec{E}$:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}\overset{(1_\eta')}{\underset{(3_\eta)}{\Longrightarrow}}\vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\vec{E}\Rightarrow-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})=-\nabla^2\vec{E}$$

$$\overset{(4_\eta')}{\Longrightarrow}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\nabla^2\vec{E}\Rightarrow\nabla^2\vec{E}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$u_\varphi=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c$$

κυματική εξίσωση

$$\nabla^2\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{E}=\vec{0}$$

$$\Box\vec{E}=\vec{0}$$

$\Box$ D'Alembertian

) @$\vec{B}$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}\overset{(2_\eta')}{\underset{(4_\eta')}{\Longrightarrow}}\vec{\nabla}\times\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\vec{B}\Rightarrow\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E})=-\nabla^2\vec{B}$$

$$\overset{(3_\eta')}{\Longrightarrow}\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\vec{B}\Rightarrow\nabla^2\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$u_\varphi=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c$$

κυματική εξίσωση

$$\nabla^2\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\left[\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{B}=\vec{0}$$

$$\Box\vec{B}=\vec{0}$$

ΠΕΔΙΑ ΕΝΤΟΣ ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

Ενας καλός αγωγός ΑΝΑΚΛΑ το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ΗΜ κύματος που προσπίπτει στην επιφάνειά του. (προς το παρόν χωρίς απόδειξη)

Ορίζουμε ως ιδανικό αγωγό ένα υλικό το οποίο ΑΝΑΚΛΑ ΟΛΗ την ενέργεια ΗΜ κύματος που ροσπίπτει στην επιφάνειά του.

πειδή η πυκνότητα ενέργειας ΗΜ κύματος $U=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2=\frac{\varepsilon_0}{2}\{E^2+c^2B^2\}$ $[U]=\frac{J}{m^3}$

(χωρίς απόδειξη προς το παρόν)

$\Downarrow$

$$\boxed{\text{Εντός ιδανικού αγωγού } \vec{E}=\vec{0} \text{ κ } \vec{B}=\vec{0}}$$

p. 28 Wolski

ΠΕΔΙΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΡΟ ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

Ⓘⓘ p.28 Wolski

Ἀς θυμηθοῦμε τις συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια μεταξύ υλικών

$E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ΓΣΣ

$B_{1\perp} = B_{2\perp}$

$E_{1//} = E_{2//}$

$B_{1//} - B_{2//} = \mu_0 J_{\text{γραμμικό διαπερνά } S}$

A/m

⊕

εάν ① ιδανικός αγωγός $\Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{0}$ κ $\vec{E}_1 = \vec{0}$

② κενό ή ~ αέρας

$\Rightarrow$

ΑΡΑ

ΕΣΣ

$-E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$\boxed{\begin{aligned} B_{2\perp} &= 0 \\ E_{2//} &= 0 \end{aligned}}$ ΕΣΣ*

$B_{2//} = -\mu_0 J_{\text{γραμ. διαπ. } S}$

ΠΕΔΙΑ ΣΕ ΚΟΙΛΟΤΗΤΕΣ p.28 Wolski

Είδαμε παραπάνω ότι το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ενός ΗΜ κύματος που προσπίπτει στην επιφάνεια ενός καλού αγωγού ανακλάται, μάλιστα αν ο αγωγός είναι ιδανικός τότε όλη η ενέργεια ανακλάται. $\Downarrow$

Μπορούμε να αποθηκεύσουμε ΗΜ ενέργεια στη μορφή στασίμων ΗΜ κυμάτων εντός κοιλότητας με τοιχώματα από ιδανικό (ή ~ καλό) αγωγό.

Είδαμε επίσης τις ΕΣΣ και εστιάσαμε στις $B_{2\perp} = 0$ ΕΣΣ*

$E_{2//} = 0$

δηλαδή στην επιφάνεια ενός ιδανικού αγωγού η κάθετη συνιστώσα του $\vec{B}$ κ η εφαπτομενική συνιστώσα του $\vec{E}$ μηδενίζονται

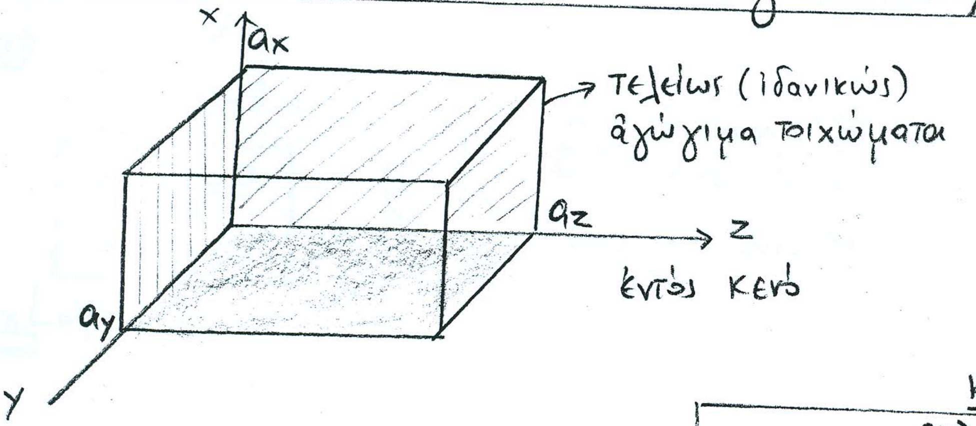
$\Downarrow$

Οι δυνατές $\overset{\text{modes}}{\text{μορφές}}$ κ συχνότητες των στασίμων κυμάτων που διατηρούνται στην κοιλότητα καθορίζονται από το σχήμα της κοιλότητας

$$\begin{matrix}\text{(κανονικοί)} \\ \text{τρόποι}\end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \text{μορφές patterns} \\ \text{κ} \\ \text{συχνότητες frequencies} \end{matrix} \right\} \begin{matrix}\text{(normal)} \\ \text{modes}\end{matrix} \Longleftarrow \text{ΣΧΗΜΑ}$$

Κανονικοί τρόποι ΗΜ κύματος σε ορθογώνια κοιλότητα

normal modes of EM wave in a rectangular cavity



Εντός της κοιλότητας $\rho=0$, $\vec{J}=\vec{0}$ $\overset{\dots}{\Rightarrow}$ $\overset{\underline{\text{KEE}}}{\boxed{\nabla^2\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}}$ κ $\overset{\underline{\text{KEB}}}{\boxed{\nabla^2\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}}$

Επειδή τα τοιχώματα της κοιλότητας είναι ιδανικώς αγώγιμα θα πρέπει σε κάθε τοίχωμα να μηδενίζονται η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κ κάθετη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου δηλ. $\boxed{\begin{array}{l}E_{\parallel}=0\\ B_{\perp}=0\end{array}}$ $\underline{\text{ΕΣΣ*}}$

Τα επίπεδα κύματα ελευθέρου χώρου δεν ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες.
Μπορούμε, όμως, να αναζητήσουμε λύσεις της μορφής

χωρισμός μεταβλητών $\vec{r}$, t $\boxed{\vec{E}(x,y,z,t)=\underset{\text{χώρος}}{\vec{E}_{\vec{r}}(x,y,z)}\,\underset{\text{χρόνος}}{e^{-i\omega t}}}$ $\underline{x\vec{r}t}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{EE}\\ \text{t}\end{array}\right\}\Rightarrow e^{-i\omega t}\nabla^2\vec{E}_{\vec{r}}=\frac{1}{c^2}(-i\omega)^2e^{-i\omega t}\vec{E}_{\vec{r}}\Rightarrow\boxed{\nabla^2\vec{E}_{\vec{r}}+\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}_{\vec{r}}=\vec{0}}$$

Στη συνέχεια χωρίζουμε τις μεταβλητές x, y, z εντός του $\vec{r}$. Μετά από αρκετές πράξεις … προκύπτει

$E_x=E_{x0}\cos(k_x x)\cdot\sin(k_y\cdot y)\cdot\sin(k_z z)\cdot e^{-i\omega t}$ ⇒ μηδενίζεται για $y=0$ κ //// για $z=0$ ||||||

ζεται =0 κ ● =0 ||| ⇐ $E_y=E_{y0}\sin(k_x x)\cdot\cos(k_y\cdot y)\cdot\sin(k_z z)\cdot e^{-i\omega t}$

$E_z=E_{z0}\sin(k_x x)\cdot\sin(k_y y)\ \cos(k_z z)\cdot e^{-i\omega t}$ ⇒ μηδενίζεται για $x=0$ κ ● για $y=0$ ////

Στα πλαίσια του χωρισμού των μεταβλητών προκύπτει …

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=\frac{\omega^2}{c^2}$$

πειδή η Ex πρέπει να μηδενίζεται κ για $y=a_y$ κ $z=a_z$ ⇒ $\sin(k_y a_y)=0\Rightarrow k_y a_y=m_y\pi$
$\sin(k_z a_z)=0\Rightarrow k_z a_z=m_z\pi$

ειδή η Ey πρέπει να μηδενίζεται κ για $x=a_x$ κ $z=a_z$ ⇒ $\sin(k_x a_x)=0\Rightarrow k_x a_x=m_x\pi$
$\sin(k_z a_z)=0\Rightarrow k_z a_z=m_z\pi$

ειδή η Ez πρέπει να μηδενίζεται κ για $x=a_x$ κ $y=a_y$ ⇒ $\sin(k_x a_x)=0\Rightarrow k_x a_x=m_x\pi$
$\sin(k_y a_y)=0\Rightarrow k_y a_y=m_y\pi$

ΠΕΔΙΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΡΟ ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΑΓΩΓΟΥ

p. 28 Wolski

Ἀς θυμηθούμε τις συνοριακές συνθήκες στη διεπιφάνεια μεταξύ υλικών

$E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ <u>ΓΣΣ</u>

$B_{1\perp} = B_{2\perp}$

$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$

$B_{1\parallel} - B_{2\parallel} = \mu_0 J_{\text{γραμμικό διαπερνά } S}$

A/m

$\oplus$

εάν ① ιδανικός αγωγός

$\Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{0}$ κ $\vec{E}_1 = \vec{0}$

② κενό ή ~ αέρας

$\Rightarrow$

ΑΡΑ

ΕΣΣ

$-E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\begin{aligned} B_{2\perp} &= 0 \\ E_{2\parallel} &= 0 \end{aligned}}$$ ΕΣΣ*

$B_{2\parallel} = -\mu_0 J_{\text{γραμ. διαπ. } S}$

ΠΕΔΙΑ ΣΕ ΚΟΙΛΟΤΗΤΕΣ

p. 28 Wolski

Είδαμε παραπάνω ότι το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας ενός ΗΜ κύματος που προσπίπτει στην επιφάνεια ενός καλού αγωγού ανακλάται, μάλιστα άν ο αγωγός είναι ιδανικός τότι όλ, η ενέργεια ανακλάται. $\Downarrow$

Μπορούμε να αποθηκεύσουμε ΗΜ ενέργεια στη μορφή στασίμων ΗΜ κυμάτων εντός κοιλότητας με τοιχώματα από ιδανικό (ή ~ καλό) αγωγό.

Είδαμε επίσης τις <u>ΕΣΣ</u> και εστιάσαμε στις $B_{2\perp} = 0$ ΕΣΣ*
$E_{2\parallel} = 0$

δηλαδή στην επιφάνεια ενός ιδανικού αγωγού η κάθετη συνιστώσα του $\vec{B}$ κ η εφαπτομενική συνιστωσα του $\vec{E}$ μηδενίζονται

$\Downarrow$

δυνατές <u>μορφές</u> (modes) κ <u>συχνότητες</u> των στασίμων κυμάτων που διατηρούνται στην κοιλότητα <u>καθορίζονται</u> από το <u>σχήμα της κοιλότητας</u>

κανονικοί) τρόποι { μορφές patterns κ συχνότητες frequencies } (normal) modes $\Longleftarrow$ ΣΧΗΜΑ

Άρα συνολικά, $k_x = \dfrac{m_x \pi}{a_x}$, $k_y = \dfrac{m_y \pi}{a_y}$, $k_z = \dfrac{m_z \pi}{a_z}$

$m_x, m_y, m_z \in \mathbb{Z}$ έλεγχος μήπως $m_x, m_y, m_z \in \mathbb{N}$ για κάποιο λόγο...

ΑΡΑ $$\omega = c\sqrt{\left(\frac{m_x\pi}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y\pi}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z\pi}{a_z}\right)^2}$$

$$\omega = \pi c\sqrt{\left(\frac{m_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{a_z}\right)^2}$$ rectangular cavity

$$\omega = \pi c\sqrt{\frac{m_x^2 + m_y^2}{a'^2} + \frac{m_z^2}{a_z^2}}$$ tetragonal cavity $a_x = a_y = a'$

$$\omega = \frac{\pi c}{a}\sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}$$ cubic cavity $a_x = a_y = a_z = a$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow k_x E_{x0} + k_y E_{y0} + k_z E_{z0} = 0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow B_x = \frac{i}{\omega}\left(E_{y0}k_z - E_{z0}k_y\right)\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\, e^{-i\omega t}$$

$$B_y = \frac{i}{\omega}\left(E_{z0}k_x - E_{x0}k_z\right)\cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\, e^{-i\omega t}$$

$$B_z = \frac{i}{\omega}\left(E_{x0}k_y - E_{y0}k_x\right)\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\, e^{-i\omega t}$$

Ας ελέγξουμε αν το $\vec{B}$ ικανοποιεί την <u>ΕΣΣ*</u> στα τοιχώματα

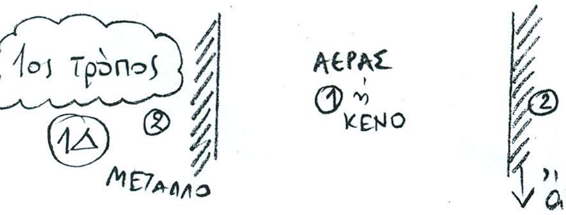
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ ας ελέγξουμε...

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ας ελέγξουμε..

x	m_y	m_z	$\frac{a\omega}{\pi c}$	πλάτος
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	1	$\sqrt{2}$	
	1	1	$\sqrt{3}$	
	0	0	2	0
	1	0	$\sqrt{5}$	

§1.7 ΗΜ κανονικοί τρόποι σε κοιλότητα (3Δ κουτί)

Εδώ μας ενδιαφέρει η ποσότητα $g(\nu)=\dfrac{dN}{d\nu}=\dfrac{d(\#\text{ κανονικών τρόπων})}{d(\text{συχνότητα})}$ $\quad [g(\nu)]=\dfrac{1}{Hz}$



ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΞΑΦΑΝΙΣΗΣ $\vec{E}$ ΣΤΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ

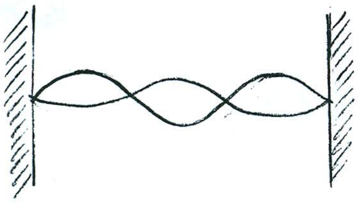
έστω
άπειρα, τέλειως αγώγιμα τοιχώματα
τότε
η οποιαδήποτε επιφανειακή κατανομή φορτίου
απλώνεται και τελικώς $\sigma\rightarrow 0$
οπότε
στις διεπιφάνειες που ορίζουν τα τοιχώματα

$$E_{1\parallel}=E_{2\parallel}=0 \qquad E_{1\perp}-E_{2\perp}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rightarrow 0 \implies E_{1\perp}=E_{2\perp}=0$$

εντός του μετάλλου
το ηλ. πεδίο μηδενίζεται

εντός του μετάλλου
το ηλ. πεδίο μηδενίζεται

ΟΠΟΤΕ.
μεσα στην κοιλότητα ταιριάζουν κύματα : $L=n\dfrac{\lambda}{2}$, $n=1,2,3,\dots$; $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$ $\Big\}$ $L=n\dfrac{2\pi}{k2}\implies$



$$k=\frac{n\pi}{L}$$

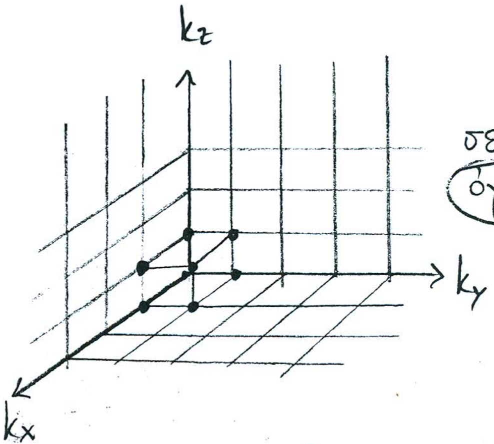
$$n=1,2,3,\dots$$

③Δ (αν $\sigma\rightarrow 0$ πάλι)

$$k_x=\frac{n_x\pi}{L_x},\ n_x=1,2,3,\dots$$

$$k_y=\frac{n_y\pi}{L_y},\ n_y=1,2,3,\dots$$

$$k_z=\frac{n_z\pi}{L_z},\ n_z=1,2,3,\dots$$



ΠΡΟΣΟΧΗ:
σε ένα (στο "θετικό")
όγδοημόριο

σε k-χώρο $\dfrac{\pi}{L_x}\dfrac{\pi}{L_y}\dfrac{\pi}{L_z}=\dfrac{\pi^3}{V}$ $\exists$ $8\dfrac{1}{8}=1$ k-καταστάσεις

σε k-χώρο $k\rightarrow k+dk$ $\qquad dN_k$

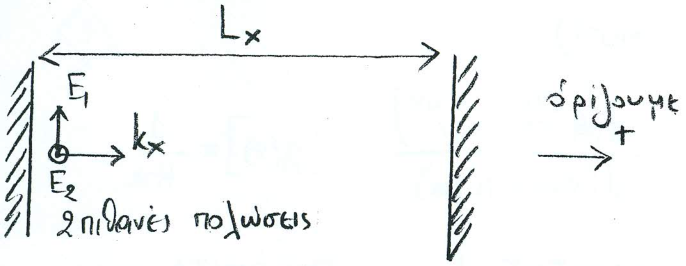
$$\frac{4\pi k^2dk}{⑧}$$

ρα

$$\boxed{(\nu)=\frac{dN}{d\nu}=\frac{8\pi\nu^2V}{c^3}}$$

$$\left.\begin{aligned} dN_k&=\frac{4\pi k^2dkV}{8\pi^3}=\frac{1}{2\pi^2}k^2dkV\\ c=\lambda\nu&=\frac{2\pi}{k}\nu\implies k=\frac{2\pi}{c}\nu\implies dk=\frac{2\pi}{c}d\nu\end{aligned}\right\}\implies$$

$$dN_k=\frac{1}{2\pi^2}\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}\frac{2\pi}{c}d\nu V=\frac{4\pi V}{c^3}\nu^2d\nu \quad \oplus \text{ ή}$$



υποθέτουμε $k_x > 0$

$$E(x,t) = E_0 \sin(\underset{\substack{\rightsquigarrow \\ (k_x>0)}}{k_x x - \omega t + \phi}) + E_0 \sin(\underset{\substack{\leftsquigarrow \\ (k_x>0)}}{k_x x + \omega t + \psi})$$

$$\sin X + \sin Y = 2 \cdot \sin\left(\frac{X+Y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{X-Y}{2}\right) \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$E(x,t) = 2E_0 \sin\left(k_x x + \frac{\phi+\psi}{2}\right) \cdot \cos\left(-\omega t + \frac{\phi-\psi}{2}\right)$$

ΠΡΕΠΕΙ

$$\underline{E(0,t) = 0 \quad \forall t} \Rightarrow \sin\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \phi = -\psi \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$E(x,t) = 2E_0 \sin(k_x x) \cdot \cos(-\omega t + \phi)$$

ΠΡΕΠΕΙ

$$\underline{E(L_x,t) = 0, \forall t} \Rightarrow \sin(k_x L_x) = 0 \Rightarrow k_x L_x = n_x \pi \quad , n_x = 1, 2, 3, \ldots$$

μόνο θετικό γιατί υποθέσαμε $k_x > 0$

$$\Downarrow$$

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_x} \quad , n_x = 1, 2, 3, \ldots$$

(2ος τρόπος) ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi)}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(0,t) &= \vec{E}_0 e^{i(-\omega t+\phi)} \\ \vec{E}((L_x,0,0),t) &= \vec{E}_0 e^{i(k_xL_x-\omega t+\phi)} \end{aligned}\right\} e^{ik_xL_x} = 1 \Leftrightarrow k_xL_x = 2\pi n_x \ , n_x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow k_x = \frac{2\pi n_x}{L_x} \ , n_x \in \mathbb{Z}$$

όμοιως

$$k_y = \frac{2\pi n_y}{L_y} \ , n_y \in \mathbb{Z}$$

$$k_z = \frac{2\pi n_z}{L_z} \ , n_z \in \mathbb{Z}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u>
σε 8 ογδοημόρια δηλαδή παντού

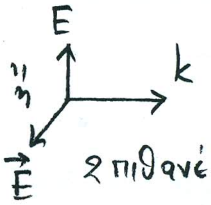
σε k-χώρο $\frac{(2\pi)^3}{L_xL_yL_z} = \frac{8\pi^3}{V}$ έχουμε $8\cdot\frac{1}{8} = 1$ k κατάσταση

σε k-χώρο $k \to k+dk$ $\qquad dN_k$

$4\pi k^2 dk$

$$\left.\begin{aligned} dN_k &= \frac{4\pi k^2 dk V}{8\pi^3} \\ c = \lambda\nu \Rightarrow c &= \frac{2\pi}{k}\nu \Rightarrow k = \frac{2\pi}{c}\nu \Rightarrow dk = \frac{2\pi}{c}d\nu \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dN_k = \frac{1}{2\pi^2}\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}\frac{2\pi}{c}d\nu V \Rightarrow dN_k = \frac{4\pi V \nu^2 d\nu}{c^3} \oplus$$



2 πιθανές πολώσεις

Άρα
$$\boxed{g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi V \nu^2 d\nu}{c^3}}$$

8. Απόδειξη του κλασικού νόμου Rayleigh–Jeans από το θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας και το $g(\nu)=\frac{dN}{d\nu}=\frac{8\pi V\nu^2}{c^3}$. Υπεριώδης καταστροφή.

$$g(\nu)=\frac{dN}{d\nu}=\frac{8\pi V\nu^2}{c^3} \qquad [g(\nu)]=\frac{1}{Hz}=s$$

$$\frac{g(\nu)}{V}=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$ ⓪

$$\left[\frac{g(\nu)}{V}\right]=\frac{1}{Hz\,m^3}=\frac{s}{m^3}$$

$$\rho(\nu,T)=\overline{E}\cdot\frac{g(\nu)}{V}$$ ①

$$[\rho(\nu,T)]=\frac{J}{m^3\,Hz}=\frac{Js}{m^3}$$

$\overline{E}$ ↓ μεση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου

equipartition theorem

Σύμφωνα με το θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας της κλασικής θεωρίας αποδίδουμε ενέργεια $\frac{1}{2}k_BT$ σε κάθε βαθμό ελευθερίας. Έτσι

3Δ ιδανικό αέριο $\overline{E}_{KIN}=\frac{3}{2}k_BT$

1Δ ιδανικό αέριο $\overline{E}_{KIN}=\frac{1}{2}k_BT$

1Δ ΑΑΤ (απλός αρμονικός ταλαντωτής) $\overline{E}_{\Delta YN}=\overline{E}_{KIN}=\frac{1}{2}k_BT \Rightarrow \overline{E}=k_BT$ ②

①②③ $\Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BT}$ νόμος Rayleigh–Jeans

όμως για $\nu\to\infty \Rightarrow \rho(\nu,T)\to\infty$ υπεριώδης καταστροφή
ultraviolet catastrophe

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ

ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ με ΥΛΗ (διστάθμικό άτομο)

LASER Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Στο ἄρθρο Albert Einstein, "Zur Quantentheorie der Strahlung"
Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich 16 (1916) 47–62
κ Physikalische Zeitschrift 18 (1917) 121–128

ὁρίζονται οἱ μηχανισμοί ἤ διεργασίες τῆς ἀλληλεπιδράσεως ΗΜ ἀκτινοβολίας με διστάθμικό ἄτομο (μέ ὕλη)

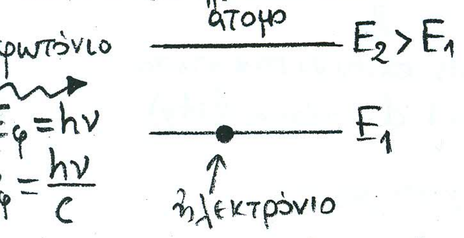
Stimulated Emission 'Εξαναγκασμένη 'Εκπομπή } ὀφείλονται στο $\rho(\nu,T)$
(Stimulated) Absorption ('Εξαναγκασμένη) 'Απορρόφηση }
Spontaneous Emission Αὐθόρμητη 'Εκπομπή

'Ο Albert Einstein εἶχε ἤδη (1905) ἐξηγήσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ὑποθέτοντας ὅτι ὑπάρχουν κβάντα φωτός με ἐνέργεια $E = h\nu$ τα ὁποία ἀργότερα ὀνομάστηκαν φωτόνια (1926 ἀπό τον Gilbert Newton Lewis).
Albert Einstein, "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt", Annalen der Physik 17 (1905) 132-148

... ~ 1960 κατασκευή τῶν πρώτων λειτουργικῶν lasers ...

Οἱ μηχανισμοί ἤ διεργασίες ἀλληλεπιδράσεως ΗΜ ἀκτινοβολίας με διστάθμικό ἄτομο ἐξηγοῦνται παρακάτω:

(Εξαναγκασμένη) ἤ Διεγερμένη 'Απορρόφηση



ὑποθέτουμε ἄτομο ἀρχικά ἀκίνητο

ΑΡΧΙΚΑ

ΤΕΛΙΚΑ

ἐξαναγκασμένη

$$\boxed{dW^{εξ}_{απορ.} = B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt}$$

πιθανότητα το ἄτομο να ἀπορροφήσει φωτόνιο

Διατήρηση 'Ενέργειας και 'Ορμῆς:

ὑποθέτουμε "ἀμελητέο"

$$\Delta E \quad E_1 + h\nu = E_2 + \cancel{\frac{P_{ατ}^2}{2M_{ατ}}} \Rightarrow E_2 - E_1 = h\nu$$

$$\Delta O \quad P_φ = P_{ατ} \Rightarrow P_{ατ} = \frac{h\nu}{c} = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h2\pi}{2\pi\lambda} = \hbar k$$

$$P_{ατ} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

Ἀς ἐλέγξουμε ἂν πράγματι το $\frac{P_{at}^2}{2m_{at}}$ εἶναι ἀμελητέο σε σχέση με την E_φ

$$= \frac{\frac{P_{at}^2}{2m_{at}}}{E_\varphi} = \frac{h^2 \quad \lambda}{\lambda^2 2m_{at} hc} = \frac{h}{2\lambda c\, m_{at}}$$

↳ λόγος

Για να μεγαλώσει το Λ θα πρέπει το m_{at} να μικρύνει. Ὁπότε ἄς θέσουμε στο m_{at} τη μάζα τοῦ μικροτέρου δυνατοῦ ἀτόμου (τοῦ ὑδρογόνου) $m_{at} = m_p + m_e$

$$\left.\begin{array}{l} m_p \simeq 1.673 \cdot 10^{-27} kg \\ m_e \simeq 9.109 \cdot 10^{-31} kg \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$m_{at} \simeq 1.673 \cdot 10^{-27} kg$$

Ἀς πάρουμε ἕνα τυπικό πράσινο $\lambda \simeq 500 nm$. Τότε

$$= \frac{6.626 \cdot 10^{-34} Js}{2 \cdot 500 \cdot 10^{-9} m\, 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\, 1.673\, 10^{-27} kg} = \frac{6.626}{3 \cdot 1.673} \cdot 10^{-34+25} \simeq 1.320 \cdot 10^{-9}$$

Ὁπότε στο παράδειγμα ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ ἀτόμου εἶναι πράγματι ἀμελητέα σε σχέση με την ἐνέργεια τοῦ φωτονίου.

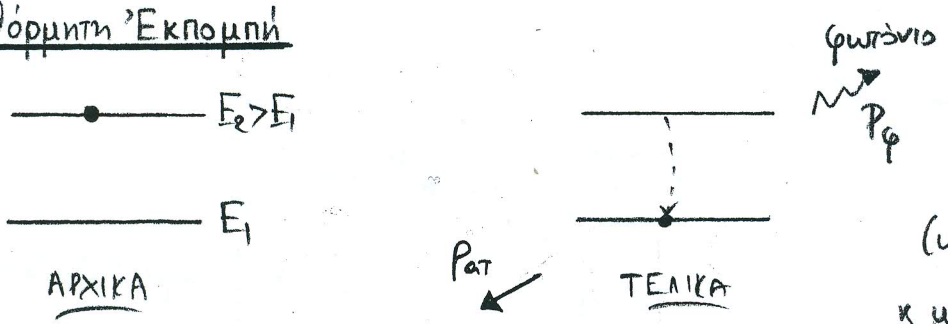
ΕΡΩΤΗΣΗ

Για ποιό μῆκος κύματος λ, στο ἄτομο τοῦ ὑδρογόνου, θα μποροῦσε ὁ λόγος Λ να γίνει ἴσος με τη μονάδα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\Lambda = \frac{h}{2\lambda c m_{at}} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{h}{2 c\, m_{at}} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} J s s}{2 \cdot 3 \cdot 10^8 m\, 1.673\, 10^{-27} kg} \simeq 0.660 \cdot 10^{-15} m = 0.660 fm$$

Αὐθόρμητη Ἐκπομπή



θέτουμε ἄτομο ἀρχικά ἀκίνητο

Το ἄτομο θα κινηθεῖ πρὸς την ἀντίθετη κατεύθυνση

φωτόνιο πρὸς τυχαία κατεύθυνση

⇓

χωρὶς κατευθυντικότητα (without directionality)

ϗ με τυχαία φάση

⇓

χωρὶς συνοχή (incoherence)

incoherent photons

μη συνεκτικά φωτόνια

2

$$\boxed{dW_{εκπ}^{αυθ} = A_{21} dt}$$

↓ ἡ πιθανότητα το ἄτομο να ἐκπέμψει φωτόνιο αὐθορμήτως.

χρόνος ζωῆς, τ: ὁ χρόνος πού ἀπαιτεῖται ὥστε να ἐκπεμφθεῖ σίγουρα

$$1 = A_{21} \cdot \tau \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{1}{A_{21}}$$

Διατήρηση Ἐνέργειας και Ὁρμῆς

ΔΕ $\quad E_2 = E_1 + E_\varphi + \frac{P_{at}^2}{2m_{at}}$

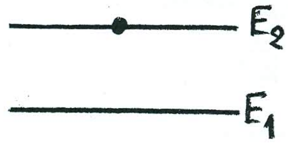
ΔΟ $\quad P_{at} + P_\varphi = 0$

ή Διεγερμένη
Εξαναγκασμένη Εκπομπή

ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ
φωτόνιο

$E_\varphi = E_2 - E_1 = h\nu$

$P_\varphi = \frac{E_\varphi}{c}$

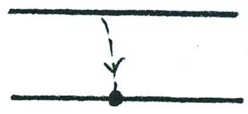


ΑΡΧΙΚΑ

υποθέτουμε αρχικά ακίνητο άτομο

πριν βαρεθεί το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται εκεί και πέσει αυθορμήτως, το ρίχνει ένα φωτόνιο

$\xrightarrow{+}$
θετική φορά
αρχική φορά του φωτονίου ΔΙΕΓΕΡΤΗ



ΤΕΛΙΚΑ

$E_\varphi = h\nu,\ P_\varphi = \frac{E_\varphi}{c}$

"ΚΛΩΝΟΙ"

$E_\varphi = h\nu,\ P_\varphi = \frac{E_\varphi}{c}$

"ΚΛΩΝΟΙ":
δύο φωτόνια με ίδια
ενέργεια, ορμή (κατεύθυνση), φάση, πόλωση

$$\boxed{dW^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon\kappa\pi} = B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt}$$ ③

μονοχρωματικότητα (monochromaticity)

κατευθυντικότητα (directionality)

συνοχή (coherence)

πολωμένο φως (polarized light)

- τα περί ίδιας φάσεως, πολώσεως Δ στο άρθρο του Einstein ούτε παίζουν ρόλο στην απόδειξη του νόμου Planck

- τα φωτόνια είναι μποζόνια ⇒ 2 φωτόνια μπορούν να έχουν ίδια ενέργεια, ορμή (κατεύθυνση) φάση, πόλωση

μονοχρωματικότητα
κατευθυντικότητα
συνοχή
πολωμένο φως
} ιδιότητες που έχει το LASER

ΔΕ $\quad E_2 + E_\varphi = 2E_\varphi + E_1 + \frac{P_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}$

ΔΟ $\quad P_\varphi = 2P_\varphi + P_{\alpha\tau}$

σύμφωνα με όσα είπαμε έως τώρα

- Χρειάζεται η υπόθεση ότι το αρχικό φωτόνιο (ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ), ενέργειας $E_\varphi = E_2 - E_1 = h\nu$, δεν παθαίνει τίποτε κατά τη διάρκεια της εξαναγκασμένης εκπομπής.

ΔΕ $\quad E_2 + \cancel{E_\varphi} = E_1 + \cancel{E_\varphi} + E_\varphi' + \cancel{\frac{P_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}}^{\text{μικρό}} \Rightarrow E_\varphi' = E_2 - E_1 = E_\varphi$

ίδια ενέργεια ⇒ μονοχρωματικότητα

ΔΟ $\quad P_\varphi = P_\varphi + P_\varphi' + P_{\alpha\tau} \Rightarrow P_\varphi' = -P_{\alpha\tau} \Rightarrow$ ή το νέο φωτόνιο (1)
ή το άτομο (2)
θα κινηθούν στην κατεύθυνση του παλαιού φωτονίου

και $\overset{\text{αρχική}}{\text{μετφορά}}$ π.χ. $\rightarrow$

έστω (1) $\quad P_\varphi' > 0 \quad P_\varphi' = \frac{E_\varphi'}{c} = \frac{E_\varphi}{c} = P_\varphi \Rightarrow$ ίδια ορμή ⇒ κατευθυντικότητα

- Χρειάζεται η υπόθεση ότι το φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ καθορίζει κατεύθυνση, φάση, πόλωση του νέου φωτονίου (1)

ίδια κατεύθυνση ⇒ κατευθυντικότητα
ίδια φάση ⇒ συνοχή
ίδια πόλωση ⇒ πολωμένο φως

~~Υπολογισμός τύπου Planck από τις διεργασίες/μηχανισμούς~~

ΥΠΟΛ. ΤΥΠΟΥ PLANCK απο τις διεργασιες, ή μηχανισμους

Αλληλεπίδραση ΗΜ ακτινοβολίας και ύλης σε θερμοδυναμική ισορροπία ($\Rightarrow$ T=σταθερή)

Πληθυσμός στάθμης i, N_i = ο μέσος αριθμός ατόμων στη στάθμη.

$$N_i = N_{0\lambda} \frac{e^{-\frac{E_i}{k_BT}}}{Z} \to p_i \qquad \text{ή} \qquad N_i = N_{0\lambda} \frac{g_i e^{-\frac{E_i}{k_BT}}}{Z} \to p_i$$

$$Z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{k_BT}} \qquad\qquad Z = \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{k_BT}}$$

χωρίς διαφορετικά στατιστικά βάρη — με διαφορετικά στατιστικά βάρη

κατανομή
Boltzmann

απλούστερη μορφή — γενικότερη μορφή

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ:

$$dN_{1\to 2} = dN_{2\to 1} \Rightarrow$$ Ίσες μεταβολές πληθυσμού σε χρόνο dt

$$\boxed{N_1 dW^{\varepsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = N_2 \left(dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\varepsilon\kappa\pi} + dW^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon\kappa\pi}\right)} \xrightarrow{①②③}$$

① Πράξεις χωρίς διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$N_{0\lambda} \frac{e^{-\frac{E_1}{k_BT}}}{Z} B_{12}\rho(\nu,T)dt = N_{0\lambda}\frac{e^{-\frac{E_2}{k_BT}}}{Z}\left(A_{21}dt + B_{21}\rho(\nu,T)dt\right) \Rightarrow$$

$$B_{12}e^{-\frac{E_1}{k_BT}}\rho(\nu,T) - B_{21}e^{-\frac{E_2}{k_BT}}\rho(\nu,T) = A_{21}e^{-\frac{E_2}{k_BT}} \Rightarrow$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{A_{21}e^{-\frac{E_2}{k_BT}}}{B_{12}e^{-\frac{E_1}{k_BT}} - B_{21}e^{-\frac{E_2}{k_BT}}}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\lim_{T\to\infty}\rho(\nu,T) = \infty \Rightarrow$

$$\frac{A_{21}}{B_{12}-B_{21}} = \infty \Rightarrow B_{12} = B_{21} := B$$

$$A_{21} := A$$

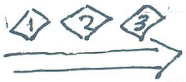
Άρα

$$\rho(\nu,T) = \frac{\frac{A}{B}}{e^{(E_2-E_1)/k_BT}-1} \Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{e^{h\nu/k_BT}-1}}$$

και συγκρίνοντας με ν. Planck

$$\boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}}$$

Άρα $$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}}$$



② πράξεις με διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$\boxed{N_0}\,\frac{g_1 e^{-\frac{E_1}{k_BT}}}{\boxed{Z}} B_{12}\,\rho(\nu,T)\boxed{dt} = \boxed{N_0}\,\frac{g_2 e^{-\frac{E_2}{k_BT}}}{\boxed{Z}}\left(A_{21}\boxed{dt} + B_{21}\,\rho(\nu,T)\boxed{dt}\right) \Rightarrow$$

$$g_1 e^{-\frac{E_1}{k_BT}} B_{12} - g_2 e^{-\frac{E_2}{k_BT}} B_{21}\Big)\rho(\nu,T) = g_2 e^{-\frac{E_2}{k_BT}} A_{21} \Rightarrow$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{g_2 e^{-\frac{E_2}{k_BT}} A_{21}}{g_1 e^{-E_1/k_BT} B_{12} - g_2 e^{-E_2/k_BT} B_{21}}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\lim_{T\to\infty} \rho(\nu,T) = \infty \Rightarrow$

$$\frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12} - g_2 B_{21}} = \infty \Rightarrow g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

Άρα

$$\boxed{\rho(\nu,T) = \frac{\left(\frac{A_{21}}{B_{21}}\right)}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} e^{(E_2-E_1)/k_BT} - 1}}$$

και συγκρίνοντας με ν. Planck

$$\boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}}$$

$E_2 - E_1 = h\nu$

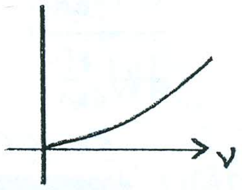
$$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}}$$

incoherence
μη συνοχή

Αν συγκρίνουμε την αυθόρμητη εκπομπή με την εξαναγκασμένη εκπομπή

$$\boxed{\frac{dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\epsilon\kappa\pi}}{dW^{\epsilon\xi}_{\epsilon\kappa\pi}}} = \frac{A_{21}\,dt}{B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt} = \frac{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}}{\frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}} = \boxed{e^{h\nu/k_BT} - 1}$$

CIC



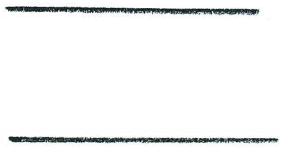
coherence
συνοχή

Άρα αν θέλω ΣΥΝΟΧΗ COHERENCE $\Rightarrow$ θέλω όσο το δυνατόν μεγαλύτερο T, μικρότερο ν (μεγαλύτερο λ)

MASER (λ~1cm)

εύκολότερη συνοχή

LASER (λ~500nm)



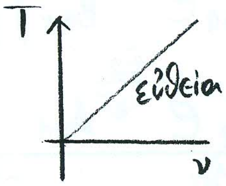
δυσκολότερη συνοχή

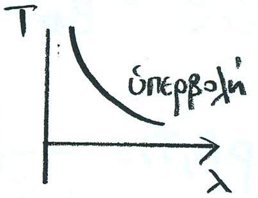
Φαίνεται ευκολότερη η δημιουργία συνεκτικής δέσμης στα μικροκύματα από ότι στο ορατό.

ΑΣΚΗΣΗ "Εστω π.χ. ότι θέλουμε $\frac{dW^{αυθ}_{εκπ}}{dW^{εξ}_{εκπ}} = 1$. Σε τι θερμοκρασία είναι αυτό εφικτό
στο ερυθρό ($λ \simeq 700$ nm) κ
στα μικροκύματα ($λ \simeq 1$ cm)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\frac{dW^{αυθ}_{εκπ}}{dW^{εξ}_{εκπ}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 = 1 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 2 \Rightarrow \frac{h\nu}{k_B T} = \ln 2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2}} \text{ ή } \boxed{T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2}}$$





* $λ = 700$nm (ερυθρό φως)

$$T = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} Js\ 3 \cdot 10^{8} m\, K}{700 \cdot 10^{-9} m\ 1.38 \cdot 10^{-23} J\, S \ln 2} \simeq \frac{6.626 \cdot 3}{7 \cdot 1.38} \frac{10^{-34+30+8}}{\ln 2} K \simeq 29687 K$$

ΟΠΟΤΕ [redacted] ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΩΣ [redacted]

ΑΝΕΦΙΚΤΟ

ΜΕ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

ΑΔΥΝΑΤΟ

φωτόσφαιρα Ηλίου
~6000K

⇓

ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

[redacted]

[redacted] ΑΝΤΛΗΣΗ

* $λ = 1$cm (μικροκύματα)

$T \simeq 2.078 K$

Ας συγκρίνουμε τις εξαναγκασμένες διεργασίες.

$$\frac{dW^{εξ}_{απορ}}{dW^{εξ}_{εκπ}} = \frac{B_{12}\, \cancel{\rho(\nu,T)}\, \cancel{dt}}{B_{21}\, \cancel{\rho(\nu,T)}\, \cancel{dt}} = 1$$ αν μιλάμε για σύστημα με ίδια στατιστικά βάρη ($g_1 = g_2$)

σε ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ $N_2 << N_1$

Αλλά, [redacted]

$$dN^{εξ}_{2\to1} = N_2 \cdot dW^{εξ}_{εκπ}$$
$$dN^{εξ}_{1\to2} = N_1 \cdot dW^{εξ}_{απορ}$$

$$\Rightarrow dN^{εξ}_{2\to1} << dN^{εξ}_{1\to2}$$

"Αρα μέσω των εξαναγκασμένων διεργασιών αυξάνεται ο πληθυσμός της 2.
Στη συνέχεια η αυθόρμητη εκπομπή λόγω μεταβάσεως του ηλεκτρονίου 2→1 ενισχύει τη μη-συνεκτική ακτινοβολία

και μειώνεται η πυκνότητα ακτινοβολίας

Το πρόβλημα αυτό (οφείλεται στο $N_2 << N_1$ σε θερμοδ. ισορ.) επιλύεται με την αναστροφή πληθυσμών μέσω αντλήσεως. Υπάρχουν πολλά είδη αντλήσεως.

ΑΝΤΛΗΣΗ: αντλώ (ανεβάζω) ηλεκτρόνια στη στάθμη 2: $N_2 > N_1$

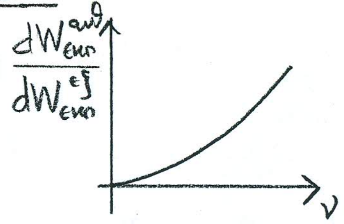
ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ ή ΜΗΧΑΝΙΣΜΩΝ

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΚΠΟΜΠΩΝ

incoherence
μη συνοχή

$$\boxed{\frac{dW_{εκπ}^{αυθ}}{dW_{εκπ}^{εξ}}} = \frac{A_{21}\,\cancel{dt}}{B_{21}\,\rho(\nu,T)\,\cancel{dt}} = \frac{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}}{\frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}} = \boxed{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

coherence
συνοχή



ΑΡΑ αν επιθυμούμε συνοχή ⟹ θέλουμε όσο το δυνατόν μικρότερο ν (μεγαλύτερο λ) μεγαλύτερο T

Είδαμε ότι πχ. για $\lambda = 1cm$ $dW_{εκπ}^{αυθ} = dW_{εκπ}^{εξ}$ για $T \simeq 2K$

MASER ($\lambda \sim 1cm$)

εύκολότερη συνοχή

LASER ($\lambda \sim 500nm$)

ΑΝΕΦΙΚΤΟ ΜΕ ΘΕΡΜΟΔ. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

[redacted]

δυσκολότερη συνοχή

Είδαμε ότι π.χ. για $\lambda = 700nm$ $dW_{εκπ}^{εξ} = dW_{εκπ}^{αυθ}$ για $T \simeq 30000K$

ορατό

Φαίνεται π.χ. εύκολότερη ή δημιουργία συνεκτικής δέσμης στα μικροκύματα από ότι στο ✓

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΩΝ

Ας συγκρίνουμε τις εξαναγκασμένες διεργασίες.

$$\frac{dW_{απορ}^{εξ}}{dW_{εκπ}^{εξ}} = \frac{B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt}{B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt} = 1$$ αν μιλάμε για σύστημα με ίδια στατιστικά βάρη

θερμοδυναμική ισορροπία $N_2 << N_1$

Αλλά, σε [redacted]

$dN_{2\to1}^{εξ} = N_2 \cdot dW_{εκπ}^{εξ}$

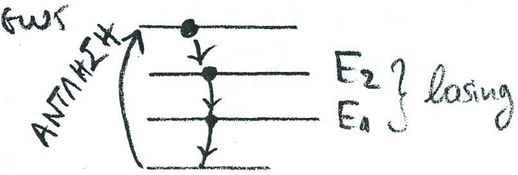
$N_{1\to2}^{εξ} = N_1 \cdot dW_{απορ}^{εξ}$

$dN_{2\to1}^{εξ} << dN_{1\to2}^{εξ}$

- Άρα μέσω των εξαναγκασμένων διεργασιών αυξάνεται ο πληθυσμός της 2

- Στη συνέχεια η αυθόρμητη εκπομπή λόγω μεταβάσεως του ηλεκτρονίου 2→1 ενισχύει τη μη συνεκτική ακτινοβολία

Το πρόβλημα οφείλεται στο $N_2 << N_1$ σε θερμοδ. ισορ. και επιλύεται με την αναστροφή πληθυσμών (ώστε να γίνει $N_2 > N_1$) μέσω αντλήσεως. Υπάρχουν πολλά είδη αντλήσεως



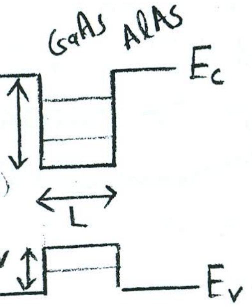
συμβατικά

ΑΤΟΜΑ, ΣΤΕΡΕΑ
ΜΟΡΙΑ

διακριτό φάσμα συνεχές φάσμα, ζώνες

"διστάθμικό άτομο"
π.χ. άτομο Υδρογόνου

ΤΕΧΝΗΤΑ ΑΤΟΜΑ ή ΚΕΝΤΡΑ ΧΡΩΜΑΤΟΣ
ARTIFICIAL ATOMS or COLOR CENTERS



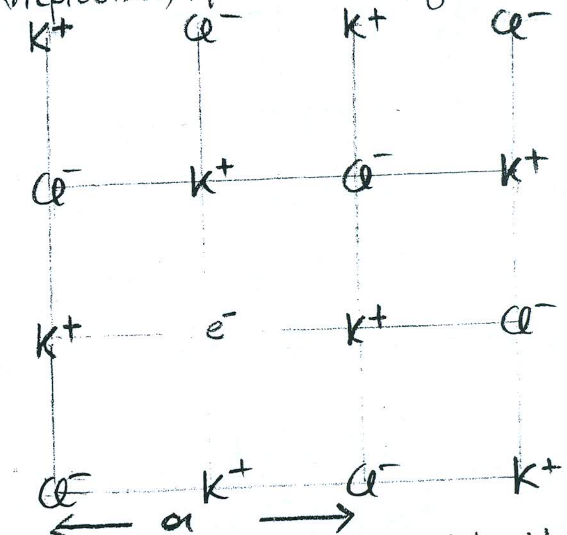
φρέαρ με $\Delta E_c, \Delta E_v \sim 0.1-1eV$
$L \sim 10nm$

ρεί να έχουμε φρέαρ σε 1Δ, 2Δ, 3Δ

quantum well
quantum wire
quantum dot

Τα φρέατα αυτά τα έχω ζωγραφίσει πολύ σχηματικά ως τετραγωνικά αλλά το σχήμα τους εξαρτάται από πολλούς παράγοντες

alkaline halides
αλκαλίων
(περιοδικοί) κρύσταλλοι αλογονούχων



η δυναμική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου που θα βρεθεί στο κενό Cl^- είναι

$$V \sim (-e)\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot 6$$

$$r \sim a/2$$

έχουμε ένα τριδιάστατο φρέαρ
με $L \sim \frac{a}{2} \simeq 4-7 Å \sim 0.5\,nm$

Αδρή προσέγγιση: απειρόβαθο φρέαρ

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0<x<L \\ \infty, & \text{αλλού} \end{cases} \qquad E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2} \qquad \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & 0<x<L \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

π.χ. $E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(2n+1)$ $n = 1,2,3,\dots$

Σε τρεις διαστάσεις π.χ. κέντρα χρώματος ή κβαντικές τελείες, αν υποθέσουμε ότι $V(\vec{r}) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$, οι μεταβλητές χωρίζονται και οι ιδιοτιμές είναι

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right) \qquad n_1,n_2,n_3 = 1,2,3,\dots$$

όπου επίσης υποθέσαμε ότι $L_x = L_y = L_z = L$

ΑΡΑ

$$\left.\begin{aligned} E_{Θ.Σ} &= \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(3) \\ E_{1ηΔΣ} &= \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(6) \end{aligned}\right\}$$

η ενέργεια φωτονίου που π.χ. απορροφάται ώστε το ηλεκτρόνιο να ανέβει από την Θ.Σ. στην 1η Δ.Σ. είναι

$$\left.\begin{aligned} h\nu &= \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\cdot 3 \\ \text{π.χ. } L &= \frac{a}{2} \\ m &= m^* \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} h\nu &= \frac{\hbar^2\pi^2 (3\cdot 4)}{2m^* a^2} = \frac{6\hbar^2\pi^2}{m^* a^2} \\ \text{NaCl} \quad a &= 0.565\ \text{nm} \\ m^* &= 1.13\, m_e \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$h\nu = \frac{6\cdot 1.054^2 \cdot 10^{-68}\, \pi^2\ J^2 s^2}{1.13\ 9.109\cdot 10^{-31}\, kg\ 0.565^2\, 10^{-18}\, m^2} = \frac{6\cdot 1.054^2\, \pi^2}{1.13\cdot 9.109\ 0.565^2\ 1.602}\ eV\ 10^{-68+31+18+19}$$

$h\nu \simeq 12.498\,eV$

Ενώ αν χρησιμοποιούσαμε $L = a$ θα βρίσκαμε $h\nu \simeq \frac{12.498\,eV}{4} \simeq 3.12\,eV$

$h\nu_{πρθ.} = 3.12\,eV$

$h\nu_{πειρ} \simeq 2.7\,eV$

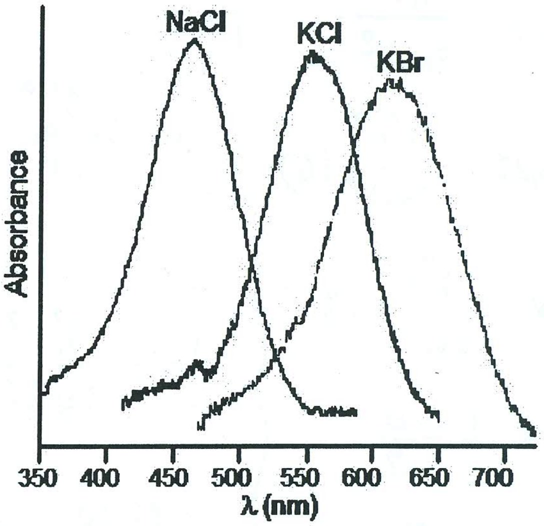
$$\frac{3.1-2.7}{2.7} = \frac{0.4}{2.7} \simeq 0.15$$

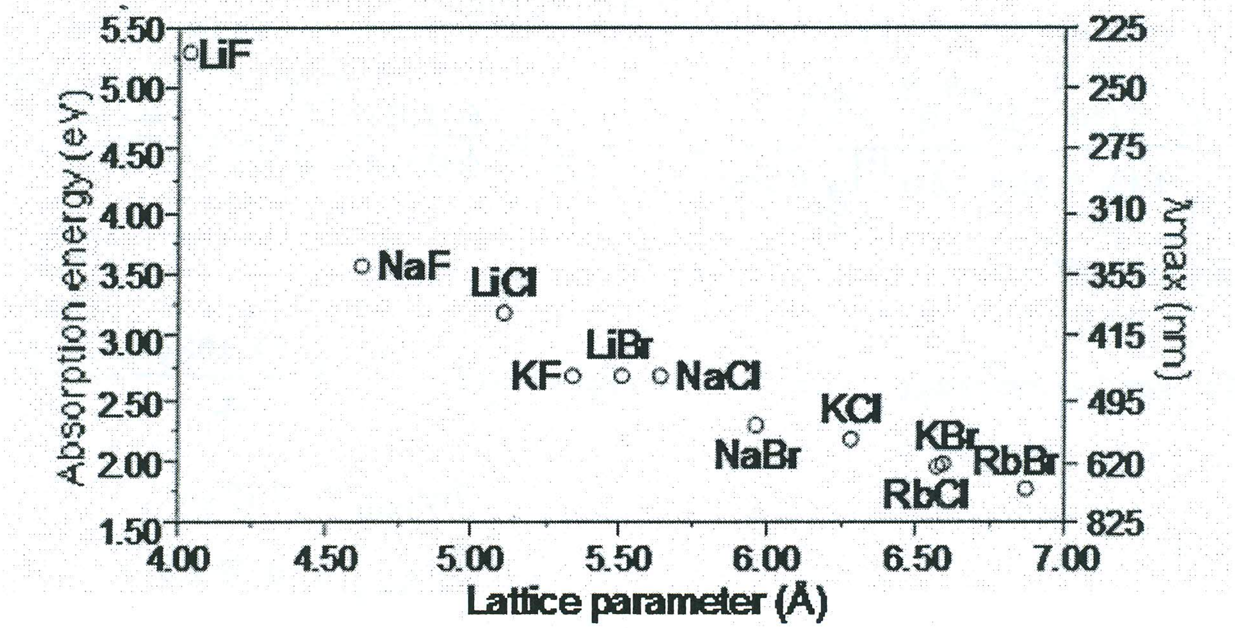
Είναι προφανές ότι όλα αυτά είναι πολύ προσεγγιστικά

Αλλά παρά τους αριθμητικούς παράγοντες... $h\nu = (\text{κάτι})\cdot\frac{1}{L^2} \Rightarrow$

$h\nu\downarrow$ όταν $L\uparrow \Leftrightarrow a\uparrow$

Εικόνα 1.4 Φάσματα απορροφήσεως χρωματικών κέντρων, που ελήφθησαν στον αέρα σε 298 K, στο υπεριώδες - ορατό από κρυστάλλους NaCl, KCl, KBr, που ακτινοβολήθηκαν με πηνίο Tesla [3]. Το χρώμα εξαρτάται από το μέγεθος του χώρου που αφήνει η ατέλεια, άρα από την πλεγματική σταθερά. Η κορυφή του φάσματος απορροφήσεως είναι έτσι μετατοπισμένη επειδή $a_{\mathrm{NaCl}} < a_{\mathrm{KCl}} < a_{\mathrm{KBr}}$.





Εικόνα 1.5 Εξάρτηση της κορυφής το φάσματος απορροφήσεως από την πλεγματική παράμετρο (σταθερά), *a*, σε κρυστάλλους αλογονούχων αλκαλίων [3]. Αύξηση της *a* δημιουργεί μεγαλύτερα κενά όταν λείπει κάποιο ιόν, επομένως ευρύτερο φρέαρ δυναμικής ενέργειας και άρα μικραίνει η ενεργειακή απόσταση θεμελιώδους - $1^{ης}$ διεγερμένης στάθμης και επομένως μικραίνει η ενέργεια (αυξάνεται το μήκος κύματος) του φωτονίου που αντιστοιχεί στη μετάβαση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΗΜΙΚΛΑΣΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ της ἀλληλεπιδράσεως ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ – ΥΛΗΣ (δισταθμικοῦ ἀτόμου)
ΗΜ πεδίο κλασικά – ΑΤΟΜΟ κβαντικά

§3.1 ΗΜΙΚΛΑΣΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ: ΗΜ πεδίο κλασικά – ΑΤΟΜΟ κβαντικά

Ἡμικλασική ἀντιμετώπιση σημαίνει ὅτι ἐνῶ τὸ ἄτομο ἀντιμετωπίζεται κβαντικά ὡς ἕνα σύστημα ἰδιοκαταστάσεων, ἀντιμετωπίζουμε κλασικά τὸ ΗΜ πεδίο. Τὸ ΗΜ πεδίο θεωρεῖται ὡς μια ἐξωτερική χρονικῶς μεταβαλλόμενη διαταραχή.

Ἀκόμα θεωροῦμε την ΗΜ ἀκτινοβολία ἀρκετά πυκνή οὕτως ὥστε ἡ ἀπορρόφηση ἤ ἡ ἐκπομπή ἑνός φωτονίου ἀπό το ὑπό μελέτη ἄτομο να μην μπορεῖ να ἐπηρεάσει αἰσθητά τα πλάτη τοῦ ἠλεκτρικοῦ και μαγνητικοῦ πεδίου τοῦ κύματος.

Ἄν μας ἐνδιαφέρει ἡ διακύμανση τῆς πυκνότητας τῆς ΗΜ ἀκτινοβολίας, θα πρέπει να ἐγκαταλείψουμε την ἡμικλασική προσέγγιση. Αὐτό θα γίνει στο ἑπόμενο κεφάλαιο ὅταν το σύστημα ἄτομο – ΗΜ ἀκτινοβολία μελετηθεῖ στην πλήρη κβαντική του μορφή. Δηλ. στο κεφ. 4 θα ἀντιμετωπίσουμε κβαντικά και την ΗΜ ἀκτινοβολία.

(§3.2) ΑΔΙΑΤΑΡΑΚΤΟ ΑΤΟΜΟ (δηλαδή χωρίς ΗΜ ακτινοβολία)

Ας θεωρήσουμε τη Χαμιλτονιανή τού αδιατάρακτου ηλεκτρονίου στο άτομο

$$\hat{H}_0 = \frac{\vec{P}^2}{2m_e} + U(\vec{r}) \qquad \text{(A1)} \qquad (3.1)$$

π.χ στο άτομο του υδρογόνου η δυναμική ενέργεια (Coulomb)

$$U(\vec{r}) = (-e)\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e}{r} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{(A2)} \qquad (3.2)$$

όπου $e \simeq 1.602 \cdot 10^{-19}\,C$. Σε πολυηλεκτρονικό άτομο η δυναμική ενέργεια (Coulomb)

$$U(\vec{r}) = (-e)\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Ze}{r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{(A2Z)} \qquad (3.3)$$

Ή μπορούμε να θεωρήσουμε τη θωρακισμένη (screened) μορφή της δυναμικής ενέργειας

$$U_s(\vec{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\, e^{-k_0 r} \qquad \text{(A3)} \qquad (3.4)$$

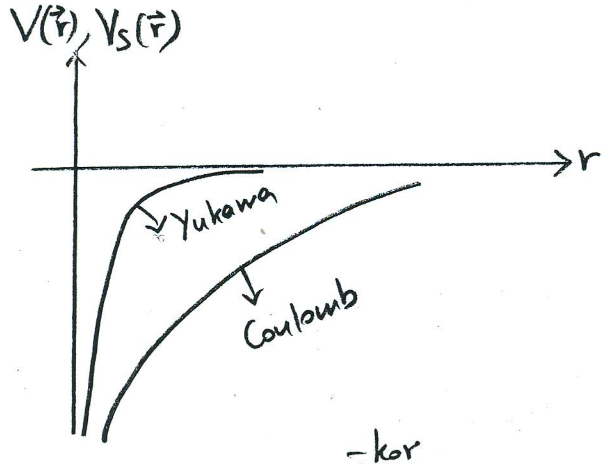
Γενικότερα το δυναμικό Coulomb έχει τη μορφή

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Ze}{r} \qquad \text{(A2')} \qquad (3.5)$$

ενώ το θωρακισμένο δυναμικό Coulomb (screened Coulomb potential) έχει τη μορφή

$$V_s(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Ze}{r}\, e^{-k_0 r}, \qquad \text{(A3')} \qquad (3.6)$$

όπου k_0 είναι η ισχύς του παράγοντα αποσβέσεως (strength of the damping factor) ή αλλιώς κυματάνυσμα (wave vector) Thomas – Fermi. Το θωρακισμένο δυναμικό $V_S(\vec{r})$ επονομάζεται και Thomas – Fermi δυναμικό ή Yukawa δυναμικό.



Τα παραπάνω δυναμικά ή δυναμικές ενέργειες εξαρτώνται τελικά από το r και όχι το $\vec{r}$, είναι δηλαδή κεντρικά δυναμικά και κεντρικές δυναμικές ενέργειες

λόγω του παράγοντα $e^{-k_0 r}$ το δυναμικό Yukawa πέφτει πιο απότομα από το δυναμικό Coulomb

Ας θεωρήσουμε τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec r,t)}{\partial t} = \hat H_0\,\Psi(\vec r,t) \qquad (A4) \qquad (3.7)$$

όπου $\Psi(\vec r,t)$ ή κυματοσυνάρτηση τού αδιατάρακτου ηλεκτρονίου. Περαιτέρω, άς υποθέσουμε χωρισμό μεταβλητών

$$\Psi(\vec r,t) = \Phi(\vec r)\,T(t) \qquad (A5) \qquad (3.8)$$

$$\left.\begin{matrix}3.7)\ (A4)\\ (A5)\ 8)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Phi(\vec r)\, i\hbar\frac{dT(t)}{dt} = T(t)\,\hat H_0\,\Phi(\vec r) \Rightarrow \frac{i\hbar}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat H_0\,\Phi(\vec r)}{\Phi(\vec r)},\ \text{για } T(t)\neq 0 \neq \Phi(\vec r).$$

Αλλά για να ικανοποιείται ή τελευταία θα πρέπει

$$\frac{i\hbar}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat H_0\,\Phi(\vec r)}{\Phi(\vec r)} = E\ \ \underline{\underline{\text{ΣΤΑΘΕΡΑ}}} \qquad (A6)$$

συλλογικός κβαντικός αριθμός ↓

ΑΡΑ

① $\hat H_0\,\Phi(\vec r) = E\,\Phi(\vec r)$ άρα E είναι οί ιδιοτιμές τής ενέργειας, και ενγένει, διακριτές (k) (A7)

② $$\frac{dT}{T} = \frac{E\,dt}{i\hbar} \Rightarrow \ln T = -\frac{iEt}{\hbar} + c \Rightarrow T(t) = \underset{\mathcal N}{\boxed{e^{c}}}\,e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \qquad (A8)$$

$$\Rightarrow T(t) = \mathcal N\,e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \qquad (A9)$$

Επομένως, συνοψίζοντας

$$\Psi(\vec r,t) = \mathcal N\,e^{-\frac{iE_kt}{\hbar}}\,\Phi_k(\vec r) \qquad (A10)$$

ου $\mathcal N$ είναι μια σταθερά κανονικοποιήσεως, και οί ιδιοκαταστάσεις τού ΑΔΙΑΤΑΡΑΚΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ περιγράφονται από την

$$\hat H_0\,\Phi_k(\vec r) = E_k\,\Phi_k(\vec r) \qquad (A11)$$

ου E_k είναι οί ιδιοενέργειες και $\Phi_k(\vec r)$ οί ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις.

κόμα ορίζουμε

$$\boxed{E_k := \hbar\,\Omega_k} \qquad (A12)$$

$$|\Psi(\vec r,t)|^2 dV = 1 \Leftrightarrow \underbrace{|\mathcal N|^2}_{\substack{\text{σταθερά}\\ \text{κανονικοποιήσεως}}}\underbrace{\int|\Phi_k(\vec r)|^2 dV}_{\substack{1\\ \text{ορθοκανονικές}}} = 1$$

$dV = d^3\vec r$: στοιχειώδης όγκος

k ένας συλλογικός κβαντικός αριθμός π.χ. στο άτομο υδρογόνου $k=\{n,l,m_l\}$.
άτομο τού υδρογόνου, στην ιδιοσυνάρτηση $\Phi_k(r,\theta,\varphi)$ αντιστοιχεί ή ιδιοενέργεια
$\frac{-R_E}{n^2} = E_n$, όπου $R_E = \frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \simeq 13.6$ eV είναι ή ΕΝΕΡΓΕΙΑ RYDBERG.

Στο άτομο του υδρογόνου προκύπτουν ίδιες ενέργειες με αυτές του προτύπου Bohr, δηλαδή $E_{nlm} = E_n = -\frac{R_E}{n^2}$. Αυτό αλλάζει σε πολυηλεκτρονικά άτομα όπου $E_{nlm} = E_{nl}$. Σε μαγνητικό πεδίο αίρεται ο εκφυλισμός ως προς m.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{άρση εκφυλισμού} \\ \text{ως προς } l}}{E_{nlm}} = E_{nl}$$

Τύποι Ατομικού Προτύπου Bohr

$$E_n = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_n}$$

$$r_n = \boxed{\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}}\frac{n^2}{Z} = \overset{\text{ακτίνα Bohr}}{a_0}\frac{n^2}{Z}$$

$$E_n = -\underbrace{\boxed{\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}}}_{R_E \simeq 13.6\,eV}\frac{Z^2}{n^2} = -R_E\frac{Z^2}{n^2}$$

για $Z=1 \Rightarrow E_1 = -R_E \simeq -13.6\,eV$ $\quad r_1 = a_0 \simeq 0.529$ Å

$E_2 = -3.4\,eV$ $\quad r_2 = 4r_1$

$E_3 = -1.51\,eV$ $\quad r_3 = 9r_1$

$\ldots \quad \ldots$

$m\upsilon r = n\hbar$

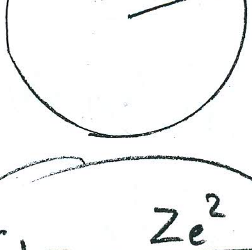
$\upsilon = \frac{n\hbar}{mr}$

$$\frac{m\upsilon^2}{\cancel{r}} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{\cancel{m} n^2\hbar^2}{m^{\cancel{2}} r^{\cancel{2}}} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r}}$$

$$\boxed{r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Ze^2 m}\cdot n^2}$$

$$\boxed{r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}\frac{n^2}{Z}}$$



$$\frac{m\upsilon^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2 4\pi\varepsilon_0}$$

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{Ze^2}{2r4\pi\varepsilon_0} = E_{KIN} = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_{\Delta YN} = (-e)\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{E_{o\lambda} = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}}$$

$$\boxed{E_n = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}}$$

§3.3 ΔΙΑΤΑΡΑΓΜΕΝΟ ΑΤΟΜΟ (δηλαδή με ΗΜ πεδίο)

Άς θεωρήσουμε τη Χαμιλτονιανή του διαταραγμένου ατόμου δηλαδή παρουσία ΗΜ πεδίου

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \underbrace{U_\varepsilon(\vec{r},t)}_{\downarrow} \quad (\Delta 1)$$

δυναμική ενέργεια διαταραχής ΜΙΚΡΗ σε σχέση με $\hat{H}_0$

Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\,\Psi(\vec{r},t) \quad (\Delta 2)$$

με αρχική συνθήκη

$$\Psi(\vec{r},0) = \Phi(\vec{r}) = \text{γνωστή} \quad (\Delta 3)$$

Υποθέτουμε ότι μπορούμε να αναπτύξουμε τόσο την $\Psi(\vec{r},0) = \Phi(\vec{r})$ όσο και την $\Psi(\vec{r},t)$ συναρτήσει των ιδιοσυναρτήσεων του αδιατάρακτου προβλήματος $\Phi_k(\vec{r})$. Δηλαδή

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_k f_k \Phi_k(\vec{r}) \quad (\Delta 4)$$

και

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) \quad (\Delta 5)$$

οπότε

$$C_k(0) = f_k \quad (\Delta 6)$$

$$(\Delta 1)(\Delta 2)(\Delta 5) \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r})\right] = \left[\hat{H}_0 + U_\varepsilon(\vec{r},t)\right]\left[\sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r})\right] \quad (\Delta 7)$$

Α' μέλος $A' = i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) + i\hbar \sum_k C_k(t) \overset{(A12)}{(-i\Omega_k)}\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) \Rightarrow$

$$A' = i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) + \cancel{\sum_k C_k(t)\, E_k\, e^{-i\Omega_k t}}\, \Phi_k(\vec{r})$$

Β' μέλος $B' = \cancel{\sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, E_k}\, \Phi_k(\vec{r}) + U_\varepsilon(\vec{r},t) \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r})$

ΑΡΑ

$$i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) = U_\varepsilon(\vec{r},t) \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) \quad (\Delta 8)$$

Τώρα εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι οι $\Phi_k(\vec r)$ είναι ορθοκανονικές.
Πολλαπλασιάζουμε την (Δ8) με $\Phi^*_{k'}(\vec r)$ και ολοκληρώνουμε στο χώρο. Άρα

$$i\hbar\sum_k \dot C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\int dV\, \underset{\delta_{k'k}}{\Phi^*_{k'}(\vec r)\,\Phi_k(\vec r)} = \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\int dV\, \Phi^*_{k'}(\vec r)\, U_\varepsilon(\vec r,t)\, \Phi_k(\vec r)$$

$$\Rightarrow i\hbar\, \dot C_{k'}(t)\, e^{-i\Omega_{k'} t} = \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, U_{\varepsilon k'k}(t) \quad (Δ9)$$

όπου ονομάσαμε

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = \int dV\, \Phi^*_{k'}(\vec r)\, U_\varepsilon(\vec r,t)\, \Phi_k(\vec r) = \langle \Phi_{k'} | U_\varepsilon(\vec r,t) | \Phi_k \rangle \quad ●$$

Άρα εν τέλει

$$\boxed{\dot C_{k'}(t) = \frac{-i}{\hbar}\sum_k C_k(t)\, e^{i(\Omega_{k'}-\Omega_k)t}\, U_{\varepsilon k'k}(t)} \quad (Δ10)$$

Δηλαδή καταλήξαμε σε ένα Γραμμικό Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων 1ης Τάξεως.
Αν το λύσουμε - ουσιαστικά λύνουμε το πρόβλημα (Δ1) (Δ2)

«Τα παραπάνω συνιστούν τη λεγόμενη χρονικά εξαρτώμενη θεωρία διαταραχών».
Παρακάτω θα την εφαρμόσουμε σε <u>διστάθμικό άτομο</u> υπό την επίδραση <u>μονοχρωματικού</u> και <u>πολωμένου ηλεκτρικού κύματος</u>. Δηλ. η διαταραχή μας έχει αυτά τα χαρακτηριστικά.

⊛ Να σημειωθεί ότι επειδή $\int |\Psi(\vec r,t)|^2 dV = 1 \Leftrightarrow \int \Psi(\vec r,t)^* \Psi(\vec r,t)\, dV = 1$

$$\Rightarrow \int dV \sum_{k'} C^*_{k'}(t)\, e^{i\Omega_{k'}t}\, \Phi^*_{k'}(\vec r) \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec r) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k'}\sum_k C^*_{k'}(t)\, C_k(t)\, e^{i(\Omega_{k'}-\Omega_k)t}\underbrace{\int dV\, \Phi^*_{k'}(\vec r)\, \Phi_k(\vec r)}_{\delta_{k'k}\ (\text{ορθοκανονικές})} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_k |C_k(t)|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_k |C_k(0)|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_k |\delta_k|^2 = 1$$

$\langle x''|\hat{M}|x'\rangle$ matrix element of an operator

π.χ. $\langle\psi|\hat{M}|\phi\rangle = \int dx''\int dx\, \langle\psi|x''\rangle\langle x''|\hat{M}|x'\rangle\langle x'|\phi\rangle = \int dx''\int dx'\, \psi(x'')^{*}\langle x''|\hat{M}|x'\rangle\phi(x')$

δες π.χ. Anna Lipniacka
"the matrix"

$$\left.\begin{array}{l}\langle x''|\hat{x}|x'\rangle = \langle x''|x'|x'\rangle = x'\langle x''|x'\rangle = x'\delta(x''-x') = x''\delta(x''-x') \\ \langle x''|\hat{p}|x'\rangle = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x''}\delta(x''-x')\end{array}\right\}\Rightarrow$$

↓ αποδεικνύεται... ♪

⇒ (αναπτύσσοντας σε δυνάμεις του $\hat{x}$ και $\hat{p}$)

$$\langle x''|\hat{M}(\hat{x},\hat{p})|x'\rangle = M\left(x'', -i\hbar\frac{\partial}{\partial x''}\right)\delta(x''-x') \quad 1Δ$$

$$\langle \vec{r}''|\hat{M}(\hat{\vec{r}},\hat{\vec{p}})|\vec{r}'\rangle = M(\vec{r}'', -i\hbar\vec{\nabla}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r}') \quad 3Δ$$ μάλλον

όποτε π.χ.

$$\langle\Phi_\ell|\hat{M}|\Phi_k\rangle = \int d^3\vec{r}'\int d^3\vec{r}\,\langle\Phi_\ell|\vec{r}'\rangle\langle\vec{r}'|\hat{m}|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\Phi_k\rangle$$
$$= \int d^3\vec{r}'\int d^3\vec{r}\,\Phi_\ell^{*}(\vec{r}')\, M(\vec{r}, -i\hbar\vec{\nabla})\,\delta(\vec{r}'-\vec{r})\,\Phi_k(\vec{r})$$
$$= \int d^3\vec{r}\,\Phi_\ell^{*}(\vec{r})\, M(\vec{r}, -i\hbar\vec{\nabla})\,\Phi_k(\vec{r})$$

$\hat{x},\hat{p}] = i\hbar \Leftrightarrow \hat{x}\hat{p}-\hat{p}\hat{x} = i\hbar \Rightarrow \langle x''|\hat{x}\hat{p}|x'\rangle - \langle x''|\hat{p}\hat{x}|x'\rangle = i\hbar\langle x''|x'\rangle \Rightarrow$

$> \langle x''|x''\hat{p}|x'\rangle - \langle x''|\hat{p}x'|x'\rangle = i\hbar\delta(x''-x') \Rightarrow (x''-x')\langle x''|\hat{p}|x'\rangle = i\hbar\delta(x''-x')$

$$\left.\begin{array}{r}(x''-x')\langle x''|\hat{p}|x'\rangle = i\hbar\delta(x''-x') \\ \delta(x''-x') = -(x''-x')\dfrac{\partial}{\partial x''}\delta(x''-x')\end{array}\right\}$$

↳ αποδεικνύεται ♪

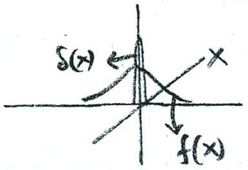
$> \cancel{(x''-x')}\langle x''|\hat{p}|x'\rangle = -i\hbar\cancel{(x''-x')}\dfrac{\partial}{\partial x''}\delta(x''-x') \Rightarrow \langle x''|\hat{p}|x'\rangle = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x''}\delta(x''-x')$ ♪

οδεικνύεται ♪

$'(x) = -\delta(x)$ ή $x\dfrac{\partial}{\partial x}\delta(x) = -\delta(x)$ ή $x''\dfrac{\partial}{\partial x''}\delta(x'') = -\delta(x'') \rightarrow (x''-x')\dfrac{\partial}{\partial x''}\delta(x''-x') = -\delta(x''-x$

- Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\boxed{\overset{A}{x\,\delta'(x)} = \overset{B}{-\delta(x)}}$

ον $$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta'(x) f(x)\,dx = \Big[x\,\delta(x) f(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\big(f(x) - x f'(x)\big)\,dx =$$



μηδενίζεται
ο όρος αυτός

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, x f'(x)\,dx$$

$$= -f(0) + 0.f'(0) = -f(0)$$

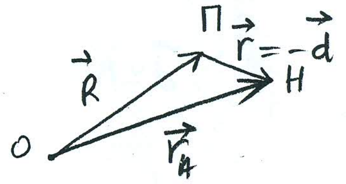
ον

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, f(x)\,dx = -f(0)$$

$A^{\text{ον}}, B^{\text{ον}} \to -\delta(x) = x\,\delta'(x)$

Περιοριζόμαστε τώρα σε δυναμεις που προέρχονται από το ηλεκτρικό πεδιο οδεύοντος μονοχρωματικού και πολωμένου ηλεκτρικού κύματος

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_a \exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}_H - \omega t + \varphi\right)\right]}$$



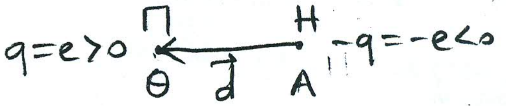
Π : πυρήνας
H : ηλεκτρόνιο

όπου το $\vec{\mathcal{E}}_a$ καθορίζει την πόλωση του κύματος,
ω είναι ή κυκλική συχνότητα $\omega = 2\pi\nu$
$\vec{r}_H$ είναι ή θέση του ηλεκτρονίου

Όμως θα θεωρήσουμε ότι αυτή $\vec{r}_H$ δεν διαφέρει σημαντικά από τη θέση του πυρήνα $\vec{R}$ για την κλίμακα μεγέθους που μας αφορά εδώ.

Δηλαδή $\boxed{\vec{r}_H \simeq \vec{R}}$

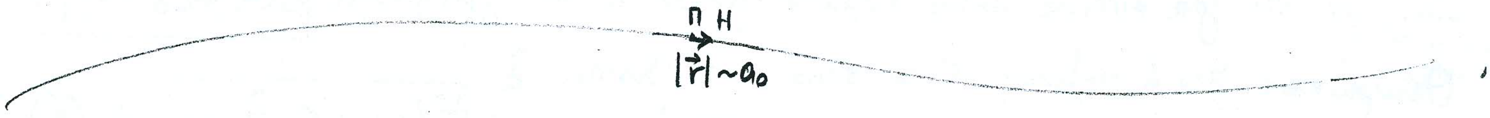
Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι ότι θεωρούμε
) οπτικά μήκη κύματος λ



$\vec{d} = \vec{A\Theta} = \vec{H\Pi}$
$\vec{r} = \vec{\Pi H} = \vec{\Theta A}$
$\vec{d} = -\vec{r}$
$\vec{p} = q\vec{d} = e(-\vec{r}) = -e\vec{r}$

Άρα αν π.χ. $\lambda = 500\text{nm}$
δεδομένου ότι το μέγεθος της "τροχιάς" του ηλεκτρονίου είναι της τάξεως της ακτίνας Bohr $a_0 \simeq 0.529\,\text{Å} = 0.529\cdot 10^{-10}\,\text{m} \simeq 0.5\cdot 10^{-1}\,\text{nm}$ } ⇒

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{a_0} = \frac{500\text{nm}}{0.5\cdot 10^{-1}\text{nm}} = \frac{5\cdot 10^{2}}{5\cdot 10^{-2}} = 10^{4} \Rightarrow \boxed{\lambda >> a_0 \sim |\vec{r}|}$$



Δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι πρακτικά ομογενές.
) Δεν έχει πρακτικά χωρική εξάρτηση.

$$\vec{\mathcal{E}} \simeq \vec{\mathcal{E}}_a \exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{R} - \omega t + \varphi\right)\right] = \underbrace{\vec{\mathcal{E}}_a \exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{R} + \varphi\right)\right]}_{\vec{\mathcal{E}}_0}\cdot\exp(-i\omega t)$$

Οπότε $\boxed{\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0\cdot\exp(-i\omega t)}\boxed{= \vec{\mathcal{E}}(t)}$

Δηλαδή συμπεριλάβαμε το $\exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{R}+\varphi\right)\right]$ στο πλάτος θεωρώντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει πρακτικά ΜΟΝΟ ΧΡΟΝΙΚΗ εξάρτηση.

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla}V \\ &dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \vec{\nabla}V\cdot d\vec{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dV = -\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{r}$$ [redacted]

ολοκλ. θέσεως

$$V(\vec{r},t) - V(\vec{0},t) = -\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{r}$$

πολ/ζω με (−e)   θέτω 0 $e = 1.609\cdot 10^{-19}\text{C}$

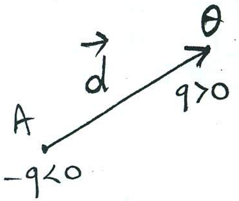
$$U(\vec{r},t) - U(\cancel{\vec{0}},t) = e\,\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{r} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow U(\vec{r},t) = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}(t)$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

$$\vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \vec{B}$$

ΗΛ. ΠΕΔΙΟ — ΜΑΓΝ. ΠΕΔΙΟ



$\vec{d}=\vec{A\Theta}$

$\vec{p}=q\vec{d}$ electric dipole moment

$U_{\mathcal{E}}=-\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}$ potential energy

$\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{\mathcal{E}}$ torque

$[\vec{p}]=Cm$

$[U_{\mathcal{E}}]=Cm\frac{N}{C}=Nm=J$

$[\vec{\tau}]=Cm\cdot\frac{N}{C}=Nm$

$\vec{\mu}=I\vec{A}$ magnetic (dipole) moment

$U_B=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ potential energy

$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}$ torque

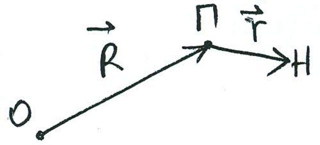
$[\vec{\mu}]=Am^2$

$[U_B]=Am^2\frac{N}{Am}=N\cdot m=J$

$[\vec{\tau}]=Am^2\frac{N}{Am}=N.m$

$F=BIl$

'Εν προκειμένω



$\vec{\Pi H}=\vec{r}$

$\vec{d}=\vec{A\Theta}=\vec{H\Pi}=-\vec{r}$

$q=e>0$

$\vec{p}=q\vec{d}=e(-\vec{r})\Rightarrow\boxed{\vec{p}=-e\vec{r}}$ Ⓐ

$\vec{p}\cdot\hat{z}=(-e)\vec{r}\cdot\hat{z}\Rightarrow\boxed{p_z=-ez}$

Δείξαμε ότι για οπτικά μήκη κύματος μπορούμε να γράψουμε $\boxed{\vec{\mathcal{E}}(t)=\vec{\mathcal{E}}_0\cdot\exp(-i\omega t)}$ Ⓑ

Θεωρώντας ότι η πόλωση είναι στην κατεύθυνση $\hat{z}$ και παίρνοντας το πραγματικό μέρος της Ⓑ έχουμε $\boxed{\vec{\mathcal{E}}(t)=\mathcal{E}_0\hat{z}\cos\omega t}$ Ⓑ'

Ἄρα $U_{\mathcal{E}}=-\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}=-(-e)\vec{r}\cdot\mathcal{E}_0\hat{z}\cos\omega t$

$\Rightarrow\boxed{U_{\mathcal{E}}=e\mathcal{E}_0 z\cos\omega t}$ Ⓖ

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t)=\int dV\,\Phi^*_{k'}(\vec{r})\,U_{\mathcal{E}}(\vec{r},t)\,\Phi_k(\vec{r})=\int dV\,\Phi^*_{k'}(\vec{r})\,z\,\Phi_k(\vec{r})\cdot e\mathcal{E}_0\cos\omega t$$

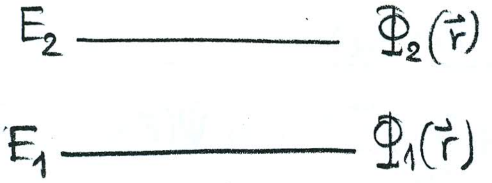
$$\boxed{U_{\mathcal{E}k'k}(t)=e\mathcal{E}_0\cos\omega t\cdot\int dV\,\Phi^*_{k'}(\vec{r})\,z\,\Phi_k(\vec{r})}$$ Ⓓ

$$z_{k'k}:=\int dV\,\Phi^*_{k'}(\vec{r})\,z\,\Phi_k(\vec{r})$$

$$z^*_{k'k}=z_{kk'}$$

$$z_{kk}=\int dV\,\underbrace{|\Phi_k(\vec{r})|^2}_{\text{άρτια}}\,\underbrace{z}_{\text{περιττή}}=0$$ Ⓢ

ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟ ΑΤΟΜΟ



ΑΔΙΕΓΕΡΤΟ ΑΤΟΜΟ

ΔΙΕΓΕΡΜΕΝΟ ΑΤΟΜΟ

ΥΠΟΘΕΣΗ: τα φωτόνια του ΗΜ πεδίου ταιριάζουν ενεργειακά με την ενεργειακή διαφορά των 2 σταθμών

$$\hbar\omega = h\nu \simeq E_2 - E_1$$

$$U_{\varepsilon 12}(t) = e\mathcal{E}_0 \cos\omega t \, Z_{12}$$

$$U_{\varepsilon 21}(t) = e\mathcal{E}_0 \cos\omega t \, Z_{21}$$

$$U_{\varepsilon kk}(t) = e\mathcal{E}_0 \cos\omega t \, Z_{kk} = 0$$

$k=1$ ή $k=2$ Ⓔ

ή

$$U_{\varepsilon 12}(t) = -\wp_{z12}\mathcal{E}_0 \cos\omega t$$

$$U_{\varepsilon 21}(t) = -\wp_{z21}\mathcal{E}_0 \cos\omega t$$

$$U_{\varepsilon kk}(t) = 0$$ (E′)

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

ΔΙΑΤΑΡΑΓΜΕΝΟ ΑΤΟΜΟ (δηλαδή με ΗΜ πεδίο)

$$\underset{\text{αδιατάρακτη}}{\hat{H}} = \hat{H}_0 + \underset{\text{μικρή διαταραχή}}{U_\varepsilon(\vec{r},t)} \qquad i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\vec{r},t)$$

υποθέσαμε αρχική συνθήκη $\Psi(\vec{r},0) = \Phi(\vec{r})$ = γνωστή

υποθέσαμε $\Phi(\vec{r}) = \sum_k f_k \Phi_k(\vec{r})$ όπου $\hat{H}_0 \Phi_k(\vec{r}) = E_k \Phi_k(\vec{r})$

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) \qquad E_k := \hbar \Omega_k$$

$\dots C_k(0) = f_k$

$\vdots$ πράξεις

γνωστά

πρέπει να προσδιοριστούν

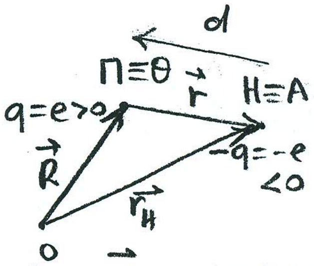
$$\boxed{\dot{C}_{k'}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_k C_k(t)\, e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t}\, U_{\varepsilon k'k}(t)}$$

[redacted]

Δ10

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = \int d^3\vec{r}\, \Phi_{k'}(\vec{r})^* \, U_\varepsilon(\vec{r},t)\, \Phi_k(\vec{r}) = \dots = \langle \Phi_{k'} | U_\varepsilon(\vec{r},t) | \Phi_k \rangle$$

τα προσδιορίζουμε μέσω απλοποιήσεων...



ά1 $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_a \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}_H - \omega t + \varphi)] \Rightarrow \overset{\lambda >> a_0}{\dots} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t) = \underset{\text{ανεξάρτητο θέσεως}}{\vec{\mathcal{E}}(t)} \\ \vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla} V \\ dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} \end{array}\right\} \Rightarrow U_\varepsilon(\vec{r},t) = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}(t)$$

$\vec{p} = q\vec{d} = e(-\vec{r})$

ά2 $$\left.\begin{array}{l} \vec{\mathcal{E}}_0 \dashrightarrow \mathcal{E}_0 \hat{z} \\ \exp(-i\omega t) \dashrightarrow \cos\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \hat{z} \cos\omega t \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow U_\varepsilon(\vec{r},t) = +e\vec{r}\cdot\mathcal{E}_0\hat{z}\cos\omega t \Rightarrow U_\varepsilon(\vec{r},t) = e\mathcal{E}_0 z \cos\omega t$$

ΑΡΑ $$U_{\varepsilon k'k}(t) = e\mathcal{E}_0 \cos\omega t \underbrace{\int d^3\vec{r}\, \Phi_{k'}(\vec{r})^* \, z\, \Phi_k(\vec{r})}_{z_{k'k}}$$

$$\boxed{\dot{C}_{k'}(t)=\frac{-i}{\hbar}\sum_k C_k(t)\,e^{i(\Omega_{k'}-\Omega_k)t}\,U_{\varepsilon k'k}(t)}$$ [redacted] Δ10

$$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}$$ (9)

"Έπρεπε να τη λύσουμε. Θα τη λύσουμε λοιπόν στο διστάθμικό άτομο.

Ορίζουμε $\boxed{\Omega:=\Omega_2-\Omega_1}$

$\boxed{k'=1}$ $$\dot{C}_1(t)=-\frac{i}{\hbar}C_1(t)\underbrace{e^{i(\Omega_1-\Omega_1)t}}_{1}\underbrace{U_{\varepsilon11}(t)}_{0}-\frac{i}{\hbar}C_2(t)e^{i(\Omega_1-\Omega_2)t}U_{\varepsilon12}(t)$$

$$\dot{C}_1(t)=-\frac{i}{\hbar}C_2(t)\,e^{-i\Omega t}(-\varepsilon_0)\wp\cos\omega t=\frac{i\varepsilon_0\wp}{\hbar}C_2(t)e^{-i\Omega t}\left\{\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right\}$$

$$\boxed{\dot{C}_1(t)=\frac{i\varepsilon_0\wp}{2\hbar}\left[e^{-i(\Omega-\omega)t}+e^{-i(\Omega+\omega)t}\right]C_2(t)}$$ [redacted] Z1

$\boxed{k'=2}$ $$\dot{C}_2(t)=-\frac{i}{\hbar}C_1(t)e^{i(\Omega_2-\Omega_1)t}U_{\varepsilon21}(t)-\frac{i}{\hbar}C_2(t)\underbrace{e^{i(\Omega_2-\Omega_2)t}}_{1}\underbrace{U_{\varepsilon22}(t)}_{0}$$

$$\dot{C}_2(t)=-\frac{i}{\hbar}C_1(t)\,e^{i\Omega t}(-\varepsilon_0)\wp\cos\omega t=\frac{i\varepsilon_0\wp}{\hbar}C_1(t)e^{i\Omega t}\left\{\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right\}$$

$$\boxed{\dot{C}_2(t)=\frac{i\varepsilon_0\wp}{2\hbar}\left[e^{i(\Omega+\omega)t}+e^{i(\Omega-\omega)t}\right]C_1(t)}$$ [redacted] Z2

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{C}_1(t)&=C_2(t)\,\frac{i\varepsilon_0\wp}{2\hbar}\Big[e^{-i(\Omega-\omega)t}+\underbrace{e^{-i(\Omega+\omega)t}}_{0\ (\text{RWA})}\Big]\\ \dot{C}_2(t)&=C_1(t)\,\frac{i\varepsilon_0\wp}{2\hbar}\Big[\underbrace{e^{i(\Omega+\omega)t}}_{0\ (\text{RWA})}+e^{i(\Omega-\omega)t}\Big]\end{aligned}}$$

(Z) [redacted] εξισώσεις Rabi [redacted]

Isidor Isaac Rabi
1898–1988

Οι όροι με $(\Omega-\omega)$ μεταβάλλονται αργά αφού $\Omega:=\Omega_2-\Omega_1=\frac{\hbar\Omega_2-\hbar\Omega_1}{\hbar}=\frac{E_2-E_1}{\hbar}\approx\frac{\hbar\omega}{\hbar}=\omega$
νώ οι όροι με $(\Omega+\omega)$ μεταβάλλονται γρήγορα.
Άρα σε οιαδήποτε αξιοσημείωτη χρονική κλίμακα,
υτές οι γρήγορες ταλαντώσεις θα έχουν μέση τιμή περίπου μηδενική*

Η προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος (rotating wave approximation, RWA)
ίναι ο ισχυρισμός ότι μπορούμε να αγνοήσουμε αυτούς τους γρήγορους όρους.

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{C}_1(t)&=C_2(t)\,\frac{i\varepsilon_0\wp}{2\hbar}\,e^{-i\underset{-\Delta}{\underbrace{(\Omega-\omega)}}t}\\ \dot{C}_2(t)&=C_1(t)\,\frac{i\varepsilon_0\wp}{2\hbar}\,e^{i\underset{-\Delta}{\underbrace{(\Omega-\omega)}}t}\end{aligned}}$$ Ω_R

(H) >RWA

(H) >RWA

(εξ. Rabi μετά την RWA)

* ή ας πούμε μηδενική περίπου επίδραση στο αποτέλεσμα

$\Delta:=\omega-\Omega$ detuning

$\Omega_R:=\frac{\wp\varepsilon_0}{\hbar}$ συχνότητα Rabi

Μετασχηματισμός ...για να πάρουμε σύστημα διαφορικών εξισώσεων με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές ⑩

$$C_1(t) = \mathbb{C}_1(t)\, e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}$$

$$C_2(t) = \mathbb{C}_2(t)\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}$$

$$\dot{C}_1(t) = \dot{\mathbb{C}}_1(t)\, e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathbb{C}_1(t)\left(-\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\right) e^{-i\frac{(\Omega-\omega)}{2}t}$$

$$\dot{C}_2(t) = \dot{\mathbb{C}}_2(t)\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathbb{C}_2(t)\,\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\, e^{i\frac{(\Omega-\omega)}{2}t}$$

οπότε το Ⓗ γίνεται:

$$\begin{cases} \dot{\mathbb{C}}_1(t)\, e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathbb{C}_1(t)\left(-\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\right) e^{-\frac{i(\Omega-\omega)}{2}t} = \mathbb{C}_2(t)\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}\, \frac{i\mathcal{E}_0\wp}{2\hbar}\, e^{-i(\Omega-\omega)t} \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t)\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} + \mathbb{C}_2(t)\,\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\, e^{\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}} = \mathbb{C}_1(t)\, e^{-\frac{i(\Omega-\omega)t}{2}}\, \frac{i\mathcal{E}_0\wp}{2\hbar}\, e^{i(\Omega-\omega)t} \end{cases}$$

$$\dot{\mathbb{C}}_1(t) + \mathbb{C}_1(t)\left(-\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\right) = \mathbb{C}_2(t)\, e^{i\frac{(\Omega-\omega)}{2}t}\, e^{i\frac{(\Omega-\omega)}{2}t}\, \frac{i\mathcal{E}_0\wp}{2\hbar}\, e^{-i(\Omega-\omega)t}$$

$$\dot{\mathbb{C}}_2(t) + \mathbb{C}_2(t)\, i\frac{(\Omega-\omega)}{2} = \mathbb{C}_1(t)\, e^{-i\frac{(\Omega-\omega)}{2}t}\, e^{-i\frac{(\Omega-\omega)}{2}t}\, \frac{i\mathcal{E}_0\wp}{2\hbar}\, e^{i(\Omega-\omega)t}$$

$$\dot{\mathbb{C}}_1(t) + \mathbb{C}_1(t)\left(-\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\right) = \mathbb{C}_2(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0\wp}{2\hbar}$$

$$\dot{\mathbb{C}}_2(t) + \mathbb{C}_2(t)\,\frac{i(\Omega-\omega)}{2} = \mathbb{C}_1(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0\wp}{2\hbar}$$

μάλλον

$\wp_{z21} = \wp$

$\wp_{z12} = \wp_{z21}^{*} = \wp^{*}$

$$\dot{\mathbb{C}}_1(t) = +\frac{i(\Omega-\omega)}{2}\,\mathbb{C}_1(t) + \frac{i\mathcal{E}_0\wp}{2\hbar}\,\mathbb{C}_2(t)$$

$$\dot{\mathbb{C}}_2(t) = \frac{i\mathcal{E}_0\wp}{2\hbar}\,\mathbb{C}_1(t) - \frac{i(\Omega-\omega)}{2}\,\mathbb{C}_2(t)$$

$\Delta := \omega - \Omega$

$\Omega_R = \frac{\mathcal{E}_0\wp}{\hbar}$

$$\dot{\mathbb{C}}_1(t) = -\frac{i\Delta}{2}\,\mathbb{C}_1(t) + \frac{i\Omega_R}{2}^{\circledast}\,\mathbb{C}_2(t)$$

$$\dot{\mathbb{C}}_2(t) = \frac{i\Omega_R}{2}\,\mathbb{C}_1(t) + \frac{i\Delta}{2}\,\mathbb{C}_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbb{C}}_1(t) \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R^{*}}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1(t) \\ \mathbb{C}_2(t) \end{bmatrix}$$

σύστημα διαφορικών εξισώσεων με χρονικά ανεξάρτητους συντελεστές

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{\vec{x}}(t) = \tilde{A}\,\vec{x}(t)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} := -iA \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}$$

Δοκιμάζω λύσεις της μορφής $\vec{x}(t) = \vec{u}\, e^{\tilde{\lambda} t}$

$$\vec{u}\,\tilde{\lambda}\, e^{\tilde{\lambda} t} = \tilde{A}\vec{u}\, e^{\tilde{\lambda} t} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \tilde{A}\vec{u} = \tilde{\lambda}\vec{u} \\ \tilde{\lambda} = -i\lambda \end{array}\right\} -iA\vec{u} = -i\lambda\vec{u} \Rightarrow \boxed{A\vec{u} = \lambda\vec{u}}$$

πρόβλημα ιδιοτιμών

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Rightarrow A\vec{u} - \lambda I\vec{u} = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{u} = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\Delta}{2} - \lambda & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{\Delta}{2} - \lambda\right)\left(\frac{\Delta}{2} + \lambda\right) - \frac{\Omega_R^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{\Delta^2}{4} - \lambda^2\right) - \frac{\Omega_R^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\Delta^2}{4} + \lambda^2 = \frac{\Omega_R^2}{4} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{\Omega_R^2 + \Delta^2}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,1} = \pm \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

...

"Έχοντας ελέγξει ότι τα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, η λύση του προβλήματός μας είναι:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{2} c_k \vec{u}_k\, e^{\overset{\downarrow}{\underset{\tilde{\lambda}_k}{-i\lambda_k}} t}$$

Από τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τα c_k.

ΝΑ ΠΩ ΤΟ
ΘΕΩΡΗΜΑ
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΟ

ΛΥΣΗ για Δ=0

Αν υποθέσουμε $\Delta := \omega - \Omega = 0$ τότε $A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & 0 \end{bmatrix}$ και $\lambda_{2,1} = \pm \frac{\Omega_R}{2}$

για $\boxed{\lambda_1 = -\frac{\Omega_R}{2}}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = -\frac{\Omega_R}{2}\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -\frac{\Omega_R}{2} U_{21} &= -\frac{\Omega_R}{2} U_{11} \\ -\frac{\Omega_R}{2} U_{11} &= -\frac{\Omega_R}{2} U_{21} \end{aligned}\right\} \Rightarrow U_{21} = U_{11}$$

οπότε το κανονικοποιημένο $\vec{U}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

για $\boxed{\lambda_2 = \frac{\Omega_R}{2}}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \frac{\Omega_R}{2}\begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -\frac{\Omega_R}{2} U_{22} &= \frac{\Omega_R}{2} U_{12} \\ -\frac{\Omega_R}{2} U_{12} &= \frac{\Omega_R}{2} U_{22} \end{aligned}\right\} \quad U_{22} = -U_{12}$$

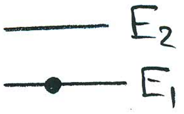
οπότε το κανονικοποιημένο $\vec{U}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Άρα $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \vec{U}_1 e^{-i\lambda_1 t} + c_2 \vec{U}_2 e^{-i\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} e^{+i\frac{\Omega_R}{2}t} + c_2 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C_1(t) e^{i\frac{(\Omega-\omega)}{2}t} \\ C_2(t) e^{-i\frac{(\Omega-\omega)}{2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \end{bmatrix} \xRightarrow{} \overset{\text{υποθέσαμε}}{(\Delta = 0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \end{bmatrix}$$

Έστωσαν
ΑΡΧΙΚΕΣ
ΣΥΝΘΗΚΕΣ



$C_1(0) = 1$ κ $C_2(0) = 0$

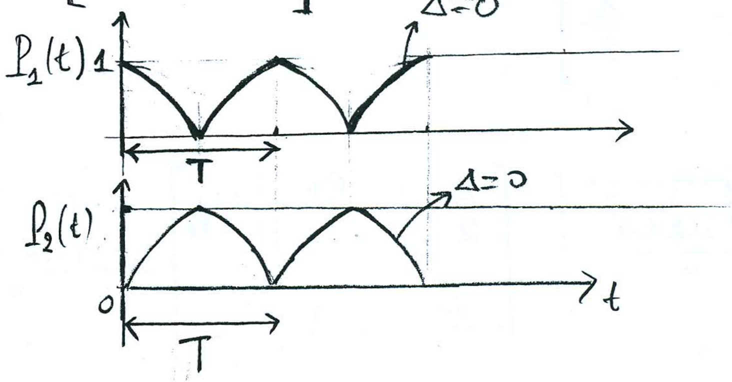
Άρα
$$\left.\begin{aligned} \frac{c_1}{\sqrt{2}} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} = 1 &\Rightarrow c_1 + c_2 = \sqrt{2} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} = 0 &\Rightarrow c_1 = c_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{1}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \\ i\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \end{bmatrix}$$

Άρα $\left|C_1(t)\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$

$\left|C_2(t)\right|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$



$$T = \frac{2\pi}{\Omega_R}$$

στο συντονισμό ($\omega = \Omega \Leftrightarrow \Delta = 0$) το πλάτος των ταλαντώσεων είναι $A=1$ (αλλιώς το πλάτος εξαρτάται από το detuning π.χ

$$A = \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2 + \Omega_R^2} \;)$$

Δείτε επόμενες σελίδες...

ΛΥΣΗ για $\Delta \neq 0$

$$A=\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \lambda_{2,1}=\pm\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}$$

ια $\lambda_1=-\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}$ $=-\lambda<0$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix}=-\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta}{2}U_{11}-\frac{\Omega_R}{2}U_{21}=-\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}U_{11} \Rightarrow \left(\frac{\Delta}{2}+\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\right)U_{11}=\frac{\Omega_R}{2}U_{21}$$

$$-\frac{\Omega_R}{2}U_{11}-\frac{\Delta}{2}U_{21}=-\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}U_{21} \Rightarrow -\frac{\Omega_R}{2}U_{11}=\left(\frac{\Delta}{2}-\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\right)U_{21}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta}{2}+\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\right)U_{11}=\frac{\Omega_R}{2}\,\frac{-\frac{\Omega_R}{2}U_{11}}{\left(\frac{\Delta}{2}-\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\right)} \xRightarrow{\text{άν } U_{11}\neq 0}$$

$\frac{\Delta^2}{4}-\frac{\Omega_R^2}{4}-\frac{\Delta^2}{4}=-\frac{\Omega_R^2}{4}$ που ισχύει, αρκεί δηλαδή $\boxed{U_{11}\neq 0}$

$$\Rightarrow \boxed{U_{21}=\frac{\frac{\Delta}{2}+\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}}U_{11}} \quad \text{ή} \quad U_{21}=\alpha U_{11}$$

$\vec{U}_1=\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha\beta \end{bmatrix}$ και για να είναι κανονικοποιημένο θα πρέπει $\beta^2+\alpha^2\beta^2=1 \Rightarrow \beta^2(1+\alpha^2)=1$

$\Rightarrow$ π.χ. $\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \Rightarrow \vec{U}_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \end{bmatrix}$

ια $\lambda_2=+\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}$ $=+\lambda>0$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix}=\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta}{2}U_{12}-\frac{\Omega_R}{2}U_{22}=\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}U_{12} \Rightarrow \left(\frac{\Delta}{2}-\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\right)U_{12}=\frac{\Omega_R}{2}U_{22}$$

$$-\frac{\Omega_R}{2}U_{12}-\frac{\Delta}{2}U_{22}=\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}U_{22} \Rightarrow -\frac{\Omega_R}{2}U_{12}=\left(\frac{\Delta}{2}+\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\right)U_{22}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta}{2}-\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\right)U_{12}=\frac{\Omega_R}{2}\,\frac{-\frac{\Omega_R}{2}U_{12}}{\left(\frac{\Delta}{2}+\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\right)} \xRightarrow{\text{άν } U_{12}\neq 0}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta^2}{4}-\frac{\Omega_R^2+\Delta^2}{4}=-\frac{\Omega_R^2}{4}$$ που ισχύει, άρκεί δηλαδή $\boxed{U_{12}\neq 0}$

$$\Rightarrow \boxed{U_{22}=\frac{\frac{\Delta}{2}-\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}}U_{12}}$$ ή $U_{22}=\alpha' U_{12}$

$\vec{U}_2=\begin{bmatrix}\beta'\\ \alpha'\beta'\end{bmatrix}$ και για να είναι κανονικοποιημένο θα πρέπει $\beta'^2+\alpha'^2\beta'^2=1 \Rightarrow$

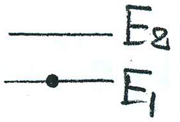
$\underset{\pi.\chi.}{\Rightarrow}$ $\beta'=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha'^2}}$, $\Rightarrow \vec{U}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha'^2}}\\ \frac{\alpha'}{\sqrt{1+\alpha'^2}}\end{bmatrix}$

Άρα

$$\vec{X}(t)=\begin{bmatrix}C_1(t)\\ C_2(t)\end{bmatrix}=c_1\vec{U}_1e^{-i\lambda_1 t}+c_2\vec{U}_2e^{-i\lambda_2 t}=\begin{bmatrix}\frac{c_1}{\sqrt{1+\alpha^2}}e^{-i\lambda_1 t}+\frac{c_2}{\sqrt{1+\alpha'^2}}e^{-i\lambda_2 t}\\ \frac{c_1\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}e^{-i\lambda_1 t}+\frac{c_2\alpha'}{\sqrt{1+\alpha'^2}}e^{-\lambda_2 t}\end{bmatrix}$$

$$\| \quad \begin{bmatrix}C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t}\\ C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t}\end{bmatrix}$$

έστωσαν αρχικές συνθήκες



$C_1(0)=1$ και $C_2(0)=0$

Άρα $1=\frac{c_1}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{c_2}{\sqrt{1+\alpha'^2}}$

$$0=\frac{c_1\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}+\frac{c_2\alpha'}{\sqrt{1+\alpha'^2}}\Rightarrow c_2=-\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{\sqrt{1+\alpha'^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}}c_1$$

$$1=\frac{c_1}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{\cancel{\sqrt{1+\alpha'^2}}}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{c_1}{\cancel{\sqrt{1+\alpha'^2}}}=c_1\frac{\alpha'-\alpha}{\alpha'\sqrt{1+\alpha^2}}\Rightarrow\boxed{c_1=\frac{\alpha'\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha'-\alpha}}$$

$$c_2=-\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{\sqrt{1+\alpha'^2}}{\cancel{\sqrt{1+\alpha^2}}}\frac{\alpha'\cancel{\sqrt{1+\alpha^2}}}{\alpha'-\alpha}\Rightarrow\boxed{c_2=-\frac{\alpha\sqrt{1+\alpha'^2}}{\alpha'-\alpha}}$$

$$\begin{bmatrix} C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha'}{\alpha'-\alpha}e^{-i\lambda_1 t} - \frac{\alpha}{\alpha'-\alpha}e^{-i\lambda_2 t} \\ \frac{\alpha\alpha'}{\alpha'-\alpha}e^{-i\lambda_1 t} - \frac{\alpha\alpha'}{\alpha'-\alpha}e^{-i\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

$$\alpha'-\alpha = \frac{\frac{\Delta}{2}-\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}-\frac{\Delta}{2}-\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}} = -\frac{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{\Omega_R}$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha'-\alpha} = -\frac{\cancel{\Omega_R}}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}\,\frac{(\Delta-\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2})}{\cancel{\Omega_R}} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}-\Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha'-\alpha} = -\frac{\cancel{\Omega_R}}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}\,\frac{\Delta+\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{\cancel{\Omega_R}} = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}+\Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$

$$C_1(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} = \underbrace{\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}-\Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}}_{k_1}e^{i\lambda t} + \underbrace{\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}+\Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}}_{k_2}e^{-i\lambda t}$$ ή άνω έξισωση

$$C_1(t) = \left(k_1 e^{i\lambda t} + k_2 e^{-i\lambda t}\right)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \Rightarrow$$

$$|C_1(t)|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_1k_2e^{2i\lambda t} + k_1k_2e^{-2i\lambda t} = k_1^2+k_2^2+2k_1k_2\cos(2\lambda t) \Rightarrow$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2+\Delta^2+\Delta^2-\cancel{2\Delta\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}}{4(\Omega_R^2+\Delta^2)} + \frac{\Omega_R^2+\Delta^2+\Delta^2+\cancel{2\Delta\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}}{4(\Omega_R^2+\Delta^2)}$$

$$+2\,\frac{\Omega_R^2+\cancel{\Delta^2}-\cancel{\Delta^2}}{4(\Omega_R^2+\Delta^2)}\cos(2\lambda t) \Rightarrow$$

$$|C_1(t)|^2 = \frac{2(\Omega_R^2+2\Delta^2)}{4(\Omega_R^2+\Delta^2)} + \frac{2\Omega_R^2}{4(\Omega_R^2+\Delta^2)}\cdot\cos(2\lambda t) = \frac{\overset{+\Omega_R^2\ -\Omega_R^2}{\Omega_R^2+2\Delta^2}+\Omega_R^2\cdot\cos(2\lambda t)}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}$$

$$\boxed{|C_1(t)|^2 = 1 + \frac{\Omega_R^2(\cos(2\lambda t)-1)}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}} \qquad \boxed{\lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}$$

$$\boxed{\text{για } \Delta=0} \Rightarrow |C_1(t)|^2 = 1 + \frac{\Omega_R^2(\cos(2\frac{\Omega_R}{2}t)-1)}{2\Omega_R^2}$$

$$\Rightarrow |C_1(t)|^2 = \frac{2+\cos(\Omega_R t)-1}{2} = \frac{1+\cos(\Omega_R t)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |C_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$ όπως αναμενόταν

$-1 \le \cos(2\lambda t) \le 1$

$-2 \le \cos(2\lambda t)-1 \le 0$

$2K \le K[\cos(2\lambda t-1)] \le 0$

$2K \le 1+K[\cos(2\lambda t)-1] \le 1$ Δηλ. η μέγιστη τιμή του $|C_1(t)|^2$ είναι 1, η ελάχιστη τιμή $1-\frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}$ και το πλάτος της ταλαντώσεως $\boxed{d = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}}$

$$\frac{\alpha\alpha'}{\alpha'-\alpha}=\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}+\Delta}{\Omega_R}\cdot\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}-\Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}=\frac{\Omega_R^{\cancel{2}}+\cancel{\Delta^2}-\cancel{\Delta^2}}{2\cancel{\Omega_R}\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}=\frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$ ὁπότε

$$C_2(t)\,e^{i\frac{\Delta}{2}t}=\frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}e^{+i\lambda t}-\frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}e^{-i\lambda t}=\frac{\Omega_R}{\cancel{2}\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}\cancel{2}i\sin(\lambda t)=\frac{\Omega_R}{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}i\sin(\lambda t)$$

$$\Rightarrow\boxed{|C_2(t)|^2=\frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}\sin^2(\lambda t)}$$

$$\boxed{\lambda=\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}$$

$$\boxed{\boxed{\text{για } \Delta=0}\Rightarrow|C_2(t)|^2=\sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)}$$

<u>ὅπως ἀναμενόταν</u>

ἡ μέγιστη τιμή τοῦ $|C_2(t)|^2$ εἶναι $\frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}$ καὶ ἡ ἐλάχιστη 0, ἄρα τὸ πλάτος τῆς ταλαντώσεως

$$\boxed{d=\frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$

(1)

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0\wp}{2\hbar}\,e^{-i(\Omega-\omega)t} \qquad \Omega_R := \frac{\mathcal{E}_0\wp}{\hbar}$$

$$\dot{C}_2(t) = C_1(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0\wp}{2\hbar}\,e^{i(\Omega-\omega)t} \quad Ⓗ \ (\text{RWA}) \qquad \Delta := \omega-\Omega$$

Θα λύσουμε τις έξισωσεις Ⓗ για αρχικές συνθήκες $C_1(0)=1$ και $C_2(0)=0$

Θα ακολουθήσουμε την προσεγγιστική επαναληπτική μέθοδο Newton παίρνοντας ως μηδενικής τάξεως προσέγγιση

δηλ.

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$C_1^{(0)}(t) \simeq C_1(0) = 1$$
$$C_2^{(0)}(t) \simeq C_2(0) = 0$$

δηλ. για μικρούς χρόνους η λύση δεν απέχει πολύ από τις αρχικές συνθήκες

$$\dot{C}_1^{(1)}(t) = \cancelto{0}{C_2^{(0)}(t)}\,\frac{i\Omega_R}{2}\cdot e^{i\Delta t} = 0$$

$$\dot{C}_2^{(1)}(t) = \cancelto{1}{C_1^{(0)}(t)}\,\frac{i\Omega_R}{2}\,e^{-i\Delta t} \Rightarrow \int_0^{t'}\frac{dC_2^{(1)}(t)}{dt}dt = \frac{i\Omega_R}{2}\int_0^{t'}e^{-i\Delta t}dt \Rightarrow$$

$$C_2^{(1)}(t') - \cancelto{0}{C_2^{(1)}(0)} = \frac{i\Omega_R}{2}\,\frac{1}{-i\Delta}\left[e^{-i\Delta t}\right]_0^{t'} = -\frac{\Omega_R}{2\Delta}\left(e^{-i\Delta t'}-1\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &C_2^{(1)}(t) = -\frac{\Omega_R}{2\Delta}\left(e^{-i\Delta t}-1\right) \\ (*)\ &e^{ix}-1 = 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_2^{(1)}(t) = -\frac{\Omega_R}{2\Delta}2i\sin\left(\frac{-\Delta t}{2}\right)\cdot e^{-\frac{i\Delta t}{2}} \Rightarrow$$

$$C_2^{(1)}(t) = \frac{\Omega_R}{\Delta}i\sin\left(\frac{\Delta t}{2}\right)e^{-\frac{i\Delta t}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{P_2^{(1)}(t) = \left|C_2^{(1)}(t)\right|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2}\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)} \quad ή \quad \boxed{P_2^{(1)}(t) = \left|C_2^{(1)}(t)\right|^2 = \frac{\Omega_R^2}{4}\,\frac{\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2}\,t^2}$$

πιθανότητα απορροφήσεως
σε διστάθμικό άτομο
για πολωμένο ή μονοχρωματικό ορατό φως.

(*)

$$\cos x + i\sin x - 1 = 2i\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) + 2i\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)i\sin\left(\tfrac{x}{2}\right)$$
$$= i\sin x - 2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$\cos x - \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = -2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$\cos x - \cos^2\frac{x}{2} = -\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

$$\cos(a\pm\beta) = \cos a\cos\beta \mp \sin a\sin\beta$$
$$\sin(a\pm\beta) = \sin a\cos\beta \pm \sin\beta\cos a$$

$$f(x) \equiv \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1}\right)^2 = 1$$

για $x=0$
απόλυτο μέγιστο
με τιμή 1

για $x=n\pi$, $n\in\mathbb{Z}^*$
απόλυτα ελάχιστα
με τιμή 0

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin x = 0 \oplus \Rightarrow x = n\pi$$

$$n\in\mathbb{Z}^*$$

άς ψάξουμε για τοπικά μέγιστα και ελάχιστα

$$f'(x) = \frac{2\sin x\cos x \cdot x^2 - \sin^2 x . 2x}{x^4}$$

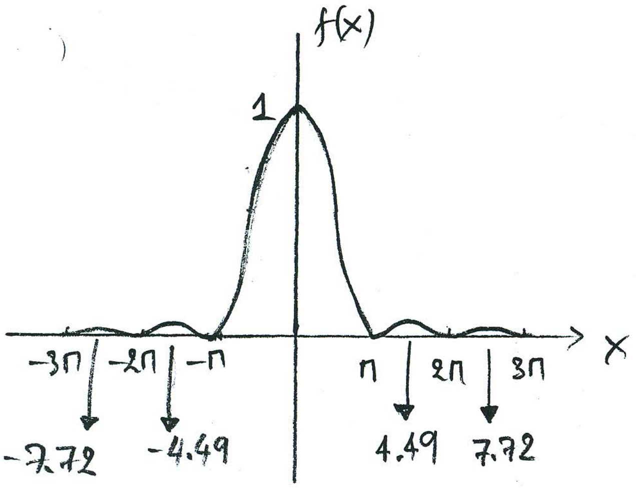
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2\cdot x\cdot \sin x\,(x\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } \sin x = 0 \text{ ή } x = \tan x$$

$x=0$ $\Downarrow$ το απόλυτο μέγιστο

$\sin x=0$ $\Downarrow$ τα απόλυτα ελάχιστα ($x=n\pi$, $n\in\mathbb{Z}^*$)

$x=\tan x$ $\Downarrow$ $x \simeq \pm 4.49$, ± 7.72, ...

αν το διερευνήσουμε θα διαπιστώσουμε ότι πρόκειται για τοπικά μέγιστα



Αν μάς ενδιαφέρει η πιθανότητα απορροφήσεως σε διστάθμικό άτομο για πολωμένο ορατό φώς αλλά όχι μονοχρωματικό (να προέρχεται από μεγάλη περιοχή κυκλικών συχνοτήτων γύρω από το $w_0 = \Omega$)

③

*** ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΟΥΜΕ ***

$$\mathcal{E}_0^2 = \int_{\Omega - \text{κάτι}}^{\Omega + \text{κατι}} d\omega \, \frac{\rho(\omega)}{\epsilon_0}$$

ϵ_0: διηλεκτρική σταθερά κενού $[\epsilon_0] = \frac{C^2}{Nm^2}$

ρ: πυκνότητα ενέργειας
ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη $[\rho] = \frac{J}{m^3 Hz} = \frac{Js}{m^3}$
περιοχή συχνότητας

$$\text{Άρα} \left[\int \frac{d\omega \, \rho(\omega)}{\epsilon_0} \right] = \frac{\cancel{Hz}\, J}{m^{\cancel{3}} \cancel{Hz}} \frac{N m^{\textcircled{2}}}{C^2} = \frac{JN}{m \cdot C^2} = \frac{N^2 m}{m \cdot C^2} = \frac{N^2}{C^2} = \left[\mathcal{E}_0^2\right]$$

ΟΠΟΤΕ,
ΑΠΟ ΤΗΝ

$$\mathcal{P}_2^{(1)}(t) = \left| C_2^{(1)}(t) \right|^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2 \wp^2}{4\hbar^2} \frac{\sin^2\left(\frac{(\omega - \Omega)t}{2}\right)}{\left(\frac{(\omega - \Omega)t}{2}\right)^2} t^2$$

ΚΑΤΑΛΗΓΟΥΜΕ ΣΤΗΝ

$$\mathcal{P}_2^{(1)}(t) = \left| C_2^{(1)}(t) \right|^2 = \frac{\wp^2}{4\hbar^2} \int_{\Omega - \text{κατι}}^{\Omega + \text{κατι}} d\omega \, \frac{\rho(\omega)}{\epsilon_0} \frac{\sin^2\left(\frac{(\omega - \Omega)t}{2}\right)}{\left(\frac{(\omega - \Omega)t}{2}\right)^2} t^2$$

$$x := \frac{(\omega - \Omega)t}{2}$$

$$\frac{2x}{t} + \Omega = \omega$$

$$d\omega = \frac{2}{t} dx$$

Άρα

$$\mathcal{P}_2^{(1)}(t) = \frac{\wp^2}{4\hbar^2} \frac{2}{t} \frac{1}{\epsilon_0} t^2 \int_{-\text{κατι}}^{\text{κατι}} dx \, \rho(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} \Rightarrow \mathcal{P}_2^{(1)}(t) = \frac{\wp^2 \cdot t}{2\hbar^2 \epsilon_0} \int_{-\text{κατι}}^{\text{κατι}} dx \, \rho(x) \boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2}}$$

$$\simeq \pi \delta(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_2^{(1)}(t) = \frac{\wp^2 t}{2\hbar^2 \epsilon_0} \rho(x=0) \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow \frac{(\omega - \Omega)}{2} t = 0 \\ t \text{ πεπερασμένος} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = \Omega$$

$$\mathcal{P}_2^{(1)}(t) = \frac{\wp^2 t \pi}{2\hbar^2 \epsilon_0} \rho(\Omega) \Rightarrow \boxed{\frac{d\mathcal{P}_2^{(1)}(t)}{dt} = \frac{\wp^2 \pi}{2\hbar^2 \epsilon_0} \rho(\Omega)}$$

Στην περίπτωση που η ΗΜ ακτινοβολία προέρχεται από μέλαν σώμα δεν είναι πολωμένη, εν γένει, και κατά ένα τρόπο το $\rho(\Omega)$ μιας πολώσεως θα πρέπει να αντικατασταθεί με το $\frac{\rho(\Omega)}{3}$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\langle \mathcal{E}_0^2 \rangle = \langle \mathcal{E}_{0x}^2 + \mathcal{E}_{0y}^2 + \mathcal{E}_{0z}^2 \rangle = 3\langle \mathcal{E}_{0z}^2 \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{E}_{0z}^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle \mathcal{E}_0^2 \rangle$$

Άρα θα έπρεπε

$$\boxed{\frac{dP_2^{(1)}(t)}{dt} = \frac{\wp^2 \pi}{2\hbar^2 \epsilon_0} \frac{\rho(\Omega)}{3}}$$

Αλλά η πιθανότητα απορρόφησης είναι

$$dW^{\varepsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = B_{12}\,\rho(\nu)\,dt \Rightarrow$$

$$\frac{dW^{\varepsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho}}{dt} = B_{12}\,\rho(\nu)$$

α $\omega=\Omega$

$$\boxed{\frac{dW^{\varepsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho}}{dt} = B_{12}\,\rho(\Omega)}$$

$$\boxed{B_{12} = \frac{\wp^2 \pi}{6\hbar^2 \epsilon_0}}$$

ενώ υπενθυμίζεται ότι είχαμε βρει

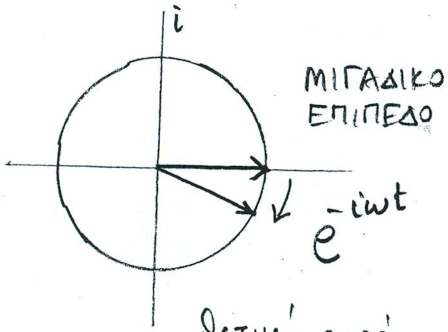
$$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}} \quad \text{και} \quad \boxed{B_{12} = B_{21}}$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ | Rotating Waves

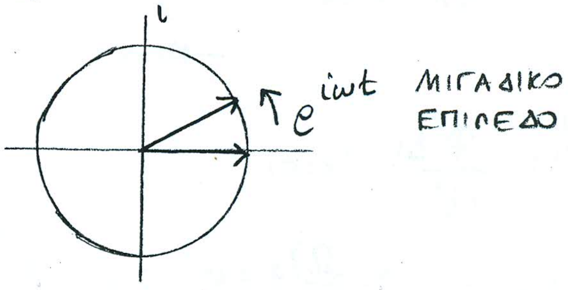
Έστω $\vec{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 \hat{z} \cos\omega t$

Μερικές φορές είναι βολικό να αποσυνδέσουμε το πεδίο στην θετικώς περιστρεφόμενη και στην αρνητικώς εριστρεφόμενη του συνιστώσα, $\vec{\mathcal{E}}(t)^{(+)}$ και $\vec{\mathcal{E}}(t)^{(-)}$ αντιστοίχως. Δηλαδή

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{2}\hat{z}\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) = \frac{\mathcal{E}_0}{2}\hat{z}\,e^{-i\omega t} + \frac{\mathcal{E}_0}{2}\hat{z}\,e^{i\omega t} := \vec{\mathcal{E}}(t)^{(+)} + \vec{\mathcal{E}}(t)^{(-)}$$



θετική φορά
κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου

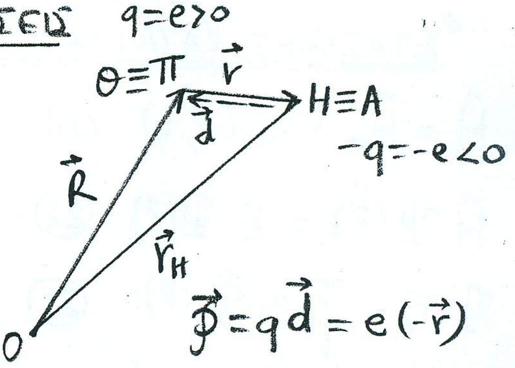


αρνητική φορά

ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΑΠΑΓΟΡΕΥΜΕΝΕΣ ΟΠΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΕΙΣ

(ἐντός)

DIPOLE APPROXIMATION (ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΔΙΠΟΛΟΥ)



$$\vec{\mathcal{p}}=q\vec{d}=e(-\vec{r})$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\mathcal{E}}=\vec{\mathcal{E}}_a\exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}_H-\omega t+\varphi\right)\right]\\ \vec{r}_H\simeq\vec{R}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\mathcal{E}}=\vec{\mathcal{E}}_0\exp(-i\omega t)=\vec{\mathcal{E}}(t)\\ \left.\begin{array}{l}\vec{\mathcal{E}}=-\vec{\nabla}V\\ dV=\vec{\nabla}V\cdot d\vec{r}\end{array}\right\}dV=-\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{r}\end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{δυναμικό}}}{V}=-\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{r}\Rightarrow\boxed{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{δυναμική}\\ \text{ενέργεια}}}{U}=e\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{r}=-\vec{\mathcal{p}}\cdot\vec{\mathcal{E}}}\ ⊛$$

$$U_{\varepsilon k'k}=\int d^3\vec{r}\,\Phi^*_{k'}(\vec{r})\,U_\varepsilon(\vec{r},t)\,\Phi_k(\vec{r})$$

στοιχείο πίνακα της δυναμικής ενέργειας της διαταραχής

$$\Downarrow ⊛$$

$$U_{\varepsilon k'k}=-\vec{\mathcal{E}}\cdot\underbrace{\int d^3\vec{r}\,\Phi^*_{k'}(\vec{r})\,\vec{\mathcal{p}}\,\Phi_k(\vec{r})}\rightarrow\vec{\mathcal{p}}_{k'k}$$

στοιχείο πίνακα της διπολικής ροπής

$$\vec{\mathcal{p}}_{k'k}=-e\,\vec{r}_{k'k}$$

ή

$$U_{\varepsilon k'k}=e\vec{\mathcal{E}}\cdot\underbrace{\int d^3\vec{r}\,\Phi^*_{k'}(\vec{r})\,\vec{r}\,\Phi_k(\vec{r})}\rightarrow\vec{r}_{k'k}$$

στοιχείο πίνακα της θέσεως του ηλεκτρονίου ως προς τον πυρήνα

Ἀν $U_{\varepsilon k'k}(t)=0$ ἡ διαταραχή δεν συζεύγνει τις k', k καταστάσεις, οπότε, εάν το ἡλεκτρόνιο ἦταν στην k δεν θα μεταβεί στην k', δηλαδή εάν $U_{\varepsilon k'k}(t)=0\Rightarrow$ ἀπαγορεύεται ἡ μετάβαση $k'\leftrightarrow k$.

Ὅπως βλέπουμε, ὅλα ἀνάγονται στη συμμετρία των κυματοσυναρτήσεων.

"ΣΤΑΣΙΜΕΣ" ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΡΑΓΜΕΝΟΥ ΑΤΟΜΟΥ (δηλαδή με ΗΜ πεδίο)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + U_\mathcal{E}(\vec{r},t) \quad (\Delta 1)$$

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}) = E\,\Psi(\vec{r}) \quad (\Sigma 2)$$

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_k g_k \Phi_k(\vec{r}) \quad (\Sigma 3)$$

ὑποθέτουμε ὅτι μποροῦμε να ἀναπτύξουμε την $\Psi(\vec{r}')$ συναρτήσει τῶν ἰδιοσυναρτήσεων του ἀδιατάρακτου προβλήματος $\Phi_k(\vec{r})$

$$\Rightarrow \left[\hat{H}_0 + U_\mathcal{E}(\vec{r},t)\right]\sum_k g_k \Phi_k(\vec{r}) = E\left[\sum_k g_k \Phi_k(\vec{r})\right]$$

Ἄς ἐκμεταλλευτοῦμε ὅτι οἱ $\Phi_k(\vec{r})$ εἶναι ὀρθοκανονικές. Πολλαπλασιάζουμε με $\Phi_{k'}(\vec{r})^*$ και ὁλοκληρώνουμε στο χῶρο

$$\Rightarrow \sum_k g_k \int d^3\vec{r}\,\Phi_{k'}(\vec{r})^*\hat{H}_0\Phi_k(\vec{r}) + \sum_k g_k \int d^3\vec{r}\,\Phi^*_{k'}(\vec{r})U_\mathcal{E}(\vec{r},t)\Phi_k(\vec{r}) = E\sum_k g_k \int d^3\vec{r}\,\Phi^*_{k'}(\vec{r})\Phi_k(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \sum_k g_k E_k \delta_{k'k} + \sum_k g_k U_{\mathcal{E}k'k}(t) = E\sum_k g_k \delta_{k'k} \Rightarrow \boxed{g_{k'}E_{k'} + \sum_k g_k U_{\mathcal{E}k'k}(t) = E\,g_{k'}}$$

ἐάν ἔχουμε προσέγγιση διπόλου $U = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}} = +e\vec{r}\cdot\vec{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} = U_\mathcal{E}(\vec{r},t)$

$$U_{\mathcal{E}k'k}(t) = e\,e^{-i\omega t}\vec{\mathcal{E}}_0\cdot\vec{r}_{k'k}$$

$\Rightarrow$ (λαμβάνοντας τη μέση τιμή σε μια περίοδο $\frac{2\pi}{\omega}$ τοῦ ΗΜ πεδίου) $\Rightarrow \boxed{E = E_{k'}}$

δηλαδή δεν ἐπηρεάζονται οἱ ἰδιοενέργειες α

Επιτρεπόμενες και απαγορευμένες οπτικές μεταβάσεις στο άτομο του Υδρογόνου.

Θεωρήστε τις ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του Υδρογόνου
$$\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\varphi) = \Phi_k(\boldsymbol{r})$$
όπου $k = \{n, l, m\}$ ο συλλογικός κβαντικός αριθμός. Δηλαδή
n = 1, 2, 3, … είναι ο **κύριος κβαντικός αριθμός**,
l = 0, 1, 2, … , n–1 είναι ο **τροχιακός κβαντικός αριθμός**, και
m = –l, –l+1, … , l–1, l είναι ο **μαγνητικός κβαντικός αριθμός**.
Συγκεκριμένα δίνονται οι

$$\Psi_{100}(r,\theta,\varphi) = (\pi\alpha_o^3)^{-1/2}\, e^{-\frac{r}{a_0}}$$
$$\Psi_{200}(r,\theta,\varphi) = (32\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,(2-\frac{r}{a_0})\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$$
$$\Psi_{210}(r,\theta,\varphi) = (32\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{r}{a_0}\cos\theta\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$$
$$\Psi_{21\pm1}(r,\theta,\varphi) = (64\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{r}{a_0}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$$
$$\Psi_{300}(r,\theta,\varphi) = (19683\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\,(27-18\frac{r}{a_0}+2\frac{r^2}{a_0^2})\, e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

Οι αντίστοιχες ιδιοενέργειες είναι $E_k = \hbar\Omega_k = -\frac{R_E}{n^2} = E_n$, δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός ως προς l,m.
R_E = 13.6 eV είναι η ενέργεια Rydberg και a_0 είναι η ακτίνα Bohr.

0. Να ελεγχθεί αν όλες οι παραπάνω δεδομένες κυματοσυναρτήσεις είναι κανονικοποιημένες.

1. Να χαρακτηριστούν όλες οι παραπάνω δεδομένες κυματοσυναρτήσεις (π.χ. η πρώτη είναι η 1s) και να ελεγχθεί αν είναι άρτιες ή περιττές.

2. Να αποφανθείτε αν μηδενίζονται ή όχι τα ολοκληρώματα $\boldsymbol{r}_{k_1k_2} := \int_{\text{παντο ύ}} dV\, \Phi_{k_1}^*(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\Phi_{k_2}(\boldsymbol{r})$. Τα ολοκληρώματα αυτά είναι ανάλογα με τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής $\boldsymbol{p} = (-e)\boldsymbol{r}$, δηλαδή $\boldsymbol{p}_{k_1k_2} := \int_{\text{παντο ύ}} dV\, \Phi_{k_1}^*(\boldsymbol{r})(-e)\boldsymbol{r}\Phi_{k_2}(\boldsymbol{r})$.
   Εάν το στοιχείο πίνακα της διπολικής ροπής μηδενίζεται, δεν υπάρχει τέτοια οπτική μετάβαση.

3. Προβλέψτε λοιπόν ποιες από τις μεταβάσεις μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων που δίνονται επιτρέπονται και ελέγξτε αν ισχύουν οι «κανόνες επιλογής» $\Delta l = \pm1$, $\Delta m = 0, \pm1$.

4. Ελέγξτε αν οι δεδομένες $\Phi_k(\boldsymbol{r})$ είναι ορθογώνιες.

5. Υπολογίστε τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής $\boldsymbol{p}_{100\ 210}$ και $\boldsymbol{p}_{100\ 21\pm1}$.

6. Είναι τα μέτρα των $\boldsymbol{p}_{100\ 210}$ και $\boldsymbol{p}_{100\ 21\pm1}$ ίσα;

Θεωρείστε δεδομένα

Α) $\int_0^\infty e^{-\gamma r}\, r^n\, dr = \gamma^{-(n+1)}\, n!$ όπου n = 1, 2, 3, … και γ > 0.

Β) σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ), η αντιστροφή ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς δηλαδή η πράξη $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ αντιστοιχεί στις αλλαγές r′ = r, θ′ = π – θ, και φ′ = φ + π.

Γ) Ισχύει η παρακάτω έκφραση για το διάνυσμα θέσεως:
$\mathbf{r} = \frac{r}{2}\sin\theta\,[(\hat{x}-i\hat{y})\,\mathrm{e}^{i\varphi} + (\hat{x}+i\hat{y})\,\mathrm{e}^{-i\varphi}] + r\cos\theta\,\hat{z}$.

ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΕΣ κ ΑΠΑΓΟΡΕΥΜΕΝΕΣ ΟΠΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΑΤΟΜΟ ΤΟΥ ΥΔΡΟΓΟΝΟΥ

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ $$n'l'm'nlm := \int d^3\vec{r}\, \Psi^*_{n'l'm'} \Psi_{nlm}$$

$$n'l'm'\vec{r}nlm := \int d^3\vec{r}\, \Psi^*_{n'l'm'} \vec{r}\, \Psi_{nlm}$$

2. $$100100 := \int d^3\vec{r}\, \Psi^*_{100}\Psi_{100} = \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} =$$

θέτουμε $q = \frac{r}{a_0}$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3}\int_0^\infty dr\, r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{a_0^3}{\pi a_0^3}\int_0^\infty dq\cdot q^2 e^{-2q}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi \cdot 2\pi$$

$$= 2\int_0^\infty dq\cdot q^2 e^{-2q}\left[-\cos\pi + \cos 0\right] = 4\cdot\int_0^\infty dq\cdot q^2\cdot e^{-2q} = 4\,\frac{2!}{2^{2+1}} = \frac{4.2}{2^3} = 1$$

ΔΕΔΟΜΕΝΟ Α). $\int_0^\infty e^{-\gamma r} r^n dr = \gamma^{-(n+1)} n!$, εδώ $r \to q$, $\gamma = 2$, $n = 2$

Δηλαδή η 100 είναι κανονικοποιημένη, όπως αναμενόταν.

Όμοιως ελέγχεται η κανονικοποίηση και των υπολοίπων, ήτοι 200200
210210
21±1 21±1
300300

Ψ_{100}	$n=1$	$l=0$	$m=0$	1s	$*$ Το $e^{\pm i\varphi} \to e^{\pm i\varphi'} = e^{\pm i(\varphi+\pi)} = e^{\pm i\varphi} e^{\pm i\pi} = (-1)e^{\pm i\varphi}$ δηλ. η περιττότητα της οφείλεται στο φ. Όπως άλλωστε γνωρίζουμε "εγκυκλοπαιδικά", οι τύπου s είναι άρτιες και οι τύπου p περιττές.
Ψ_{200}	$n=2$	$l=0$	$m=0$	2s	
Ψ_{210}	$n=2$	$l=1$	$m=0$	2p	πρόκειται για την $2p_z$
$\Psi_{21\pm1}$	$n=2$	$l=1$	$m=\pm1$	2p	από γραμμικό συνδυασμό τους με + προκύπτει η $2p_x$ με − προκύπτει η $2p_y$
Ψ_{300}	$n=3$	$l=0$	$m=0$	3s	

Ο έλεγχος αρτιότητας γίνεται με τη βοήθεια του ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ Β) $\vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r}$

ΤΙΑ $\Psi_{100}(-\vec{r}) = \Psi_{100}(\vec{r})$ διότι εξαρτάται μόνο από το r και αυτό δεν αλλάζει με την πράξη √

ΤΙΑ $\Psi_{200}(-\vec{r}) = \Psi_{200}(\vec{r})$ »

ΤΙΑ $\Psi_{300}(-\vec{r}) = \Psi_{300}(\vec{r})$ $\vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r}$

ΙΤΤΗ $\Psi_{210}(-\vec{r}) = -\Psi_{210}(\vec{r})$ επειδή εξαρτάται όχι μόνο από το r (που δεν αλλάζει με την πράξη √) αλλά και από το cosθ το οποίο θα γίνει $\cos\theta' = \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$

ΙΤΤΗ $\Psi_{21\pm1}(-\vec{r}) = -\Psi_{21\pm1}(\vec{r})$ εξαρτάται από το r (που δεν αλλάζει με την πράξη $\vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r}$), από το sinθ που πάει στο $\sin\theta' = \sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ δηλ. και αυτό δεν

3. $\vec r_{k_1k_2} := \int d^3\vec r\, \Phi^*_{k_1}(\vec r)\,\vec r\,\Phi_{k_2}(\vec r)$ ΑΡΤΙΑ (Α) ΠΕΡΙΤΤΗ (Π) γ

$_1=\{n_1,l_1,m_1\}$	$k_2=\{n_2,l_2,m_2\}$	$\Phi^*_{k_1}(\vec r)$	$\Phi_{k_2}(\vec r)$	$\Phi^*_{k_1}(\vec r)\vec r\Phi_{k_2}(\vec r)$	$\vec r_{k_1k_2}$	Δl	Δm	Ισχύει ο κανών επιλογής $\Delta l=\pm1,\ \Delta m=0,\pm1$
100 1s	200 2s	(Α)	(Α)	(Π) ΑΠΑΓ.	0	0	0	ΝΑΙ
100 1s	210 $2p_z$	(Α)	(Π)	(Α) ΕΠΙΤΡ.	≠0	1	0	ΝΑΙ
100 1s	21±1 $2p_{xy}$	(Α)	(Π)	(Α) ΕΠΙΤΡ.	≠0	1	±1	ΝΑΙ
100 1s	300 3s	(Α)	(Α)	(Π) ΑΠΑΓ.	0	0	0	ΝΑΙ
200 2s	210 $2p_z$	(Α)	(Π)	(Α) ΕΠΙΤΡ.★	≠0	1	0	ΝΑΙ
200 2s	21±1 $2p_{xy}$	(Α)	(Π)	(Α) ΕΠΙΤΡ.★	≠0	1	±1	ΝΑΙ
200 2s	300 3s	(Α)	(Α)	(Π) ΑΠΑΓ.	0	0	0	ΝΑΙ
210 $2p_z$	21±1 $2p_{xy}$	(Π)	(Π)	(Π) ΑΠΑΓ.	0	0	±1	ΝΑΙ
210 $2p_z$	300 3s	(Π)	(Α)	(Α) ΕΠΙΤΡ.	≠0	−1	0	ΝΑΙ
21±1 $2p_{xy}$	300 3s	(Π)	(Α)	(Α) ΕΠΙΤΡ.	≠0	−1	∓1	ΝΑΙ

★Όμως στο άτομο του υδρογόνου η αρχική και η τελική κατάσταση αντιστοιχούν στην ίδια ενέργεια, είναι δηλαδή εκφυλισμένες. Άρα επί τη ουσία δεν υπάρχουν τέτοιες μεταβάσεις.

4. Επί παραδείγματι

$$100200 = \int d^3\vec r\, \overset{(A)}{\Psi^*_{100}}\, \overset{(A)}{\Psi_{200}} = \frac{1}{\pi a_0^3\sqrt{32}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi\; e^{-\frac{r}{a_0}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

θέτουμε $q=\frac{r}{a_0}$

$$=\frac{1}{4\pi a_0^3\sqrt2}4\pi\int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}dr = \frac{1}{a_0^3\sqrt2}a_0^3\int_0^\infty q^2 e^{-q}(2-q)e^{-\frac{q}{2}}dq$$

$$=\frac{2}{\sqrt2}\int_0^\infty e^{-\frac{3q}{2}}q^2dq - \frac{1}{\sqrt2}\int_0^\infty e^{-\frac32 q}q^3dq$$

ΔΕΔΟΜΕΝΟ Α

$$\int_0^\infty e^{-\gamma r}r^n dr = \frac{n!}{\gamma^{n+1}}$$

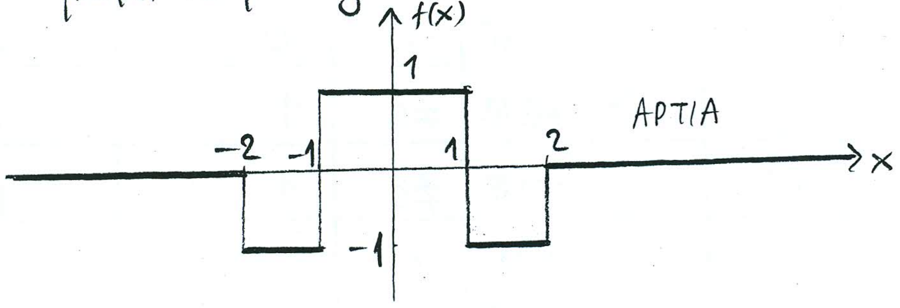
$r\to q,\ \gamma=\frac32,\ n=2$ $r\to q,\ \gamma=\frac32,\ n=3$

$$=\sqrt2\,\frac{2!}{\left(\frac32\right)^{2+1}} - \frac{1}{\sqrt2}\frac{3!}{\left(\frac32\right)^{3+1}} = \frac{2^{3/2}\cdot 2^3}{3^3} - \frac{2^{1/2}\textcircled{3}\cdot 2^4}{\textcircled{3^4}} = \frac{2^{9/2}}{3^3} - \frac{2^{9/2}}{3^3} = 0 \Rightarrow$$

$100200 = 0 \Rightarrow \Psi_{100}$ κ Ψ_{200} ορθογώνιες όπως αναμενόταν.

Όμοιως υπολογίζονται και τα υπόλοιπα εσωτερικά γινόμενα μεταξύ των διαφορετικών ιδιοσυναρτήσεων, που πράγματι μηδενίζονται.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το ολοκλήρωμα σε όλο το χώρο μιάς άρτιας συναρτήσεως δεν είναι εκ ταυτότητος μηδέν. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να μηδενίζεται, π.χ.



ενώ το ολοκλήρωμα σε όλο το χώρο μιας περιττής συναρτήσεως εκ ταυτότητος μηδενίζεται διότι π.χ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) = \int_{-\infty}^{0} dx\, f(x) + \int_{0}^{+\infty} dx\, f(x) = -\int_{+\infty}^{0} d\psi\, f(-\psi) + \int_{0}^{+\infty} dx\, f(x)$$

θέτουμε $\psi = -x$

$$= -\int_{0}^{+\infty} d\psi\, f(\psi) + \int_{0}^{+\infty} dx\, f(x) = 0$$

$\vec{\mathcal{P}}_{k'k} = -e\,\vec{r}_{k'k}$

όπότε ό ύπολογισμός τών $\vec{\mathcal{P}}_{100210}$ και $\vec{\mathcal{P}}_{10021\pm1}$

ανάγεται στον ύπολογισμό τών $\vec{r}_{100210}$ και $\vec{r}_{10021\pm1}$, αντιστοίχως

$$\vec{r}_{100210} = 100\,\vec{r}\,210 = \int d^3\vec{r}\;\Psi^*_{100}\,\vec{r}\,\Psi_{210} =$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3\sqrt{32}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\; e^{-\frac{r}{a_0}}\,\vec{r}\,\frac{r}{a_0}\cos\theta\,e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\Big\downarrow \text{ ΔΕΔΟΜΕΝΟ Γ)}$$

$$= \frac{1}{4\pi a_0^3\sqrt{2}}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi\; e^{-\frac{r}{a_0}}\left\{\frac{r}{2}\sin\theta\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+r\cos\theta\,\hat{z}\right\}\cdot\frac{r}{a_0}\cos\theta\,e^{-\frac{r}{2a_0}} =$$

$$\frac{1}{4\pi a_0^3\sqrt{2}}\underbrace{\int_0^\infty r^2 dr\,e^{-\frac{r}{a_0}}\,r\,\frac{r}{a_0}\,e^{-\frac{r}{2a_0}}}_{I(r)}\left\{\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\,d\varphi\,\frac{1}{2}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]\cos\theta + \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,\cos^2\theta\,\hat{z}\right\}$$

$$\frac{d\cos^3\theta}{d\theta} = 3\cos^2\theta(-1)\sin\theta \Longrightarrow \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{d\cos^3\theta}{-3}$$

θέτουμε $q = \frac{r}{a_0}$

ΕΔΟΜΕΝΟ Α) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\gamma r} r^n dr = \frac{n!}{\gamma^{n+1}}$

$$I(r) = a_0^4\cdot\int_0^\infty q^2 dq\,e^{-q}\,q\,q\,e^{-\frac{q}{2}} = a_0^4\int_0^\infty dq\cdot q^4\,e^{-\frac{3q}{2}} = a_0^4\cdot\frac{4!}{\left(\frac{3}{2}\right)^{4+1}} = a_0^4\,\frac{2\cdot3\cdot4}{3^5}2^5$$

$$r\to q,\ n=4,\ \gamma=\frac{3}{2} \qquad = a_0^4\cdot\frac{2^8}{3^4}$$

$$\int^{2\pi} e^{\pm i\varphi}d\varphi = \left[\frac{e^{\pm i\varphi}}{i}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int^{2\pi} d\varphi\int_0^\pi \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta\,\hat{z} = 2\pi\hat{z}\cdot\int_1^{-1}\frac{d(\cos^3\theta)}{3}\cdot(-1) = \frac{2\pi\hat{z}}{3}\int_{-1}^1 d\psi = \frac{2\pi\hat{z}}{3}\left[\psi\right]_{-1}^1 = \frac{4\pi\hat{z}}{3}$$

a $\displaystyle\vec{r}_{100210} = \frac{1}{\cancel{4\pi} a_0^3\sqrt{2}}\,a_0^4\,\frac{2^8}{3^4}\,\frac{\cancel{4\pi}\hat{z}}{3} = a_0\hat{z}\,\frac{2^{15/2}}{3^5} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{100210} = 100\,\vec{r}\,210 = \frac{2^{15/2}}{3^5}a_0\hat{z}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{P}}_{100210} = -\frac{2^{15/2}}{3^5}e a_0\hat{z}} \qquad \left|\vec{\mathcal{P}}_{100210}\right| = \frac{2^{15/2}e a_0}{3^5}$$

ε.

$$_{10021\pm1} = 100\,\vec{r}\,21\,1\pm1 = \int d^3\vec{r}\,\Psi^*_{100}\,\vec{r}\,\Psi_{21\pm1} = \frac{1}{(\pi a_0^3)^{1/2}}\frac{1}{8(\pi a_0^3)^{1/2}}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\; e^{-\frac{r}{a_0}}\left\{\frac{r}{2}\sin\theta\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+r\cos\theta\,\hat{z}\right\}$$

$$\frac{r}{a_0}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}\; e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$= \frac{1}{8\pi a_0^3}\int_0^\infty dr\, r^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\, r\,\frac{r}{a_0}\, e^{-\frac{r}{2a_0}}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}+(\hat{x}+i\hat{y})e^{-i\varphi}\right]+\cos\theta\,\hat{z}\right\}$$

$$q=\frac{r}{a_0} \qquad \cdot\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$$= \frac{a_0 a_0^2 a_0}{8\pi a_0^3}\int_0^\infty dq\, q^2 e^{-q}\, q\cdot q\cdot e^{-\frac{q}{2}} \cdot \text{γωνιακή εξάρτηση} = \frac{a_0}{8\pi}\int_0^\infty dq\cdot q^4 e^{-\frac{3q}{2}}\cdot \gamma\epsilon$$

γε

$$n=4 \quad \gamma=\frac{3}{2}$$

$$= \frac{a_0}{8\pi}\frac{4!}{\left(\frac{3}{2}\right)^{4+1}}\cdot\gamma\epsilon = \frac{a_0}{\pi}\frac{2^5}{3^4}\gamma\epsilon$$

Αλλά $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{\pm 2i\varphi} = \left[\frac{e^{\pm 2i\varphi}}{\pm 2i}\right]_0^{2\pi} = 0 \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{\pm i\varphi} = \left[\frac{e^{\pm i\varphi}}{\pm i}\right] = 0$

$$\gamma\epsilon = \int_0^\pi d\theta\,\frac{\sin^3\theta}{2}\left[2\pi(\hat{x}\pm i\hat{y})\right] = \pi\left[\hat{x}\pm i\hat{y}\right]\int_0^\pi d\theta\,\sin^3\theta = \frac{4\pi}{3}\left[\hat{x}\pm i\hat{y}\right]$$

$$\int_0^\pi d\theta\sin^3\theta = \left[\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right]_0^\pi = -\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1$$

$$=\frac{4}{3}$$

διότι $\displaystyle\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right) = -\cos^2\theta\sin\theta+\sin\theta$

$$=\sin\theta\left[1-\cos^2\theta\right] = \sin^3\theta$$

Άρα

$$\vec{r}_{10021\pm1} = \frac{a_0}{\cancel{\pi}}\frac{2^5}{3^4}\frac{4\cancel{\pi}}{3}(\hat{x}\pm i\hat{y}) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{10021\pm1} = a_0\frac{2^7}{3^5}(\hat{x}\pm i\hat{y})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\mathfrak{J}}_{10021\pm1} = -e a_0\frac{2^7}{3^5}(\hat{x}\pm i\hat{y})} \Rightarrow \boxed{\left|\vec{\mathfrak{J}}_{10021\pm1}\right| = e a_0\frac{2^{15/2}}{3^5}}$$

6. Άρα $\left|\vec{\mathfrak{J}}_{100210}\right| = \left|\vec{\mathfrak{J}}_{10021\pm1}\right|$

$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0}$ (Δ1Κ) $\boxed{\vec{E}=\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}_e\cdot\vec{r}-\omega_e t+\delta_e)}=\vec{E}_0\, e^{\textcircled{e}}}$ (Λ1)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(E_{0x},E_{0y},E_{0z})\, e^{i(k_{ex}x+k_{ey}y+k_{ez}z-\omega_e t+\delta_e)}=$$

$$=E_{0x}\frac{\partial}{\partial x}+E_{0y}\frac{\partial}{\partial y}+E_{0z}\frac{\partial}{\partial z}e^{\textcircled{e}}=E_{0x}\,i k_{ex}e^{\textcircled{e}}+E_{0y}\,i k_{ey}e^{\textcircled{e}}+E_{0z}\,i k_{ez}e^{\textcircled{e}}=$$

$$=i(k_{ex},k_{ey},k_{ez})\cdot(E_{0x},E_{0y},E_{0z})e^{\textcircled{e}}=i\vec{k}_e\cdot\vec{E}_0 e^{\textcircled{e}}=i\vec{k}_e\cdot\vec{E}$$

Άρα $\vec{\nabla}\to i\vec{k}_e$ για την (Λ1)

Επίσης, επειδή $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ (Δ1Κ) $\Rightarrow i\vec{k}_e\cdot\vec{E}=0\Rightarrow\boxed{\vec{k}_e\cdot\vec{E}=0}\Rightarrow\boxed{\underset{\text{καθετοι}}{\vec{k}_e\perp\vec{E}}\Leftrightarrow\underset{\text{κάθετα}}{\vec{k}_e\perp\vec{E}_0}}$

$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0}$ (Δ2Κ) $\boxed{\vec{B}=\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}_b\cdot\vec{r}-\omega_b t+\delta_b)}=\vec{B}_0\, e^{\textcircled{b}}}$ (Λ2)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(B_{0x},B_{0y},B_{0z})\, e^{i(k_{bx}x+k_{by}y+k_{bz}z-\omega_b t+\delta_b)}=$$

$$=B_{0x}\frac{\partial}{\partial x}+B_{0y}\frac{\partial}{\partial y}+B_{0z}\frac{\partial}{\partial z}e^{\textcircled{b}}=B_{0x}\,i k_{bx}e^{\textcircled{b}}+B_{0y}\,i k_{by}e^{\textcircled{b}}+B_{0z}\,i k_{bz}e^{\textcircled{b}}=$$

$$=i(k_{bx},k_{by},k_{bz})\cdot(B_{0x},B_{0y},B_{0z})e^{\textcircled{b}}=i\vec{k}_b\cdot\vec{B}_0 e^{\textcircled{b}}=i\vec{k}_b\cdot\vec{B}$$

Άρα $\vec{\nabla}\longrightarrow i\vec{k}_b$ για την (Λ2)

Επίσης, επειδή $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ (Δ2Κ) $\Rightarrow i\vec{k}_b\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\boxed{\vec{k}_b\cdot\vec{B}=0}\Rightarrow\boxed{\underset{\text{κάθετα}}{\vec{k}_b\perp\vec{B}}\Leftrightarrow\underset{\text{κάθετα}}{\vec{k}_b\perp\vec{B}_0}}$

$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$ (Δ3Κ)

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ E_{0x}e^{\textcircled{e}}&E_{0y}e^{\textcircled{e}}&E_{0z}e^{\textcircled{e}}\end{vmatrix}=\begin{matrix}\hat{i}\left(E_{0z}\,i k_{ey}e^{\textcircled{e}}-E_{0y}\,i k_{ez}e^{\textcircled{e}}\right)\\ -\hat{j}\left(E_{0z}\,i k_{ex}e^{\textcircled{e}}-E_{0x}\,i k_{ez}e^{\textcircled{e}}\right)\\ +\hat{k}\left(E_{0y}\,i k_{ex}e^{\textcircled{e}}-E_{0x}\,i k_{ey}e^{\textcircled{e}}\right)\end{matrix}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ ik_{ex}&ik_{ey}&ik_{ez}\\ E_{0x}e^{\textcircled{e}}&E_{0y}e^{\textcircled{e}}&E_{0z}e^{\textcircled{e}}\end{vmatrix}$$

$$=i\vec{k}_e\times\vec{E}$$

$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=+i\omega_b\vec{B}$ Άρα $\boxed{\vec{k}_e\times\vec{E}=\omega_b\vec{B}}$

$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$ (Δ4Κ)

$\underset{\text{όμοιως}}{\vec{\nabla}\times\vec{B}=\ldots}=i\vec{k}_b\times\vec{B}$ $\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\varepsilon_0(-i\omega_e)\vec{E}$ Άρα $\boxed{\vec{k}_b\times\vec{B}=-\frac{\omega_e}{c^2}\vec{E}}$

Άρα $\nabla^2:=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\to-k^2$ $\nabla^2\vec{E}=-k_e^2\vec{E}$

$\nabla^2\vec{B}=-k_b^2\vec{B}$

Maxwell equations Formulation in terms of total charge and current.

. . . στο κενό . . .

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{(Δ1)}$$ ν. Gauss ηλεκτρισμού $$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \quad \text{(Δ1K)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad \text{(Δ2)}$$ ν. Gauss μαγνητισμού $$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad \text{(Δ2K)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Δ3)}$$ ν. Faraday $$\xrightarrow[\vec{J}=\vec{0}]{\rho=0}$$ $$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Δ3K)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \text{(Δ4)}$$ ν. Ampère κ διόρθωση Maxwell $$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \text{(Δ4K)}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\Delta})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Delta})-\nabla^2\vec{\Delta} \quad \text{(T1)}$$

$$\nabla^2\vec{\Delta}:=(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{\Delta} \quad \text{(T2)}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\vec{E}\Rightarrow-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})=-\nabla^2\vec{E}\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\vec{E}\Rightarrow\boxed{\nabla^2\vec{E}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}} \quad \boxed{\text{KE}}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\vec{B}\Rightarrow\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E})=-\nabla^2\vec{B}\Rightarrow$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\nabla^2\vec{B}\Rightarrow\boxed{\nabla^2\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}} \quad \boxed{\text{KB}}$$

με $\boxed{c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\simeq3\cdot10^8\,\frac{m}{s}}$

Αν στην $\boxed{\text{KE}}$ δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\cdot e^{i(\vec{k}_e\cdot\vec{r}-\omega_e t+\delta_e)}$ (Λ1)

επειδή $\nabla^2:=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ και $\vec{k}_e\cdot\vec{r}=k_{ex}\cdot x+k_{ey}\cdot y+k_{ez}z\Rightarrow$

$$k_{ex}^2+k_{ey}^2+k_{ez}^2=\varepsilon_0\mu_0\omega_e^2\Rightarrow\boxed{k_e^2=\frac{\omega_e^2}{c^2}} \quad \boxed{\Sigma\Delta\text{E}}$$

Αν στην $\boxed{\text{KB}}$ δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής $\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0\,e^{i(\vec{k}_b\cdot\vec{r}-\omega_b t+\delta_b)}$ (Λ2)

επειδή $\nabla^2:=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ και $\vec{k}_b\cdot\vec{r}=k_{bx}x+k_{by}y+k_{bz}z\Rightarrow$

$$k_{bx}^2+k_{by}^2+k_{bz}^2=\varepsilon_0\mu_0\omega_b^2\Rightarrow\boxed{k_b^2=\frac{\omega_b^2}{c^2}} \quad \boxed{\Sigma\Delta\text{B}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: για τις (Λ1) και (Λ2) π.χ. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(E_{0x},E_{0y},E_{0z})\,e^{i(\vec{k}_e\cdot\vec{r}-\omega_e t+\delta_e)}=$

$$=E_{0x}ik_{ex}e^{ⓔ}+E_{0y}ik_{ey}e^{ⓔ}+E_{0z}ik_{ez}e^{ⓔ}=i(k_{ex},k_{ey},k_{ez})\cdot(E_{0x},E_{0y},E_{0z})e^{ⓔ}=i\vec{k}_e\cdot\vec{E}$$

Δηλαδή $\boxed{\vec{\nabla}\rightarrow i\vec{k}}$

$$\boxed{\nabla^2:=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\rightarrow-k^2}$$

(Δ1Κ)(Λ1) $\Rightarrow i\vec{k}_e\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{k}_e\cdot\vec{E}=\vec{0}$ Ⓐ

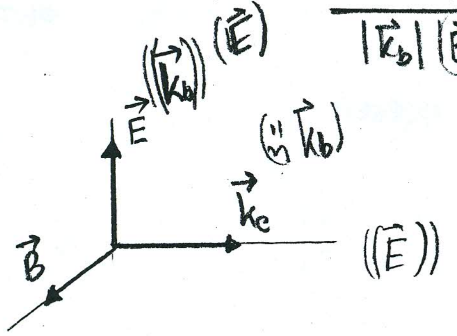
(Δ2Κ)(Λ2) $\Rightarrow i\vec{k}_b\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{k}_b\cdot\vec{B}=\vec{0}$ Ⓑ

(Δ3Κ)(Λ1)(Λ2) $\Rightarrow i\vec{k}_e\times\vec{E}=+i\omega_b\vec{B} \Rightarrow \vec{k}_e\times\vec{E}=\omega_b\vec{B}$ (Γ)

(Δ4Κ)(Λ1)(Λ2) $\Rightarrow i\vec{k}_b\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0(-i\omega_e)\vec{E} \Rightarrow \vec{k}_b\times\vec{B}=-\mu_0\varepsilon_0\omega_e\vec{E}$ (Δ) $\Big\}\Rightarrow$

$$\frac{|\vec{k}_e|\,|\vec{E}|}{|\vec{k}_b|\,|\vec{B}|}=\frac{\omega_b\,|\vec{B}|}{\varepsilon_0\mu_0\omega_e|\vec{E}|}\Rightarrow\frac{|\vec{E}|^2}{|\vec{B}|^2}=\frac{\omega_b c^2}{\omega_e}\frac{|\vec{k}_b|}{|\vec{k}_e|}\quad\boxed{E2B2}$$

ⒶⒷ(Γ)(Δ) $\Rightarrow$



$$(\Gamma)\quad \vec{k}_e\times\vec{E}=\omega_b\vec{B}\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ k_{ex} & k_{ey} & k_{ez}\\ E_{0x}e^{\textcircled{e}} & E_{0y}e^{\textcircled{e}} & E_{0z}e^{\textcircled{e}}\end{vmatrix}=\omega_b\left(B_{0x}e^{\textcircled{b}},B_{0y}e^{\textcircled{b}},B_{0z}e^{\textcircled{b}}\right)\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} k_{ey}E_{0z}e^{\textcircled{e}}-k_{ez}E_{0y}e^{\textcircled{e}}&=\omega_b B_{0x}e^{\textcircled{b}}\\ k_{ez}E_{0x}e^{\textcircled{e}}-k_{ex}E_{0z}e^{\textcircled{e}}&=\omega_b B_{0y}e^{\textcircled{b}}\\ k_{ex}E_{0y}e^{\textcircled{e}}-k_{ey}E_{0x}e^{\textcircled{e}}&=\omega_b B_{0z}e^{\textcircled{b}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{k_{ey}E_{0z}-k_{ez}E_{0y}}{\omega_b B_{0x}}=e^{\textcircled{b}}e^{\textcircled{e}*}=e^{i[(\vec{k}_b-\vec{k}_e)\cdot\vec{r}-(\omega_b-\omega_e)t+(\delta_b-\delta_e)]}\qquad(\Sigma1)$$

$$\frac{k_{ez}E_{0x}-k_{ex}E_{0z}}{\omega_b B_{0y}}=e^{\textcircled{b}}e^{\textcircled{e}*}=\quad\text{ίδιο}\qquad(\Sigma2)$$

$$\frac{k_{ex}E_{0y}-k_{ey}E_{0x}}{\omega_b B_{0z}}=e^{\textcircled{b}}e^{\textcircled{e}*}=\quad\text{ίδιο}\qquad(\Sigma3)$$

σταθερές — συναρτήσεις των $\vec{r}, t$

Αν θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, επειδή τα αριστερά μέλη είναι σταθερά, θα πρέπει και τα δεξιά να είναι, δηλ. να μην εξαρτώνται από το $\vec{r}$ $\Rightarrow$

$$\vec{k}_b=\vec{k}_e\quad(\text{KEB})$$

ν θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη θέση $\vec{r}$, επειδή τα αριστερά μέλη είναι σταθερά, α πρέπει και τα δεξιά να είναι, δηλ. να μην εξαρτώνται από το t $\Rightarrow$

$$\omega_b=\omega_e\quad(\text{WEB})$$

Δεδομένων τώρα των (kEB) (WEB) ⇒ τα δεξιά μέλη ισούνται με

$$e^{i(\delta_b-\delta_e)} = \cos(\delta_b-\delta_e) + i\sin(\delta_b-\delta_e)$$

Άν τα άριστερά μέλη ήταν πραγματικά $\Rightarrow \sin(\delta_b-\delta_e)=0 \Rightarrow \underbrace{\delta_b-\delta_e = n\pi}_{\substack{\text{μερική λύση}\\ \delta_b=\delta_e}}, n\in\mathbb{Z}$

Άλλά τα $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ είναι έν γένει <u>ΜΙΓΑΔΙΚΑ</u> ⇒

περιοριζόμαστε στις σχέσεις

(Σ)(Σ')(Σ'')(E2B2)

$$\frac{k_y E_{0z} - k_z E_{0y}}{\omega B_{0x}} = e^{i(\delta_b-\delta_e)}$$

$$\frac{k_z E_{0x} - k_x E_{0z}}{\omega B_{0y}} = e^{i(\delta_b-\delta_e)}$$

$$\frac{k_x E_{0y} - k_y E_{0x}}{\omega B_{0z}} = e^{i(\delta_b-\delta_e)}$$

(KEB)(WEB)(E2B2) $\Rightarrow \dfrac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c^2$ $\boxed{EBC}$

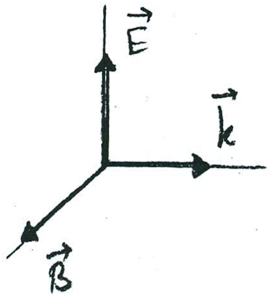
$\textcircled{A} \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \quad \textcircled{A'}$

$\textcircled{B} \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \quad \textcircled{B'}$

$\textcircled{\Gamma} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B} \quad \textcircled{\Gamma'}$

$\textcircled{\Delta} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\omega\vec{E} \quad \textcircled{\Delta'}$

(A')(B')(Γ')(Δ') ⇒



<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1</u>

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \quad \textcircled{TE}$$

$$\textcircled{\Gamma'} \Rightarrow \omega(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{E}\times(\vec{k}\times\vec{E}) = (\vec{E}\cdot\vec{E})\vec{k} - \underbrace{(\vec{E}\cdot\cancel{\vec{k}})}_{0\ (\textcircled{A'})}\vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}\times\vec{B} = \frac{|\vec{E}|^2}{\omega}\vec{k}}$$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2</u>

Άφού δείξαμε ότι $\vec{k}_e = \vec{k}_b \overset{ov}{\equiv} \vec{k}$ η $\omega_e = \omega_b \overset{ov}{\equiv} \omega$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma\Delta E} \equiv \boxed{\Sigma\Delta B} \Rightarrow$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}} \quad \boxed{\Sigma\Delta}$$

Ⓐ.

$$i\begin{pmatrix}\dot c_1\\ \dot c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\omega & g\sqrt{n}\\ g\sqrt{n} & \Omega+(n-1)\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} \qquad \vec{x}(t)=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}\dot c_1\\ \dot c_2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\vec{x}}(t)=-i\underbrace{\begin{pmatrix}n\omega & g\sqrt{n}\\ g\sqrt{n} & \Omega+(n-1)\omega\end{pmatrix}}_{A}\vec{x}(t) \Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(t)=-iA\vec{x}(t)\\ \text{δοκιμάζουμε λύσεις τη μορφή } \vec{x}(t)=\vec{u}\,e^{-i\lambda t}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}\cancel{(-i)}\lambda\,\cancel{e^{-i\lambda t}}=\cancel{(-i)}A\vec{u}\,\cancel{e^{-i\lambda t}} \Leftrightarrow \underset{\text{πρόβλημα ιδιοτιμών}}{A\vec{u}=\lambda\vec{u}} \Leftrightarrow (A-\lambda I)\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow \det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix}n\omega-\lambda & g\sqrt{n}\\ g\sqrt{n} & \Omega+(n-1)\omega-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (n\omega-\lambda)\left[\Omega+(n-1)\omega-\lambda\right]-g^2n=0$$

$$n\omega\left[\Omega+(n-1)\omega\right]-n\omega\lambda-\left[\Omega+(n-1)\omega\right]\lambda+\lambda^2-g^2n=0$$

$$\lambda^2-\left[\Omega+(n-1)\omega+n\omega\right]\lambda+n\omega\left[\Omega+(n-1)\omega\right]-g^2n=0$$

1

Έστω $n=1$ ένα φωτόνιο στην κοιλότητα

$$A=\begin{bmatrix}\omega & g\\ g & \Omega\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\omega-\lambda & g\\ g & \Omega-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$(\omega-\lambda)(\Omega-\lambda)-g^2=0 \Rightarrow \omega\Omega-\omega\lambda-\Omega\lambda+\lambda^2-g^2=0$$

$$\lambda^2-(\omega+\Omega)\lambda+\omega\Omega-g^2=0$$

$$\Delta'=(\omega+\Omega)^2-4(\omega\Omega-g^2)=\omega^2+\Omega^2+2\omega\Omega-4\omega\Omega+4g^2$$

$$\Rightarrow \Delta'=(\omega-\Omega)^2+4g^2=\Delta^2+4g^2$$

$$\lambda_{2,1}=\frac{(\omega+\Omega)\pm\sqrt{\Delta^2+4g^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda_{2,1}=\frac{\omega+\Omega}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2+g^2} \qquad \Omega_1:=\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2+g^2}$$

$$H_1:=\frac{\omega+\Omega}{2}$$

$$\boxed{\lambda_{2,1}=H_1\pm\Omega_1}$$

$$\boxed{\lambda_1=H_1-\Omega_1} \quad A\vec{u}_1=\lambda_1\vec{u}_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\omega & g\\ g & \Omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11}\\ u_{21}\end{pmatrix}=(H_1-\Omega_1)\begin{pmatrix}u_{11}\\ u_{21}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\omega u_{11}+gu_{21}=(H_1-\Omega_1)u_{11}\\ gu_{11}+\Omega u_{21}=(H_1-\Omega_1)u_{21}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}gu_{21}=(H_1-\Omega_1-\omega)u_{11}\\ gu_{11}=(H_1-\Omega_1-\Omega)u_{21}\end{array}\right\} \quad \overset{\text{δεν χρειάζεται τώρα}}{\frac{u_{21}}{u_{11}}=\frac{H_1-\Omega_1-\omega}{H_1-\Omega_1-\Omega}\,\frac{u_{11}}{u_{21}}} \qquad gu_{21}=\frac{(H_1-\Omega_1-\omega)(H_1-\Omega_1-\Omega)}{g}u_{21}$$

$$g^2u_{21}=(H_1-\Omega_1-\omega)(H_1-\Omega_1-\Omega)u_{21}$$

"Αρα $U_{21}=0$ ή $g^2=(H_1-\Omega_1-\omega)(H_1-\Omega_1-\Omega)$

$$\Downarrow$$

$U_{11}=0$

$\Rightarrow \vec{U}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

πιο απλά...

$g^2=(H_1-\Omega_1-\omega)(H_1-\Omega_1-\Omega)$

${}^2=\left(\frac{\omega+\Omega}{2}-\Omega_1-\omega\right)\left(\frac{\omega+\Omega}{2}-\Omega_1-\Omega\right)$

$=\left(\frac{\Omega-\omega}{2}-\Omega_1\right)\left(\frac{\omega-\Omega}{2}-\Omega_1\right)$

${}^2=\left(-\frac{\Delta}{2}-\Omega_1\right)\left(\frac{\Delta}{2}-\Omega_1\right)$

${}^2=-\left(\frac{\Delta}{2}+\Omega_1\right)\left(\frac{\Delta}{2}-\Omega_1\right)$

${}^2=\left(\frac{\Delta^2}{4}-\Omega_1^2\right)=-\frac{\Delta^2}{4}+\Omega_1^2$

$g^2+\frac{\Delta^2}{4}=\Omega_1^2$ που ίσχυει

εξ ορισμού τω Ω$_1$.

$$\cancel{g^2}=\left(\frac{\omega+\Omega}{2}\right)^2\underbrace{-H_1\Omega_1}-H_1\Omega\underbrace{-H_1\Omega_1}+\frac{\Delta^2}{4}+\cancel{g^2}+\Omega_1\Omega-\omega H_1+\omega\Omega_1+\omega\Omega$$

$$0=\frac{\omega^2}{4}+\frac{\Omega^2}{4}+\frac{\omega\Omega}{2}-2\left(\frac{\omega+\Omega}{2}\right)\Omega_1-\left(\frac{\omega+\Omega}{2}\right)\Omega+\frac{\Delta^2}{4}+\Omega_1\Omega-\omega\,\frac{\omega+\Omega}{2}$$
$$+\omega\Omega_1+\omega\Omega$$

$$0=\frac{\omega^2}{4}+\frac{\Omega^2}{4}+\frac{\omega\Omega}{2}-\omega\Omega_1-\Omega\Omega_1-\frac{\omega\Omega}{2}-\frac{\Omega^2}{2}+\frac{\Delta^2}{4}+\Omega_1\Omega-\frac{\omega^2}{2}-\frac{\omega\Omega}{2}$$
$$+\omega\Omega_1+\omega\Omega$$

$$0=\frac{\omega^2}{4}+\underline{\frac{\Omega^2}{4}}-\underline{\frac{\Omega^2}{2}}+\boxed{\frac{(\omega-\Omega)^2}{4}}-\frac{\omega^2}{2}-\frac{\omega\Omega}{2}+\omega\Omega\Rightarrow 0=0$$

$$\frac{\omega^2}{4}+\underline{\frac{\Omega^2}{4}}-\frac{\omega\Omega}{2}$$

περίπτωση απόδειξη

δηλ το U_{21} μπορεί να είναι οτιδήποτε π.χ $U_{21}=1$

$$\Rightarrow U_{11}=\frac{H_1-\Omega_1-\Omega}{g}=\frac{\frac{\Delta}{2}-\Omega_1}{g}=\frac{\Delta-2\Omega_1}{2g}\quad \underline{\text{ΑΡΑ}}\ \vec{U}_1=\begin{bmatrix}\frac{\Delta-2\Omega_1}{2g}\\1\end{bmatrix}$$

επειδή $H_1-\Omega=\frac{\omega+\Omega}{2}-\frac{2\Omega}{2}=\frac{\omega-\Omega}{2}=\frac{\Delta}{2}$

$\boxed{{}_2=H_1+\Omega_1}$ $A\vec{U}_2=\lambda\vec{U}_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\omega & g\\ g & \Omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{12}\\U_{22}\end{pmatrix}=(H_1+\Omega_1)\begin{pmatrix}U_{12}\\U_{22}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\omega U_{12}+gU_{22}=(H_1+\Omega_1)U_{12}\\ gU_{12}+\Omega U_{22}=(H_1+\Omega_1)U_{22}\end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}gU_{22}=(H_1+\Omega_1-\omega)U_{12}\\ gU_{12}=(H_1+\Omega_1-\Omega)U_{22}\end{matrix}\right\}$

$$gU_{22}=\frac{(H_1+\Omega_1-\omega)(H_1+\Omega_1-\Omega)}{g}U_{22}\Leftrightarrow$$

$$g^2U_{22}=(H_1+\Omega_1-\omega)(H_1+\Omega_1-\Omega)U_{22}\Leftrightarrow$$

$U_{22}=0$ ή $(H_1+\Omega_1-\omega)(H_1+\Omega_1-\Omega)=g^2$

$$\Downarrow$$

$U_{12}=0$

$$\Downarrow$$

$\vec{U}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$_1+\Omega_1-\omega)(H_1+\Omega_1-\Omega)=g^2$

$\left(\frac{\omega+\Omega}{2}+\Omega_1-\omega\right)\left(\frac{\omega+\Omega}{2}+\Omega_1-\Omega\right)=g^2$

$\left(\frac{\Omega-\omega}{2}+\Omega_1\right)\left(\frac{\omega-\Omega}{2}+\Omega_1\right)=g^2$

$\left(-\frac{\Delta}{2}+\Omega_1\right)\left(\frac{\Delta}{2}+\Omega_1\right)=g^2$

$\Omega_1^2-\frac{\Delta^2}{4}=g^2\Leftrightarrow\Omega_1^2=\frac{\Delta^2}{4}+g^2$

που ίσχυει εξ ορισμού

της Ω$_1$

δηλ το U_{22} μπορεί να είναι οτιδήποτε π.χ. $U_{22}=1$

$$\Rightarrow U_{12}=\frac{H_1+\Omega_1-\Omega}{g}=\frac{\frac{\Delta}{2}+\Omega_1}{g}=\frac{\Delta+2\Omega_1}{2g}$$

$\underline{\text{ΑΡΑ}}\ \vec{U}_2=\begin{bmatrix}\frac{\Delta+2\Omega_1}{2g}\\1\end{bmatrix}$

(Γ)

Η γενική λύση είναι: $\vec{X}(t) = \sigma_1 \vec{U}_1 e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2 \vec{U}_2 e^{-i\lambda_2 t}$

$$x(t)=\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cdot \frac{\Delta-2\Omega_1}{2g} \cdot e^{-i(H_1-\Omega_1)t} + \sigma_2 \frac{\Delta+2\Omega_1}{2g} e^{-i(H_1+\Omega_1)t} \\ \sigma_1 \cdot 1 \; e^{-i(H_1-\Omega_1)t} + \sigma_2 \cdot 1 \cdot e^{-i(H_1+\Omega_1)t} \end{bmatrix}$$

ΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ $c_1(0)=1 \quad c_2(0)=0$

$$c_1(0)=1 \Leftrightarrow \sigma_1 \frac{\Delta-2\Omega_1}{2g} + \sigma_2 \frac{\Delta+2\Omega_1}{2g} = 1$$

$$c_2(0)=0 \Leftrightarrow \sigma_1+\sigma_2=0 \Rightarrow \sigma_2=-\sigma_1$$

$$\sigma_1 \frac{\Delta-2\Omega_1}{2g} - \sigma_1 \frac{\Delta+2\Omega_1}{2g} = 1$$

$$\frac{\Delta-2\Omega_1-\Delta-2\Omega_1}{2g} = \frac{1}{\sigma_1}$$

$$\sigma_1 = \frac{2g}{-4\Omega_1} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \frac{g}{-2\Omega_1} = -\sigma_2}$$

$$c_2(t) = \frac{g}{-2\Omega_1} e^{-i(H_1-\Omega_1)t} + \frac{g}{2\Omega_1} e^{-i(H_1+\Omega_1)t} \Rightarrow$$

$$c_2(t) = \frac{g}{2\Omega_1} e^{-iH_1 t}\left[e^{-i\Omega_1 t} - e^{i\Omega_1 t} \right] \Rightarrow c_2(t) = \frac{g}{\cancel{2}\Omega_1} e^{-iH_1 t} (-\cancel{2}i) \sin(\Omega_1 t)$$

$$\Rightarrow c_2(t) = \left\{ (-i) \frac{g}{\Omega_1} \cdot \sin(\Omega_1 t) \right\} \exp\left[-i \frac{\omega+\Omega}{2} t \right]$$

$$\Rightarrow |c_2(t)|^2 = \frac{g^2}{\Omega_1^2} \sin^2(\Omega_1 t) \qquad |c_1(t)|^2 = 1 - |c_2(t)|^2$$

$|n\rangle$ έστω η φωτόνια στην κοιλότητα

Ⓐ

$$A = \begin{bmatrix} n\omega & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \Omega+(n-1)\omega \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - [\Omega+(n-1)\omega+n\omega]\lambda + n\omega[\Omega+(n-1)\omega] - g^2 n = 0$$

$$\Delta' = [\Omega+(n-1)\omega+n\omega]^2 - 4n\omega[\Omega+(n-1)\omega] + 4g^2 n$$

$$\Delta' = [\Omega+(n-1)\omega-n\omega]^2 + 4g^2 n > 0$$

$$\lambda_{2,1} = \frac{[\Omega+(n-1)\omega+n\omega] \pm \sqrt{[\Omega+(n-1)\omega-n\omega]^2+4g^2 n}}{2}$$

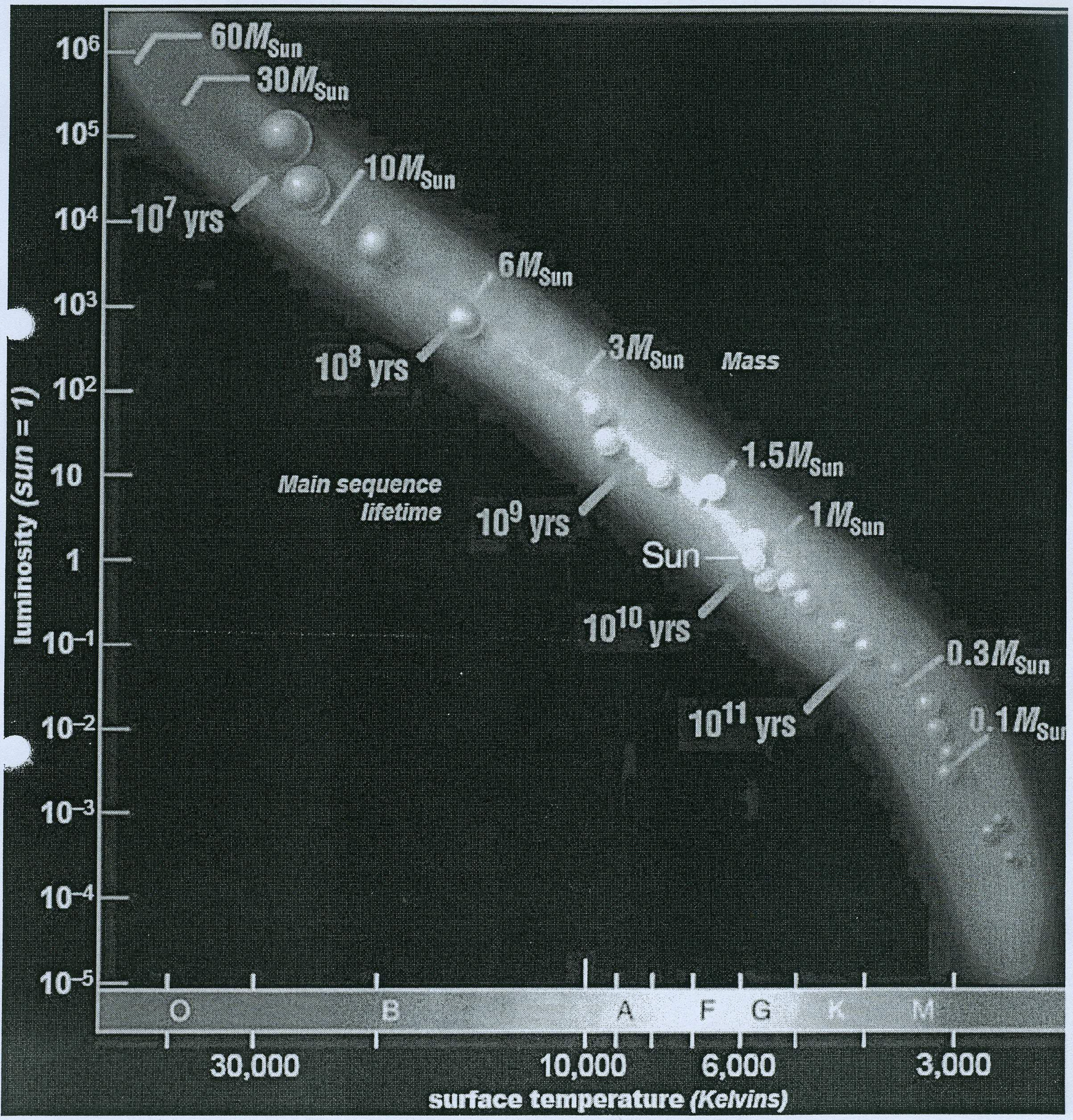
$$\Omega_n := \sqrt{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2+g^2 n}$$

$$\lambda_{2,1} = \frac{\Omega+(n-1)\omega+n\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega+(n-1)\omega-n\omega}{2}\right)^2+g^2 n}$$

$$H_n := \frac{\Omega+(n-1)\omega+n\omega}{2}$$

$$\lambda_{2,1} = \frac{\Omega+(n-1)\omega+n\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2+g^2 n}$$

$$\boxed{\lambda_{2,1} = H_n \pm \Omega_n}$$



$60M_{\text{Sun}}$
$30M_{\text{Sun}}$
$10M_{\text{Sun}}$
10^7 yrs
$6M_{\text{Sun}}$
10^8 yrs
$3M_{\text{Sun}}$
Mass
$1.5M_{\text{Sun}}$
Main sequence lifetime
10^9 yrs
$1M_{\text{Sun}}$
Sun
10^{10} yrs
$0.3M_{\text{Sun}}$
10^{11} yrs
$0.1M_{\text{Su}}$
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
luminosity (sun = 1)
O
B
A
F
G
K
M
30,000
10,000
6,000
3,000
surface temperature (Kelvins)

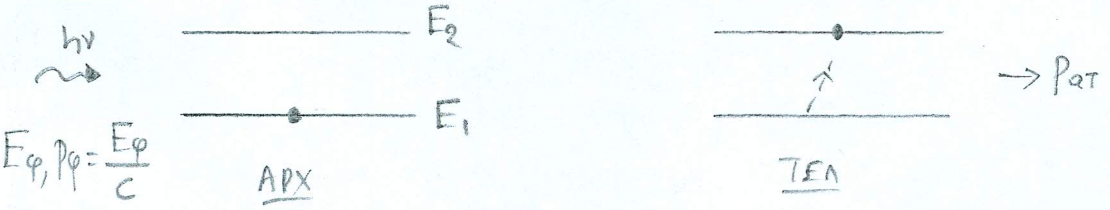
ΑΣΚΗΣΗ

Άς θεωρήσουμε την εξαναγκασμένη απορρόφηση και άς εστιάσουμε στη διατήρηση ενέργειας και ορμής. Σε ποια περιοχή μηκών κύματος λ, η κινητική ενέργεια τού ατόμου μετά την απορρόφηση τού φωτονίου είναι αρκετά μεγάλη (άς πούμε ίση με την ενέργεια τού φωτονίου που απορροφάται) ούτως ώστε να μή μπορούμε να την αγνοήσουμε στο ενεργειακό ισοζύγιο;

Δίνονται: $m_p \simeq 1.673 \cdot 10^{-27} kg$, $h \simeq 6.626 \cdot 10^{-34} Js$, $c = 3 \cdot 10^8 m/s$.

Θεωρήστε ακόμα ότι $m_{ατ} \simeq Zm_p + Nm_n + Zm_e \simeq Am_p$, αγνοώντας δηλαδή το έλλειμμα μάζας για τη σύζευξη των p, n, e.

ΛΥΣΗ



$E_φ, p_φ = \frac{E_φ}{c}$

$E_{KIN}^{ατ} = \frac{P_{ατ}^2}{2m_{ατ}}$

θεωρούμε αρχικά ακίνητο άτομο

$$ΔΕ : \quad E_1 + hν = E_2 + \frac{P_{ατ}^2}{2m_{ατ}}$$

$$ΔΟ \quad P_φ = P_{ατ}$$

$$\frac{E_{KIN}^{ατ}}{E_φ} = \frac{\frac{P_{ατ}^2}{2m_{ατ}}}{hν} = \frac{\frac{h^2ν^2}{c^2 2m_{ατ}}}{hν} = \frac{hν}{2m_{ατ}c^2} = \frac{hc}{λ 2m_{ατ}c^2} = \frac{h}{2m_{ατ}cλ} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$m_{ατ} \simeq Am_p$$

$$\frac{E_{KIN}^{ατ}}{E_φ} = \frac{h}{2Am_pcλ} \overset{θελω}{=\!=\!=} 1 \Leftrightarrow λ = \frac{1}{A} \cdot \frac{h}{2m_pc} \simeq \frac{1}{A} 0.660 \cdot 10^{-15} m$$

$$\text{ή } \frac{1}{A} 0.660 \ fm \Bigg\} \Rightarrow$$

$$A \sim 1 \text{ με } 100$$

$$\boxed{λ \sim 10^{-15} \text{ με } 10^{-17} m}$$

X-rays $λ_X \sim 10^{-10} m$

γ-rays $λ_γ \sim 10^{-12} m$