[4] Να ἀποδειχτεί ὅτι $\int_0^{2\pi} e^{i\phi}d\phi = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\int_0^{2\pi} e^{i\phi}d\phi = \left[\frac{e^{i\phi}}{i}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i2\pi}-e^{i0}}{i} = 0$$

[5] Να ἀποδειχθεί ὅτι σε προσέγγιση πρώτης τάξεως $\sqrt{a+x} \simeq \sqrt{a} + \dfrac{x}{2\sqrt{a}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots \simeq \underbrace{f(0)+f'(0)\,x}_{\text{1η τάξεως προσέγγιση}}$$

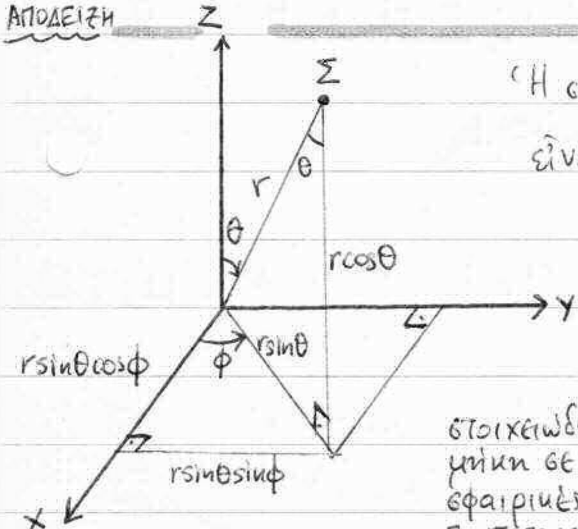
$$f(x) = \sqrt{a+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a+x}}$$

Ἄρα $\sqrt{a+x} \simeq \sqrt{a} + \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\,x$

[2] Να ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀντικατάσταση ἑνός ἀνύσματος θέσεως $\vec{r} \to -\vec{r}$ ἰσοδυναμεί στις σφαιρικές συντεταγμένες με τις ἀντικαταστάσεις $r \to r$, $\theta \to \pi-\theta$, $\phi = \phi+\pi$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Ἡ σχέση μεταξύ καρτεσιανών και σφαιρικών συντεταγμένων είναι:

$x = r\sin\theta\cos\phi \quad (1) \qquad r \in [0,\infty) \quad (4)$

$y = r\sin\theta\sin\phi \quad (2) \qquad \theta \in [0,\pi] \quad (5)$

$z = r\cos\theta \quad (3) \qquad \phi \in [0,2\pi) \quad (6)$

στοιχειώδη μήκη σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{cases} ds_r = dr & (7) \\ ds_\theta = r\,d\theta & (8) \\ ds_\phi = r\sin\theta\,d\phi & (9) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dA_{r\theta} = r\,dr\,d\theta & (10) \\ dA_{r\phi} = r\sin\theta\,dr\,d\phi & (11) \\ dA_{\theta\phi} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi & (12) \end{cases}$$

στοιχειώδεις ἐπιφάνειες

$\Downarrow$

$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \quad (13)$

στοιχειώδης ὄγκος

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε σημείο Σ στο 1ο ὀγδοημόριο (ΣΧΗΜΑ) δηλαδή $\theta \in [0, \pi/2]$, $\phi \in [0, \pi/2]$

Ἡ ἀντικατάσταση $\vec{r} \to -\vec{r} \equiv \vec{r}\,' \quad (14) \iff$

$x' = -x \iff r'\sin\theta'\cos\phi' = -r\sin\theta\cos\phi \quad (15)$

$y' = -y \iff r'\sin\theta'\sin\phi' = -r\sin\theta\sin\phi \quad (16)$

$z' = -z \iff r'\cos\theta' = -r\cos\theta \quad (17)$

$\Downarrow$

$\boxed{r' = r} \quad (18)$

διαιρώνται
κατά μέλη

Άρα (16) / (15) $\Rightarrow \tan\phi' = \tan\phi \Rightarrow \phi' = \phi + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
άλλα $\phi, \phi' \in [0, 2\pi)$

ΑΡΑ $k=1$ $\Rightarrow \boxed{\phi' = \phi + \pi}$ (19)

Διαιρώνται κατά μέλη (15) / (17) $\Rightarrow \tan\theta'\cos\phi' = \tan\theta\cos\phi \overset{(19)}{\Rightarrow} \tan\theta'\cos(\pi+\phi) = \tan\theta\cos\phi \Rightarrow$

$\Rightarrow -\tan\theta' = \tan\theta \Leftrightarrow \tan(-\theta') = \tan\theta \Leftrightarrow -\theta' = \theta + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
$\theta', \theta \in [0, \pi]$

ΑΡΑ $k=-1$ $\Rightarrow -\theta' = \theta - \pi \Rightarrow \boxed{\theta' = \pi - \theta}$ (20)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ $d\Omega_{\theta\phi} = \dfrac{dA_{\theta\phi}}{r^2} = \dfrac{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi}{r^2} = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

$$\int d\Omega_{\theta\phi} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 2\pi\{1+1\} = 4\pi$$

$\Rightarrow$ ολική στερεά γωνία $\Omega_{ολ} = 4\pi$.

[6] $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ μορφή Euler

(α') Ξεκινώντας από τη μορφή Euler, αποδείξτε ότι

(I) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

(II) $\Gamma(1) = 1$

(III) $\Gamma(n) = (n-1)!$ $n \in \{1,2,3,\dots\}$

(IV) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Δίνεται το ολοκλήρωμα Gauss $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(I) $\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\cancel{z+1-1}} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt$

$$\int e^{-t} t^z dt = \int t^z (-1)\, d(e^{-t}) \xlongequal[\text{ολοκλήρωση}]{\text{κατά παράγοντες}} \left[t^z(-1)e^{-t}\right] - \int e^{-t}(-1)\, d(t^z)$$

$$= \left[(-1)t^z e^{-t}\right] + \int e^{-t} z\, t^{z-1} dt \Rightarrow$$

$$\int e^{-t} t^z dt = \left[(-1)t^z e^{-t}\right] + z\int e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \underbrace{\cancel{\left[(-1)t^z e^{-t}\right]_0^\infty}}_{\varnothing} + z\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\,\Gamma(z)$$

$$\left(\lim_{t\to\infty} (-1)t^z e^{-t} = \varnothing\right)$$

(II) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^0 dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = +e^0 = 1$

(III) $\Gamma(1) = 1 = (1-1)! = 0!$

$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\,\Gamma(1) = 1\cdot 1 = 1 = (2-1)! = 1!$

$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\,\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2 = (3-1)! = 2!$

$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\,\Gamma(3) = 3\cdot 2 = 6 = (4-1)! = 3!$

ΕΠΑΓΩΓΗ

Ισχύει για $n=1$. (Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$ δηλ. $\Gamma(k) = (k-1)!$)

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$: Πράγματι $\Gamma(k+1) \overset{(I)}{=} k\,\Gamma(k) = k(k-1)! = k!$

Άρα ισχύει $\forall n \in \{1,2,3,\dots\}$

(IV) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ $\quad t>0$ ισχύει

$t = x^2 \Rightarrow \sqrt{t} = x > 0 \quad dt = d(x^2) = 2x\,dx$

$$\Rightarrow \Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{1}{x} 2x\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

(β') Να αποδειχθεί ότι $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$ και $\gamma > 0$

$$I = \int_0^\infty e^{-\gamma r} r^n dr = \gamma^{-(n+1)} n!$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$I = \int_0^\infty e^{-\gamma r} r^n dr = \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{t}{\gamma}\right)^n \frac{dt}{\gamma} = \frac{1}{\gamma^{n+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^n dt$$

$t = \gamma r \Leftrightarrow r = \frac{t}{\gamma} \Leftrightarrow dr = \frac{dt}{\gamma} \qquad n = z-1 \Leftrightarrow z = n+1$

$$I = \frac{1}{\gamma^{n+1}} \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \frac{1}{\gamma^{n+1}} \Gamma(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{\gamma^{n+1}} = \gamma^{-(n+1)} n!$$

[1] Θεωρώντας γνωστό ότι $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}|a|$ να αποδειχτεί ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(xt/2)}{x^2} dx = \frac{\pi t}{2}$$

θέτω $\mathscr{x} = \frac{xt}{2}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{xt}{2}\right)}{x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{xt}{2}\right)}{\frac{x^2t^2}{4}} \frac{\cancel{2}t^2}{t4} d\left(\frac{xt}{2}\right) = \frac{t^2}{4}\frac{2}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \mathscr{x}}{\mathscr{x}^2} d\mathscr{x} = \frac{t}{2}\, 2\int_0^\infty \frac{\sin^2 \mathscr{x}}{\mathscr{x}^2} d\mathscr{x}$$

$$= \frac{t}{2}\, 2\, \frac{\pi}{2} = \frac{\pi t}{2}$$

[3] Να αποδείξετε ότι $e^{\pm i(\phi+\pi)} = -e^{\pm i\phi}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $\quad e^{i(\phi+\pi)} = e^{i\phi} e^{i\pi} = e^{i\phi}(\underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{0}) = -e^{i\phi}$

$$e^{-i(\phi+\pi)} = e^{-i\phi} e^{-i\pi} = e^{-i\phi}(\underbrace{\cos(-\pi)}_{-1} + i\underbrace{\sin(-\pi)}_{0}) = -e^{-i\phi}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§4. Πυκνότητα ἐνέργειας ΗΜ ἀκτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμική ἰσορροπία, $\rho(\nu,T)\,d\nu$:

νόμος τοῦ Planck και σύγκριση με τις κλασσικές προσεγγίσεις των Rayleigh-Jeans και Wien

$$\rho_{RJ} = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} = \rho_{RJ}(\nu,T)$$

1900 Rayleigh-Jeans κλασσική φυσ.

$$\rho_W = \frac{\alpha\nu^3}{e^{b\nu/T}} \; \underset{\text{από Planck}}{\underline{\text{σταθερές}}} \; \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}} = \rho_W(\nu,T)$$

1896 Wien πειραματικό ταίριασμα στις υψηλές συχνότητες

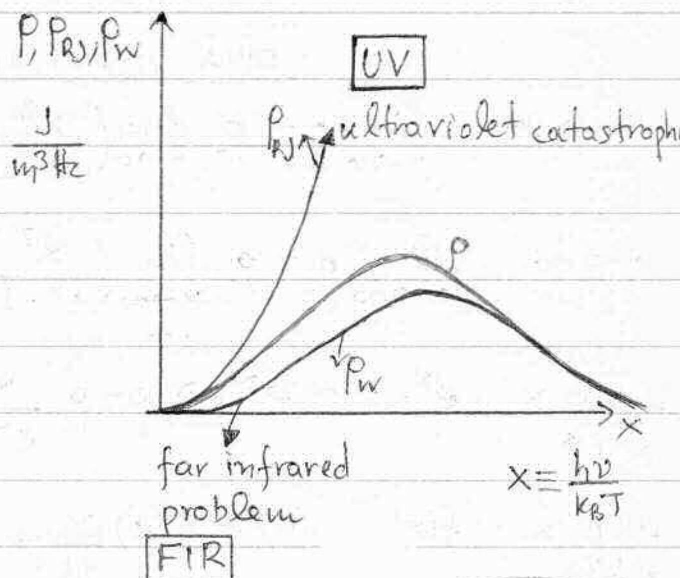
$$\boxed{\rho = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T}-1} = \rho(\nu,T)}$$

1900 **Planck** παλαιά κβαντική μηχανική

Ἀλλαγή μεταβλητής $x \equiv \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{k_B T}{h}x \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h}dx$ (✡)

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_{RJ} &= \rho_0 x^2 \\ \rho_W &= \rho_0 \frac{x^3}{e^x} \\ \rho &= \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \end{aligned}}$$

ἄλλο σύμβολο
$\rho(\nu,T) = u(\nu,T)$



$$\rho_0 = \frac{8\pi}{h^2}\left(\frac{k_B T}{c}\right)^3 \qquad [\rho_0] = \frac{Js}{m^3} = \frac{J}{m^3 Hz}$$

§5. Δυό διατυπώσεις...

$$\rho(T) := \int_0^\infty \rho(\nu,T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T}-1}\,d\nu \overset{(✡)}{=\!=} \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \frac{k_B T}{h} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx}_{\frac{\pi^4}{15}}$$

$$\Rightarrow \rho(T) = \underbrace{\frac{8\pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3}}_{\alpha = 7{,}566\times 10^{-16}\,\frac{J}{m^3}K^{-4}} T^4$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(T) = \alpha T^4} \qquad [\rho(T)] = \frac{J}{m^3} \text{ πυκνότητα ἐνέργειας}$$

νόμος Stefan-Boltzmann
1η μορφή

κοιλότητα μέλανος σώματος σε θερμική ἰσορροπία σε θερμοκρασία T → $\rho(T)$ πυκνότητα ἐνέργειας

ἄλλο σύμβολο
$\rho(T) = u(T)$

$\rho(T)$

J/m^3

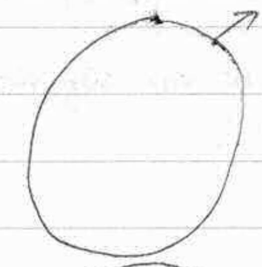
πυκνότητα ενέργειας μέλανος σώματος σε θερμική ισορροπία σε θερμοκρασία T

χωρίς απόδειξη...

$$I = \frac{c}{4}\rho(T)$$

κινητική θεωρία αερίων κ.ο.κ

δες Τρικαλινό σελίδα 74



I ενέργεια που εκπέμπεται ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου

$$\frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2}$$

$$I = \underbrace{\left(\frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3}\right)}_{\sigma} T^4$$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2} K^{-4}$$

$$\boxed{I = \sigma T^4}$$ νόμος Stefan-Boltzmann

2η μορφή

ΟΡΙΑ ΝΟΜΟΥ PLANCK

$x \to 0$ $\quad \lim_{x\to 0} \rho = \rho_0 \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{e^x - 1}\right) = \rho_0 \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2}{e^x}\right) = 0$

$x \to \infty$ $\quad \lim_{x\to\infty} \rho = \rho_0 \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{e^x-1}\right) \overset{\text{τελικά}}{=} \rho_0 \lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x} = 0$

μεγάλα x, $x \uparrow\uparrow$ $\quad e^x - 1 \simeq e^x \Rightarrow \rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \simeq \rho_0 \frac{x^3}{e^x} = \rho_W$

μικρά x, $x \downarrow\downarrow$ $\quad f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots$

$$e^x - 1 = 0 + 1 \cdot \frac{x}{1!} + 1\,\frac{x^2}{2!} \simeq x$$

1ης τάξεως προσέγγιση

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \simeq \rho_0 \frac{x^3}{x} = \rho_0 x^2 = \rho_{RJ}$$

ΑΣΚΗΣΗ Αποδείξτε ότι $\rho_W(\nu,T) \neq \rho_{RJ}(\nu,T)$ για μικρές κ μεγάλες συχνότητες

μικρά x $\quad$ μεγάλα x

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

μεγάλα x, $x \uparrow\uparrow$ $\quad \lim_{x\to\infty}\rho_{RJ} = \rho_0 \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty \neq \lim_{x\to\infty}\rho_W = \rho_0 \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0$

μικρά x, $x \downarrow\downarrow$ $\quad f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots$

$$e^x = 1 + 1\cdot\frac{x}{1!} + 1\cdot\frac{x^2}{2!} + \dots \simeq 1 + x$$ (1ης τάξεως προσέγγιση)

$$\Rightarrow \rho_W = \rho_0 \frac{x^3}{e^x} \simeq \rho_0 \frac{x^3}{1+x} \neq \rho_0 x^2 = \rho_{RJ}$$

εξίσωση
π.χ (8.26) Τρικαλινός

ΑΣΚΗΣΗ Θεωρώντας δεδομένο από την κινητική θεωρία ότι ο αριθμός κρούσεων στα τοιχώματα ανά μονάδα επιφανείας κ ανά μονάδα χρόνου ή αλλιώς η ροή σωματιδίων (εδώ φωτονίων (γ)) είναι $\Phi_\sigma = \frac{N}{4}\langle v \rangle$, όπου N η πυκνότητα σωματιδίων $\left(\frac{1}{m^3}\right)$ και $\langle v \rangle$ η μέση ταχύτητα των σωματιδίων (εδώ φωτονίων (γ)), αποδείξτε ότι $I = \frac{c}{4}\rho$.

Απόδειξη

$$\Phi_\sigma = \frac{N}{4}\langle v \rangle \Rightarrow \Phi_\gamma = \frac{N}{4}c \quad (1) \qquad [\Phi_\gamma] = \frac{1}{m^3}\frac{m}{s} = \frac{1}{m^2 \cdot s}$$

$$I = \langle h\nu \rangle \Phi_\gamma \quad (2) \qquad [I] = \frac{J}{m^2 s}$$

↳ μέση τιμή της ενέργειας

$$\langle h\nu \rangle = \frac{\rho}{N} \quad (3) \qquad [\langle h\nu \rangle] = \frac{J\,\cancel{m^3}}{\cancel{m^3}\cdot 1} = J$$

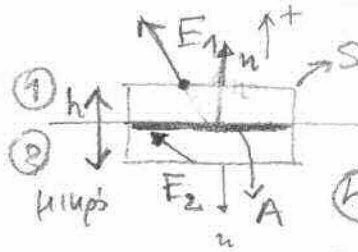
$$(1)(2)(3) \Rightarrow I = \frac{\rho}{N}\cdot\frac{N}{4}c \Rightarrow I = \frac{c}{4}\rho$$

§5. Δύο διατυπώσεις του νόμου των Stefan–Boltzmann μέλανος σώματος σε θερμική ισορροπία: (1) πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας $\rho(T)$, και (2) εκπεμπόμενη ισχύς ανά μονάδα επιφανείας, I.

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΗ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

(1)

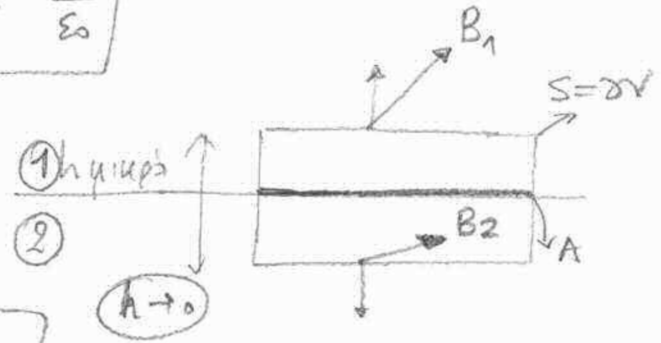
$$\oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \frac{q_{εντός}}{\varepsilon_0}$$



$$E_{1\perp} A - E_{2\perp} A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

(2)

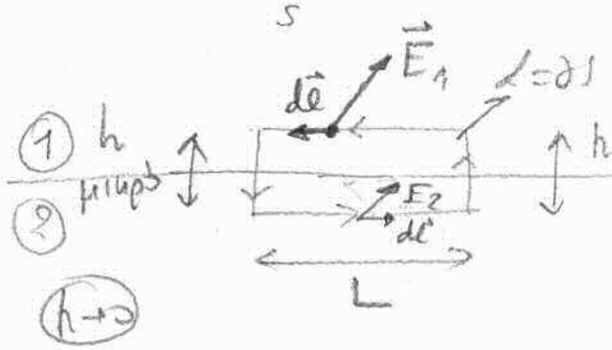
$$\oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = 0$$



$$B_{1\perp}\cdot A - B_{2\perp} A = 0 \Rightarrow \boxed{B_{1\perp} = B_{2\perp}}$$

(3)

$$\oint_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = -\frac{\partial \Phi_{B,S}}{\partial t}$$



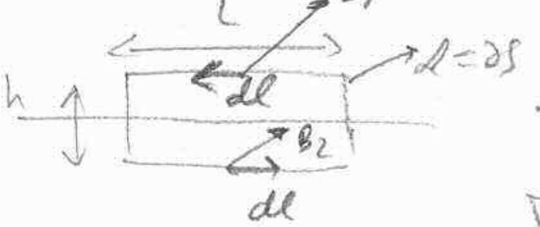
$$-E_{1\parallel} L + E_{2\parallel} L = -\frac{\partial}{\partial t} hBL$$

$$\boxed{E_{1\parallel} = E_{2\parallel}}$$

(4)

$$\oint_{\ell=\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{a} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a}$$

$$= \mu_0 I_{διαπ,S} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{E,S}$$



$$-B_{1\parallel} L + B_{2\parallel} L = \mu_0 L J_{γραμ\, διαπ,S} + \mu_0\varepsilon_0 (E \cancel{h} L)$$ $\to 0$

$$\boxed{-B_{1\parallel} + B_{2\parallel} = \mu_0 J_{γραμ\, διαπ,S}}$$

π.χ. Wolski-2.pdf σελ.9 Summary of boundary conditions

Wolski §8.1 σελ183 General boundary conditions

$$\oint_{\ell=\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_S \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) d\vec{a}$$

4. Νόμος του Planck.

Δες και

http://en.wikipedia.org/wiki/Planck%27s_law

http://en.wikipedia.org/wiki/Stefan%E2%80%93Boltzmann_law

$$-B_{1\parallel}L + B_{2\parallel}L = \mu_0 L J_s \quad A/m$$

$$\boxed{B_{1\perp} = B_{2\perp}}$$

Πολύ καλό

$J \; \frac{A}{m}$

$$H_{2\parallel} - H_{1\parallel} = -J_{s\perp} \quad A/m$$

http://www.mrao.cam.ac.uk/teaching/sqp/qsp_chapter10.pdf

Chapter 10

$$\boxed{E_{2\parallel} = E_{1\parallel}}$$

The Derivation of the Planck Formula

$$\boxed{D_{2\perp} - D_{1\perp} = \rho_S = \sigma_{free}}$$

Topics

The Planck formula for black-body radiation.

Revision of waves in a box.

Radiation in thermal equilibrium.

The equipartition theorem and the ultraviolet catastrophe.

The photoelectric effect.

The wave-particle duality.

Quantisation of radiation and the derivation of the Planck spectrum.

The Stefan-Boltzmann law.

+ ν. GAUSS

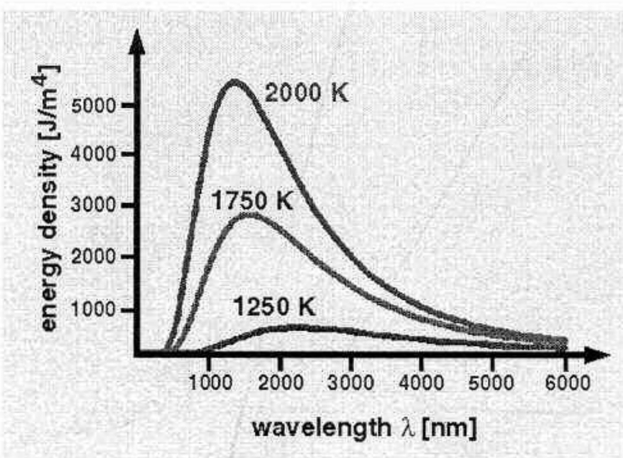
επιφ. Gauss

① ② A

$$\oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = 0$$

$$B_{1\perp}\cdot A - B_{2\perp}\cdot A = 0$$

$$\boxed{B_{1\perp} = B_{2\perp}}$$



$$\oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \frac{q_{εντος}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{1\perp}\cdot A - E_{2\perp}\cdot A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

ή $$\oint_{S=\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dV = q^{free}_{εντος} = \sigma_{free} A$$

$$\boxed{D_{1\perp} - D_{2\perp} = \sigma_{free}}$$

ή $$\boxed{E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

ν. Stokes

L +

$$\oint_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}$$

$$-E_{1\parallel}L + E_{2\parallel}L = -\frac{\partial}{\partial t} LAB_\perp \to 0 \Rightarrow \boxed{E_{2\parallel} = E_{1\parallel}}$$

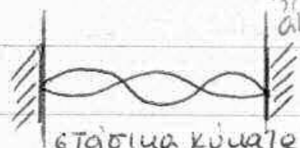
$$\oint_{\ell=\partial S} \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{H}\cdot d\vec{a} = \int_S J_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad -H_{1\parallel}L + H_{2\parallel}L = J^S_{fre}$$

§6. ΗΜ κανονικοί τρόποι σε κοιλότητα (3Δ κουτί) κυτίον!
EM normal modes in a cavity (3Δ box)
(Δες και Wolski §9.1, σελ. 29)

Εδώ μας ενδιαφέρει η ποσότητα $g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{d(\#\text{ κανονικών τρόπων})}{d(\text{συχνότητα})}$ $[g(\nu)] = \frac{1}{Hz}$

ἄπειρα

(1ος τρόπος)



ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΞΑΦΑΝΙΣΗΣ $\vec{E}$ ΣΤΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ

"The box has fixed, rigid, perfectly conducting (ἄπειρος*) walls. Therefore the electric field of the EM wave must be zero at the walls of the box and so we can only fit waves into the box which are multiples of half a wavelength"

1Δ $L = n\frac{\lambda}{2}, n = 1,2,3,\ldots$

$\Rightarrow L = n\frac{2\pi}{2k} \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$ $n = 1,2,3,\ldots$

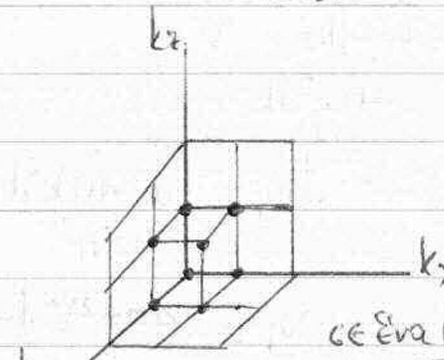
→ επιφ. Gauss

$EA = \oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \oint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV = \frac{q_{\text{εντός}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$

3Δ $k_x = \frac{n_x\pi}{L_x}$ $n_x = 1,2,3,\ldots$

$k_y = \frac{n_y\pi}{L_y}$ $n_y = 1,2,3,\ldots$

$k_z = \frac{n_z\pi}{L_z}$ $n_z = 1,2,3,\ldots$



σε ένα (στοθετικό) ογδοημόριο!

σε k-χώρο $\frac{\pi^3}{L_xL_yL_z} = \frac{\pi^3}{V}$ υπάρχουν $8\cdot\frac{1}{8} = 1$ k-κατάσταση

σε k-χώρο
$k \to k+dk$
$\frac{4\pi k^2 dk}{8}$

dN_k

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$

$$\Rightarrow dN_k = 1\cdot\frac{4\pi k^2 dk\, V}{8\pi^3} \Rightarrow dN_k = \frac{4\pi}{8\pi^3}\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}\frac{2\pi d\nu}{c}V = \frac{4\pi}{c^3}\nu^2 V d\nu$$

Άρα $\boxed{g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}}$

E → k, ή E: 2 πιθανές πολώσεις

* ώστε η οποιαδήποτε επιφ. κατανομή φορτίου να απλώνεται και τελικώς $\sigma \to 0$

(2ος τρόπος) $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi)}$

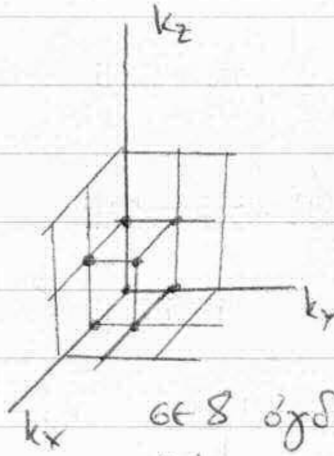
ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}\vec{E}(\vec{0},t)&=\vec{E}_0 e^{i(-\omega t+\phi)}\\ \vec{E}((L_x,0,0),t)&=\vec{E}_0 e^{i(k_xL_x-\omega t+\phi)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$e^{ik_xL_x}=1 \Rightarrow \underbrace{\cos(k_xL_x)}_{=1}+i\underbrace{\sin(k_xL_x)}_{=0}=1$$

$$\Rightarrow k_xL_x=2\pi n_x,\ n_x\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow k_x=\frac{2\pi n_x}{L_x},\ n_x\in\mathbb{Z}$$



όμοιως $k_y=\dfrac{2\pi n_y}{L_y},\ n_y\in\mathbb{Z}$

$$k_z=\frac{2\pi n_z}{L_z},\ n_z\in\mathbb{Z}$$

σε 8 ογδοημόρια δηλ. παντού

σε k-χώρο $\dfrac{(2\pi)^3}{L_xL_yL_z}=\dfrac{8\pi^3}{V}$ έχουμε 1-k κατάσταση

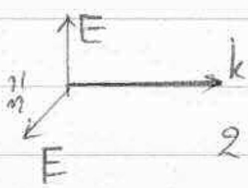
σε k-χώρο $4\pi k^2dk$ $\qquad dN_k$

$k\to k+dk$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi\nu}{c}$$

$$\Rightarrow dN_\nu=\frac{1}{8\pi^3}4\pi k^2dk\,V=\frac{4\pi}{8\pi^3}\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2}\frac{2\pi d\nu}{c}V$$

$$\Rightarrow dN_\nu=\frac{4\pi\nu^2V\,d\nu}{c^3}$$

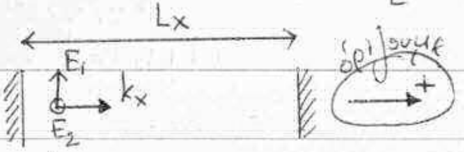


2 πιθανές πολώσεις

Άρα $\boxed{g(\nu)=\dfrac{dN}{d\nu}=\dfrac{8\pi\nu^2V}{c^3}}$

Λεπτομέρειες στον 1ο τρόπο

Υπολογισμός $g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{\#(\text{τρόπων})}{[\text{συχνότητα}]}$



2 πιθανές πολώσεις

$$\boxed{E(x,t) = E_0 \sin(k_x x - \omega t + \phi) + E_0 \sin(k_x x + \omega t + \psi)}$$

$(\overset{\rightarrow}{k_x > 0})$ $\quad$ $(\overset{\leftarrow}{k_x > 0})$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ

$$\sin X + \sin Y = 2\sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{X-Y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E(x,t) = E_0\, 2\sin\left(k_x x + \frac{\phi+\psi}{2}\right)\cdot\cos\left(-\omega t + \frac{\phi-\psi}{2}\right)$$

πρέπει $E(0,t) = 0, \forall t \Rightarrow \sin\left(\frac{\phi+\psi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \phi = -\psi$ $\quad \Rightarrow$

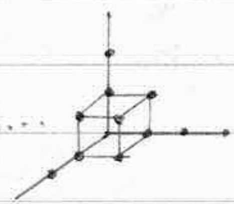
$$\Rightarrow E(x,t) = 2E_0 \sin(k_x x)\cdot\cos(-\omega t + \phi)$$

πρέπει $E(L_x,t) = 0, \forall t \Rightarrow \sin(k_x L_x) = 0 \Rightarrow \boxed{k_x L_x = n_x \pi}$, $n_x = 1, 2, 3, \ldots$

μόνο θετικά γιατί υποθέσαμε $k_x > 0$

Είναι πολυπλοκότερο σε 3Δ, αλλά κάπως παρόμοια παίρνουμε:

$$k_x = \frac{\pi}{L_x} n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L_y} n_y, \quad k_z = \frac{\pi}{L_z} n_z, \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \ldots$$



σε k-χώρο $\frac{\pi^3}{V}$ έχουμε 1 k-κατάσταση

σε
$k \to k + dk$
$\omega \to \omega + d\omega$
$\nu \to \nu + d\nu$

$\frac{4\pi k^2 dk}{8}$ $\qquad$ dN

← μόνο θετικά k_x, k_y, k_z

$$\Rightarrow dN = \frac{4\pi k^2 dk\, V}{8\pi^3} = \frac{4\pi}{8\pi^3}\frac{(2\pi)^2\nu^2}{c^2}\frac{(2\pi)d\nu\, V}{c} \Rightarrow$$

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{4\pi \nu^2 V}{c^3}$$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις δύο πιθανές πολώσεις

$$\boxed{g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}}$$

3ος Τρόπος

§9.1 "Theory of EM fields" Wolski p. 29 - 31

Modes in a rectangular cavity

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ $E_{\parallel}=0$

$B_{\perp}=0$

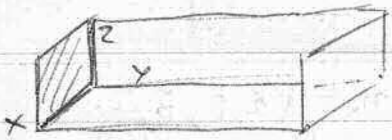
$$\Rightarrow \omega = \pi c \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2+\left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2+\left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2} \quad \text{εξ.}(183)$$

Δηλαδή $\exists$ normal modes π.χ. γιά $n_x=0=n_y$, $n_z\neq 0$ (δες Fig.15)

$$E_x = E_{x0}\cdot \cos k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z \; e^{i\omega t}$$

$$E_y = E_{y0} \sin k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$

$$E_z = E_{z0} \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$



$E_z(0,t)=0=E_x(0,t)$

Άλλά $E_y(0,t)\neq 0$ διαγνωστικά

π.χ. mode 100

του κλασικού

§7. Απόδειξη νόμου Rayleigh-Jeans από το θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας και το $g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$. Υπεριώδης καταστροφή.

Στην προηγούμενη § αποδείξαμε ότι $g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{d(\#\text{ κανονικών τρόπων})}{d(\text{συχνότητα})} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$

$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$ $\qquad [g(\nu)] = \frac{1}{Hz} = s$

$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ ⓪ $\qquad \left[\frac{g(\nu)}{V}\right] = \frac{1}{m^3 Hz} = \frac{s}{m^3}$

$\rho(\nu,T) = \bar{E}\cdot\frac{g(\nu)}{V}$ ① $\qquad [\rho(\nu T)] = \frac{J}{m^3 Hz} = \frac{J\cdot s}{m^3}$

$\bar{E}$: μέση ενέργεια κάθε κανονικού τρόπου

Σύμφωνα με το θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας (equipartition theorem) της κλασικής θεωρίας αποδίδουμε ενέργεια $\frac{1}{2}k_B T$ σε κάθε βαθμό ελευθερίας. Έτσι:

3Δ ιδανικό αέριο $\quad \bar{E}_{KIN} = \frac{3}{2}k_B T$

1Δ ιδανικό αέριο $\quad \bar{E}_{KIN} = \frac{1}{2}k_B T$

1Δ ΑΑΤ (απλός αρμονικός ταλαντωτής) $\quad \bar{E}_{ΔΥΝ} = \bar{E}_{KIN} = \frac{1}{2}k_B T \Rightarrow \bar{E} = k_B T$ ②

①② $\Rightarrow \rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_B T$ $\qquad$ νόμος Rayleigh-Jeans

όμως για $\nu \to \infty \Rightarrow \rho(\nu T) \to \infty$ $\qquad$ υπεριώδης καταστροφή
ultraviolet catastrophe

§8. ΗΜ Κύματα. Επανάληψη και οριακές Συνθήκες

§9. Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο Photoelectric effect

§10.6 ~~[illegible]~~ + docx + αυθεντικό άρθρο Einstein
φυλλ
ελληνι

Αριθμητική Πρόοδος

$a_{n+1} - a_n = \omega$ $\qquad a_n = a_1 + (n-1)\omega$ $\qquad \beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ ω: "διαφορά" $\qquad$ "αναδρομικός τύπος" $\qquad$ β: "αριθμητικός μέσος"

Άθροισμα **n** πρώτων όρων $\quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)\omega\right)$

Γεωμετρική Πρόοδος

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \neq 0$ $\qquad a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$ $\qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ λ: "λόγος" $\qquad$ "αναδρομικός τύπος" $\qquad$ β: "γεωμετρικός μέσος"

Άθροισμα **n** πρώτων όρων

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}, & \lambda \neq 1 \\ a_1 \cdot n, & \lambda = 1 \end{cases}$$

Άθροισμα **∞** όρων (όταν $|\lambda| < 1$) $\quad S_\infty = \frac{a_1}{1-\lambda}$

§10. Απόδειξη νόμου Planck

ΥΠΟΘΕΣΗ 1900 $E_n = nh\nu$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ΗΜ ενέργεια κβαντισμένη

1924 άρθρο Bose
1925 άρθρα Einstein (I, II)
1926 Lewis: "photon"

ΥΠΟΘΕΣΗ

$$\overline{E}(\nu,T) = \sum_n E_n p_n$$

μέση τιμή ενέργειας

$$p_n = \frac{e^{-\frac{E_n}{k_B T}}}{Z} \quad \text{κατανομή Boltzmann}$$

$$Z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}} \quad \text{συνάρτηση επιμερισμού}$$

$$\overline{E}(\nu T) = \sum_n n x (k_B T) \frac{e^{-nx}}{Z} = \frac{k_B T x}{Z} \sum_n n e^{-nx}$$

$$Z = \sum_n \underbrace{e^{-nx}}_{a_n} = \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-x} < 1 \Rightarrow Z$: άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με αρχικό όρο $e^{-0} = 1$ και λόγο $\lambda = e^{-x}$

Τεχνικά εδώ $x \equiv \frac{h\nu}{k_B T}$ (X)

Άρα $\overline{E}(\nu T) = \frac{k_B T x}{Z} \left(\sum_n n e^{-nx}\right)$ (A) → $\mathcal{A}$: αυτό λείπει...

$$Z = \underbrace{\sum_n e^{-nx}}_{\text{I}} = \underbrace{\frac{1}{1-e^{-x}}}_{\text{II}} \quad (\text{B})$$

(I) $\frac{\partial Z}{\partial x} = -\sum_n n e^{-nx} = -\mathcal{A}$

(II) $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{-(1-e^{-x})'}{(1-e^{-x})^2} = \frac{+(-1)e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} \quad (\Gamma)$$

(A)(B)(Γ) $\Rightarrow \overline{E}(\nu T) = k_B T x (1-e^{-x}) \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = k_B T x \frac{1}{e^{x}-1} \overset{(X)}{\Rightarrow}$

$$\boxed{\overline{E}(\nu,T) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}} \quad (\Delta)$$

είχαμε δείξει $g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$ $\quad [g(\nu)] = \frac{1}{Hz}$

$[\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3 Hz}$

$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ $\quad \left[\frac{g(\nu)}{V}\right] = \frac{1}{m^3 Hz}$

$$\rho(\nu,T) = \overline{E}(\nu T) \frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}}-1} \Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}} \quad \text{νόμος Planck}$$

όρια χαμηλών κ υψηλών θερμοκρασιών

$$T \to 0 \Rightarrow \frac{h\nu}{k_B T} \to \infty \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \to \infty \Rightarrow \rho(\nu, T) \to 0$$

$$T \to \infty \Rightarrow \frac{h\nu}{k_B T} \to 0 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \to 0 \Rightarrow \rho(\nu, T) \to \infty$$

ΑΛΛΑ ΠΩΣ ΤΕΙΝΕΙ ΣΤΟ ∞;

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \simeq 1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1 = \frac{h\nu}{k_B T}$$

διότι

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + \dots$$

$$e^x = 1 + 1\frac{x}{1!} + \dots \simeq 1 + x$$

$$\Rightarrow \rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3 k_B T}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} = \rho_{RJ}(\nu, T)$$

ΤΕΙΝΕΙ ΣΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΑ

(*) Οι Rayleigh-Jeans δεν είχαν ιδέα για h

όρια υψηλών κ χαμηλών συχνοτήτων

$$\nu \to \infty \Rightarrow \frac{h\nu}{k_B T} \to \infty \Rightarrow e^{h\nu/k_B T} - 1 \to \infty \Rightarrow \rho(\nu, T) \to 0$$

ΑΛΛΑ ΠΩΣ ΤΕΙΝΕΙ ΣΤΟ 0;

$$e^{h\nu/k_B T} - 1 \simeq e^{h\nu/k_B T}$$

Άρα

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T}} \quad \text{ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΤΑΥΤΙΣΤΕΙ ΜΕ} \quad \rho_W(\nu, T) = \frac{a\nu^3}{e^{b\nu/T}}$$

με $a = \frac{8\pi h}{c^3}$ κ $b = \frac{h}{k_B}$

(*) Δηλαδή ο Wien δεν είχε ιδέα περί h | ΟΥΤΕ k_B, c ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ

$$\nu \to 0 \Rightarrow \frac{h\nu}{k_B T} \to 0 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \to 0 \Rightarrow \rho(\nu, T) \to \frac{0}{0} \dots \to 0$$

$$\nu^3 \to 0$$

ΑΛΛΑ ΠΩΣ ΤΕΙΝΕΙ ΣΤΟ 0;

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \simeq 1 + \frac{h\nu}{k_B T} - 1 = \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$\Rightarrow \rho(\nu, T) \simeq \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3 k_B T}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} = \rho_{RJ}(\nu, T)$$

Παραλλαγή πράξεων με $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ κανονικοί κβαντικοί ταλαντωτές $\boxed{1}$

μέση τιμή της ενέργειας $E(\omega,T) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \dfrac{e^{-\frac{E_n}{k_B T}}}{Z}$ $\boxed{2}$

Υπολογισμός Z

συνάρτηση επιμερισμού $Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$ $\boxed{3}$

ας ονομάσουμε $a_n = e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = e^{-\frac{\hbar\omega(n+1/2)}{k_B T}}$ $\boxed{4}$

$\Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} = \underbrace{\lambda}_{\text{"λόγος"}} < 1$ $\boxed{5}$ $\Rightarrow$ $a_n\ (n=0,1,2,\dots)$ γεωμετρική πρόοδος με $a_{\text{αρχικός}} = a_0 = e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}$ $\boxed{6}$

$$\Rightarrow Z = S_\infty = \frac{a_{\text{αρχ}}}{1-\lambda} = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} \quad \boxed{7}$$

και θέτοντας $x \equiv \dfrac{\hbar\omega}{k_B T}$ $\boxed{X}$ $\Rightarrow Z = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{1-e^{-x}}$ $\boxed{7'}$

E = Α/Π $\quad E(\omega,T) = \dfrac{\text{Αριθμητής}}{\text{Παρονομαστής}} = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{\hbar\omega(n+1/2)}{k_B T}}}{Z \text{ (που δίνεται από την } \boxed{7} \text{ ή } \boxed{7'})}$ (ΕΑΠ)

Ας βρούμε λοιπόν τον Αριθμητή $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ από την αρχική σχέση / από την τελική σχέση

• Ας πάρουμε τη Z από την $\boxed{7'}$ $\Rightarrow \dfrac{\partial Z}{\partial x} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}(1-e^{-x}) - e^{-\frac{x}{2}}(+e^{-x})}{(1-e^{-x})^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{3x}{2}} - e^{-\frac{3x}{2}}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{3x}{2}}}{(1-e^{-x})^2} = \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} \frac{1+e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial x} = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \frac{1+e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} \quad \boxed{8}$$

• Ας πάρουμε τη Z από την 3

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega(n+1/2)}{k_B T}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x\left(n+\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(n+\frac{1}{2}\right) e^{-x\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow -(\hbar\omega)\frac{\partial Z}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{\hbar\omega(n+1/2)}{k_B T}} = \text{Αριθμητής} \quad \boxed{9}$$

$\boxed{8}\boxed{9} \Rightarrow \text{Αριθμητής} = -(\hbar\omega)\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \dfrac{1+e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} \Rightarrow \text{Αριθμητής} = \dfrac{\hbar\omega}{2} e^{-\frac{x}{2}} \dfrac{1+e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$ $\boxed{10}$

$\boxed{7'}\boxed{10}$ (ΕΑΠ) $\Rightarrow E(\omega,T) = \dfrac{\hbar\omega}{2} \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}(1+e^{-x})}{(1-e^{-x})^2} \dfrac{(1-e^{-x})}{e^{-\frac{x}{2}}} \Rightarrow E(\omega,T) = \dfrac{\hbar\omega}{2} \dfrac{(1+e^{-x})}{(1-e^{-x})} \Rightarrow$

$E(\omega,T) = \dfrac{\hbar\omega}{2} \dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ $\boxed{11}$ $\quad E(\omega,T) = \dfrac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}-1} \cdot \dfrac{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}+1}{2}$ $\boxed{12}$

ή $$\boxed{E(\nu,T)=\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}\cdot\frac{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}+1}{2}}\quad \boxed{13}$$

$$\boxed{E(\nu,T)=\frac{k_BT}{2}\cdot x\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}}\ \boxed{13'}\quad x=\frac{h\nu}{k_BT}\quad \boxed{\times}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x-1}=0\\&\lim_{x\to\infty}x\,\frac{e^x+1}{e^x-1}=\infty\end{aligned}\right\}$$

$$g(\nu)=\underset{\text{ανα Hz}}{\#\text{ στασίμων κυμάτων}}=\frac{8\pi\nu^2V}{c^3}\quad\boxed{14}\qquad\frac{\#}{[\text{συχνότητα}]}$$

$\boxed{13'14}$ $$\rho(\nu,T)=\frac{k_BT}{2}\times x\,\frac{e^x+1}{e^x-1}\cdot\frac{1}{V}\cdot\frac{8\pi\nu^2V}{c^3}\Rightarrow$$

$$\rho(\nu,T)=\frac{8\pi h\nu^3}{2c^3}\,\frac{e^x+1}{e^x-1}\Rightarrow\boxed{\rho(\nu,T)=\frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}\cdot\frac{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}+1}{2}}\quad\boxed{15}$$

όρια χαμηλών και υψηλών θερμοκρασιών

$$\underset{\sim\sim}{T\to0}\Rightarrow x=\frac{h\nu}{k_BT}\to\infty\ \text{ η }\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=1\Rightarrow\lim_{T\to0}\rho(\nu,T)=\frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{2}\neq0$$

$$\underset{\sim\sim}{T\to\infty}\Rightarrow x=\frac{h\nu}{k_BT}\to0\ \text{ η }e^x=1+x+\ldots\Rightarrow\rho(\nu,T)\simeq\frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{h\nu}(k_BT)\cdot\frac{2+\frac{h\nu}{k_BT}}{2}$$

$$\Rightarrow\rho(\nu,T)\simeq\frac{8\pi \cancel{h}}{2c^3\cancel{h}}\cdot\nu^2(2k_BT+h\nu)\Rightarrow\lim_{T\to\infty}\rho(\nu,T)=\infty$$

$$\Rightarrow\rho(\nu,T)\simeq\frac{8\pi}{\cancel{2}c^3}\nu^2\cancel{2}k_BT+\frac{8\pi h\nu^3}{2c^3}=\frac{8\pi}{c^3}\nu^2(k_BT)+\frac{8\pi h\nu^3}{2c^3}$$

$$\Rightarrow\rho(\nu,T)=\rho_{cl}(\nu,T)+\frac{8\pi h\nu^3}{2c^3}$$

όρια υψηλών και χαμηλών θερμοκρασιών

$$\underset{\sim\sim}{\nu\to\infty}\Rightarrow x=\frac{h\nu}{k_BT}\to\infty\qquad\lim_{\nu\to\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=1\qquad\rho(\nu,T)\simeq\frac{8\pi h}{2c^3}\nu^3$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\rho(\nu,T)=\infty\ !$$

$$\underset{\sim\sim}{\nu\to0}\Rightarrow x=\frac{h\nu}{k_BT}\to0\qquad\lim_{\nu\to0}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

$$\Rightarrow\rho(\nu,T)\simeq\frac{8\pi h}{2c^3}\nu^3$$

$$\lim_{\nu\to0}\rho(\nu,T)=0$$

Οπότε το $E_n=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ κανονικοί ταλαντωτές

δεν καταλήγει στα σωστά...

και μάλλον το $E_n=n\hbar\omega$ αναφέρεται σε φωτόνια όχι σε "ταλαντωτές"

$k_B = 1.3806488 \times 10^{-23}\, JK^{-1}$
$h = 6.62606957 \times 10^{-34}\, Js$
$c = 2.99792458 \times 10^{8}\, ms^{-1}$

§ 11. Απόδειξη νόμου μετατοπίσεως Wien

● Η συχνότητα μεγίστου συναρτήσει της θερμοκρασίας υπολογίζεται παρακάτω:

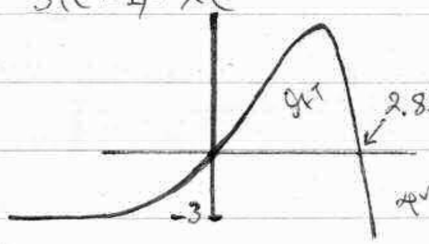
$$\boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}} \quad \text{ή} \quad \rho(x) = \rho_0 \frac{x^3}{e^x-1} \quad \text{με } x=\frac{h\nu}{k_BT} \text{ κ } \rho_0 = \frac{8\pi}{h^2}\left(\frac{k_BT}{c}\right)^3$$

$$[\rho_0] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{J\cdot s}{m^3}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2(e^x-1)-x^3e^x}{(e^x-1)^2} = \rho_0 x^2 \frac{3(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad 3(e^x-1)-xe^x = 0$$

$$x=0 \quad \text{ή} \quad x=0 \quad \text{ή} \quad x \sim 3$$



με γραφική λύση $x_0 \simeq 2.821439$

Άρα έχουμε max στο $x_0 \simeq 2.821439$

$$x_0 = \frac{h\nu_0}{k_BT} \Rightarrow \nu_0 = \frac{k_BTx_0}{h} \Rightarrow \underline{\nu_0 \simeq 58.789 \;\; GHz\cdot T\cdot K^{-1}}$$

● Η κατανομή $\rho(\lambda,T)$ υπολογίζεται παρακάτω: $c=\lambda\nu \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{-c}{\lambda^2}$

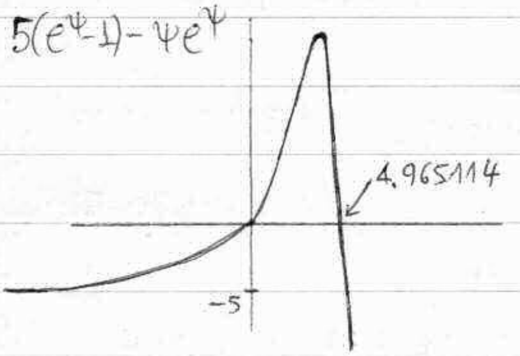
$$\int_0^\infty \rho(\lambda,T)\,d\lambda := \int_0^\infty \rho(\nu,T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu = \frac{8\pi h\, \cancel{c^3}(-c)}{\cancel{c^3}} \int_\infty^0 \frac{1}{\lambda^{3+2}}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}\,d\lambda$$

$$= 8\pi hc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}$$

● Το μήκος κύματος μεγίστου συναρτήσει της θερμοκρασίας υπολογίζεται παρακάτω

$$\boxed{\rho(\lambda,T) = 8\pi hc\,\frac{\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}} \quad \text{ή} \quad \rho(\psi) = \rho_0' \frac{\psi^5}{e^\psi-1} \quad \text{με } \psi = \frac{hc}{\lambda k_BT} \text{ κ } \rho_0' = 8\pi \frac{(k_BT)^5}{(hc)^4}$$

$$[\rho_0'] = \frac{J}{m^3\cdot m}$$



$$\frac{d\rho}{d\psi} = \rho_0' \frac{5\psi^4(e^\psi-1)-\psi^5e^\psi}{(e^\psi-1)^2} = \rho_0'\psi^4 \frac{5(e^\psi-1)-\psi e^\psi}{(e^\psi-1)^2}$$

$$\frac{d\rho}{d\psi} = 0 \Rightarrow \psi = 0 \quad \text{ή} \quad 5(e^\psi-1)-\psi e^\psi = 0$$

$$\psi=0 \quad \text{ή} \quad \psi=0 \quad \text{ή} \quad \psi\sim 5$$

με γραφική λύση $\psi_0 \simeq 4.965114$

$$\psi_0 = \frac{hc}{\lambda_0 k_BT} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{\psi_0 k_BT} \Rightarrow \boxed{\lambda_0 T \simeq 2.89777 \times 10^{-3}\, m\cdot K}$$

νόμος μετατοπίσεως Wien
displacement law
(σύγχρονη μορφή....)

* ΟΜΩΣ, στη μορφή
$\lambda_0 T =$ σταθερά
παράχθη το 1893
από τον Wilhelm Wien
με θερμοδυναμικά κ ΗΜ επιχειρήματα

Σημειωτέον ότι:

$$\left.\begin{aligned} \nu_0 &\simeq 58.789\ \text{GHz}\cdot T\cdot K^{-1} \\ \lambda_0 &= \frac{2.89777}{T}\times 10^{-3}\ \text{m K} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nu_0\lambda_0 \simeq 1.706\times 10^{8}\ \text{m/s} \Rightarrow \nu_0\lambda_0 \simeq 0.57\,c$$

δηλαδή δεν ισχύει $\nu_0\lambda_0 = c$

$$\text{ή}\quad \left.\begin{aligned} \nu_0 &\simeq 2.821439\,\frac{k_B T}{h} \\ \lambda_0 T &= \frac{hc}{4.965114\cdot k_B} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\nu_0\lambda_0 = 0.568\,c}$$

Αν αντί για το νόμο του Planck $(\rho(\nu,T), \rho(\lambda,T))$ χρησιμοποιήσουμε τη μορφή Wien για θα έχουμε

$$\rho = \rho_0\,\frac{x^3}{e^x} \qquad \frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2e^x - x^3e^x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x_0 = 3$$

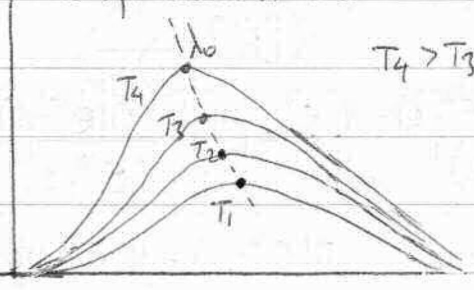
$$\rho = \rho_0'\,\frac{\psi^5}{e^\psi} \qquad \frac{d\rho}{d\psi} = 0 \Rightarrow 5\psi^4e^\psi - \psi^5e^\psi = 0 \Rightarrow \psi = 0 \text{ ή } \psi_0 = 5$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 = 3 &\Leftrightarrow \frac{h\nu_0}{k_BT} = 3 \\ \psi_0 = 5 &\Leftrightarrow \frac{hc}{\lambda_0 k_BT} = 5 \end{aligned}\right\} \overset{(:)}{\Rightarrow} \frac{h\nu_0\lambda_0 k_BT}{k_BThc} = \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{\nu_0\lambda_0 = \frac{3}{5}c}$$

Σημειωτέον ότι $\psi_0 = \frac{hc}{\lambda_0 k_BT} = 5 \Rightarrow \lambda_0 T = \frac{hc}{5k_B} \Rightarrow \boxed{\lambda_0 T \simeq 2.87755\times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}}$

νόμος μετατοπίσεως Wien

- Wien's displacement law Ζωγραφιές



$T_4 > T_3 > T_2 > T_1$ $\qquad \lambda_0 T = 2.89777\times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}$

ΗΛΙΑΚΗ ΦΩΤΟΣΦΑΙΡΑ

$T = 5800\,K \Rightarrow \lambda_0 \simeq 500$ nm κυανο-πράσινο

(κίτρινο 570-590 nm)

ΑΝΘΡΩΠΙΝΟ ΣΩΜΑ

$T = 273 + 36 \simeq 309K \Rightarrow$

$\lambda_0 \simeq 0.0093779\times 10^{-3}$ m

$\simeq 9.4\,\mu m$ υπέρυθρο IR

ΑΣΤΕΡΑΣ ΑΛΤΑΙΡ

$T \simeq 7000-9000K \Rightarrow$

$\lambda_0 \simeq 413$ nm με 321 nm

υπεριώδες UV

ΑΣΚΗΣΗ Να εξαχθεί η κατανομή $\rho(\omega, T)$

$$\int_0^\infty \rho(\omega,T)\,d\omega = \int_0^\infty \rho(\nu,T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu \qquad \omega = 2\pi\nu \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$= \int_0^\infty \frac{8\pi h}{(2\pi)^3 c^3 (2\pi)}\,\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}\,d\omega$$

$$\frac{\cancel{8}\pi\hbar\cancel{2\pi}}{\cancel{8}\pi^3 c^3 \cancel{2\pi}} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}$$

Άρα $\boxed{\rho(\omega,T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\,\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ με ΥΛΗ (ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟ ΑΤΟΜΟ)

LASER Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Albert Einstein υπολογίζει το νόμο Planck και βρίσκει τις διεργασίες

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ Η/Μ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΜΕ ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟ ΑΤΟΜΟ ("ΜΕ ΥΛΗ")
- Stimulated Emission 'Εξαναγκασμένη Εκπομπή
- (Stimulated) Absorption ('Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση
- Spontaneous Emission (Αυθόρμητη) Εκπομπή

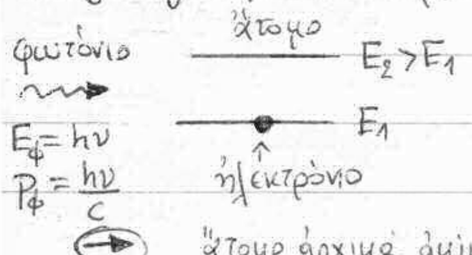
Albert Einstein, "Zur Quantentheorie der Strahlung"
Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich 16 (1916) 47-62
Physikalische Zeitschrift 18 (1917) 121-128

Albert Einstein, είχε ήδη (1905) εξηγήσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο υποθέτοντας ότι υπάρχουν κβάντα φωτός με ενέργεια $E=h\nu$ τα οποία αργότερα ονομάστηκαν φωτόνια (1926 από τον Gilbert Newton Lewis).
Albert Einstein, "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt"
Annalen der Physik 17 (1905) 132-148

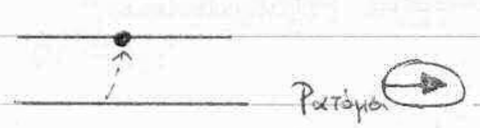
~ 1960 κατασκευή των πρώτων λειτουργικών lasers...

~~ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ~~ διεργασίες ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΜΕ ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟ ΑΤΟΜΟ

('Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση



ΑΡΧΙΚΑ



ΤΕΛΙΚΑ

Διατήρηση ενέργειας κ ορμής:

$$E_1 + h\nu = E_2 + \frac{P_{ατόμου}^2}{2m_{ατόμου}} \Rightarrow E_2 - E_1 = h\nu$$

"πολύ μικρό"

π.χ. $\lambda = 500\,nm$

$$\boxed{dW_{απορ} = B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt} \quad (1)$$

πιθανότητα να συμβεί απορρόφηση σε χρόνο dt

(εξαναγκασμένη)

$$P_\varphi = P_{ατόμου} \Rightarrow P_{ατόμου} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h\cancel{c}}{\cancel{c}\lambda} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

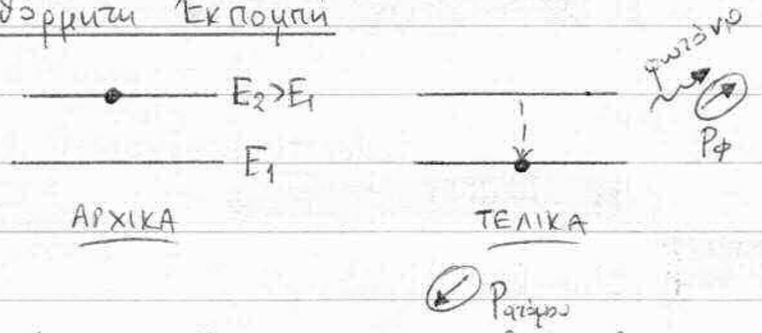
$$\frac{\frac{P_{ατόμου}^2}{2m_{ατόμου}}}{E_\varphi} = \frac{h^2}{2m_{ατόμου}\,hc}\frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{h}{2\lambda c\, m_{ατόμου}} = 1.319\times10^{-9}$$

$\to m_p$

$m_p = 1.673\times10^{-27}\,kg$

ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΑΛΛΑ ΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΟΣ

Αυθόρμητη Εκπομπή



φωτόνιο προς τυχαία κατεύθυνση
⇓ without directionality
{χωρίς κατευθυντικότητα}
και με τυχαία φάση
{χωρίς συνοχή}
incoherent photons
incoherence

χρόνος ζωής στην E_2

$\tau \propto \frac{1}{A}$ CHECK $A_{21} = A$

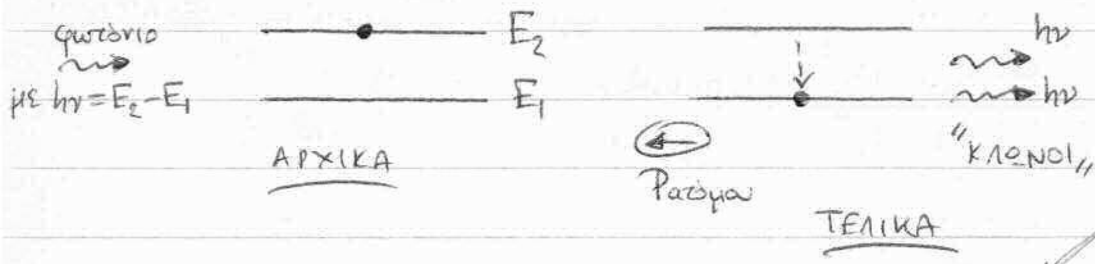
το άτομο θα κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση

$$\boxed{dW_{αυθ.εκπ} = A_{21}\, dt} \quad \langle 2 \rangle$$

πιθανότητα να συμβεί αυθόρμητη εκπομπή σε χρόνο dt

(~~συμφωνία~~) coherence **συνοχή**

Εξαναγκασμένη Εκπομπή



coherent photons

δύο φωτόνια με ίδια ορμή, φάση, κατεύθυνση, ενέργεια, πόλωση
CHECK

μονοχρωματικότητα
κατευθυντικότητα

⇓ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ έχει το **LASER**

$$\boxed{dW_{εξ.εκπ} = B_{21}\, \rho(\nu, T)\, dt} \quad \langle 3 \rangle$$

πιθανότητα να συμβεί εξαναγκασμένη εκπομπή σε χρόνο dt

εξαναγκασμένη

Υπολογισμός τύπου Planck από τις διεργασίες

Αλληλεπίδραση ακτινοβολίας και ύλης σε θερμική ισορροπία (T = σταθερή)

Πληθυσμός στάθμης N_i = ο μέσος αριθμός ατόμων στη στάθμη

$$N_i = N_{o\lambda} \frac{e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{Z} \rightarrow p_i \qquad \text{ή} \qquad N_i = N_{o\lambda} \frac{g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{Z} \rightarrow p_i$$

κατανομή Boltzmann (απλούστερη – γενικότερη μορφή)

$$Z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \quad (1) \qquad\qquad Z = \sum g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \quad (2)$$

χωρίς διαφορετικά στατιστικά βάρη — με διαφορετικά στατιστικά βάρη g_i

$$dN_{1\to 2} = dN_{2\to 1}$$

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ — ίσες μεταβολές αριθμού σε χρόνο dt

$$N_1 \cdot dW_{απορ} = N_2 \left(dW_{αυθ.εκπ} + dW_{εξ.εκπ} \right) \xRightarrow{\langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle}$$

$$N_1 \cdot B_{12}\, \rho(\nu,T)\, dt = N_2 \left(A_{21}\, dt + B_{21}\, \rho(\nu,T)\, dt \right) \Rightarrow (1)$$

ΠΡΑΞΕΙΣ χωρίς διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$\frac{N_{o\lambda}}{Z} e^{-E_1/k_B T} B_{12}\, \rho(\nu,t) = \frac{N_{o\lambda}}{Z} e^{-E_2/k_B T} \left(A_{21} + B_{21}\, \rho(\nu,T) \right) \Rightarrow$$

$$\rho(\nu,T) \left[B_{12} e^{-E_1/k_B T} - B_{21} e^{-E_2/k_B T} \right] = A_{21} e^{-E_2/k_B T} \Rightarrow$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{A_{21} e^{-\frac{E_2}{k_B T}}}{B_{12} e^{-E_1/k_B T} - B_{21} e^{-E_2/k_B T}}$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{\nu\to\infty} \rho(\nu,T) = \infty \Rightarrow \frac{A_{21}}{B_{12} - B_{21}} = \infty \Rightarrow B_{12} = B_{21} := B$

$A_{21} := A$ $\Rightarrow$

$$\rho(\nu,T) = \frac{(A/B)}{e^{(E_2-E_1)/k_B T} - 1} = \frac{(A/B)}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

κ. σύγκριση με ν. Planck $\rho(\nu,T) = \dfrac{\frac{8\pi h}{c^3}\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$

Άρα $\dfrac{A}{B} = \dfrac{8\pi h}{c^3}\nu^3$

ΑΣΚΗΣΗ: Να δειχτεί ότι χωρίς εξαναγκασμένη εκπομπή ($B_{21} = 0$) καταλήγουμε στο νόμο Wien: $\rho(\nu,T) = \rho_W(\nu,T)$

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

$dN_{1\to 2} = dN_{2\to 1}$ ίσες μεταβολές αριθμού σε χρόνο dt

(2) ΠΡΑΞΕΙΣ με διαφορετικά στατιστικά βάρη (ΑΣΚΗΣΗ)

$$N_1\, dW_{απορ} = N_2\left(dW_{αυθ.εκπ} + dW_{εξ.εκπ}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{N_0}}{\cancel{Z}} g_1 e^{-E_1/k_BT} B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt = \frac{\cancel{N_0}}{\cancel{Z}} g_2 e^{-E_2/k_BT}\left(A_{21}\,dt + B_{21}\,\rho(\nu,t)\,dt\right) \Rightarrow$$

$$\left(g_1 e^{-\frac{E_1}{k_BT}} B_{12} - g_2 e^{-\frac{E_2}{k_BT}} B_{21}\right)\rho(\nu,T) = g_2 e^{-\frac{E_2}{k_BT}} A_{21}$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{g_2 e^{-\frac{E_2}{k_BT}} A_{21}}{g_1 e^{-E_1/k_BT} B_{12} - g_2 e^{-E_2/k_BT} B_{21}}$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{T\to\infty} \rho(\nu,T) = \infty \Rightarrow \dfrac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12} - g_2 B_{21}} = \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{\left(\frac{A_{21}}{B_{21}}\right)}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} e^{(E_2-E_1)/k_BT} - 1} \Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{\left(\frac{A_{21}}{B_{21}}\right)}{e^{h\nu/k_BT} - 1}} \quad (*)$$

(διαιρώντας με $g_2 e^{-E_2/k_BT} B_{21}$)

άρα $\dfrac{A_{21}}{B_{21}} = \dfrac{8\pi h}{c^3}\nu^3$

incoherence μη συνοχή

ΑΡΑ $$\boxed{\frac{dW_{αυθ.εκπ}}{dW_{εξ.εκπ}} = \frac{A_{21}\,dt}{B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt} \overset{(*)}{=} \exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right) - 1}$$ CIC

coherence συνοχή

ΑΡΑ Αν θέλω COHERENCE (ΣΥΝΟΧΗ) $\Rightarrow$ θέλω μικρό ν (μεγάλο λ)

εύκολότερη συνοχή — δυσκολότερη συνοχή

π.χ. $\lambda \sim 1\,cm$ (MASER) — $\lambda \sim 500\,nm$ (LASER)

Φαίνεται ευκολότερη η δημιουργία συνεκτικής δέσμης στα μικροκύματα από ότι στο ορατό.

incoherence

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΚΠΟΜΠΩΝ

$$\boxed{\frac{dW_{\alpha\upsilon\theta.\epsilon\kappa\pi}}{dW_{\epsilon\xi.\epsilon\kappa\pi}} = \frac{A_{21}\,dt}{B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt} = \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \quad \boxed{\text{CIC}}$$

coherence

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ:

Ἀν θέλουμε ὑψηλό ποσοστό συνεκτικής ἀκτινοβολίας, τότε χρειαζόμαστε μικρές συχνότητες (μεγάλα μήκη κύματος) και μεγάλες θερμοκρασίες.

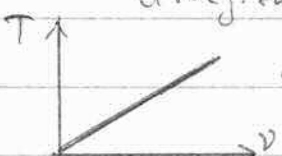
*Ἡ σύγκριση ἔχει νόημα διότι ἀφορᾶ μεταβάσεις ἀπό τὴν ἴδια ἀρχική στάθμη (2) στην ἴδια τελική στάθμη (1).

*Μᾶς ἀφορᾶ ο πληθυσμός τῆς 2, N_2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

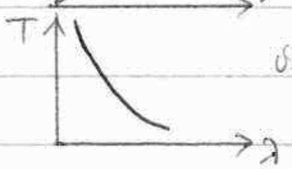
Ἔστω π.χ. ὅτι θέλουμε $\frac{dW_{\alpha\upsilon\theta.\epsilon\kappa\pi}}{dW_{\epsilon\xi.\epsilon\kappa\pi}} = 1 \Rightarrow \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) = 2 \Rightarrow \frac{h\nu}{k_B T} = \ln 2$

$$\Rightarrow T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2}$$



ευθεία

$$\text{ή} \quad T = \frac{hc}{k_B \ln 2\, \lambda}$$



υπερβολή

π.χ. για $\lambda = 700\,nm$ (ΕΡΥΘΡΟ) $\Rightarrow T \simeq \frac{6.63\times10^{-34}\,Js \;\; 3\times10^{8}\,ms^{-1}}{1.38\times10^{-23}\,JK^{-1}\,\ln 2 \;\, 700\cdot10^{-9}\,m} \Rightarrow T \simeq 29705\,K$

ΟΠΟΤΕ ΜΕ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΑΥΤΟ ΕΙΝΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΩΣ ΑΝΕΦΙΚΤΟ!

$\Rightarrow$ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ, ΑΝΤΛΗΣΗ, ...

για $\lambda = 1\,cm$ (ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΑ) $\Rightarrow \ldots \; T \simeq 2.079\,K$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΚΠΟΜΠΩΝ

stimulated | spontaneous | stimulated

$dW_{απορ\,(εξ)} = B_{12}\rho(\omega,T)dt \qquad dW_{αυθ.εκπ} = A_{21}\,dt \qquad dW_{εξ.εκπ} = B_{21}\rho(\omega,T)dt$

Προκαταρκτικά ας κάνουμε μια σύγκριση των συντελεστών έκπομπής

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}$$

$A_{21} \rightarrow$ spontaneous αυθόρμητος $\Rightarrow$ incoherent ασύμφωνες, μη συνεκτικές καταστάσεις

$B_{21} \rightarrow$ stimulated εξαναγκασμένος διεγερμένος $\Rightarrow$ coherent σύμφωνες, συνεκτικές καταστάσεις

Αν $\omega \downarrow \Rightarrow \frac{A_{21}}{B_{21}} \downarrow \Rightarrow$ to stimulated προς εξαναγκασμένες $\Rightarrow$ to coherence προς συνεκτικότητα

Αν $\omega \uparrow \Rightarrow \frac{A_{21}}{B_{21}} \uparrow \Rightarrow$ to spontaneous προς αυθόρμητες $\Rightarrow$ to incoherence προς μη συνεκτικότητα

Δηλαδή οι χαμηλές συχνότητες (τα υψηλά μήκη κύματος) ευνοούν τη συνεκτικότητα, αναμενόμενο, ίσως.

E_2 ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ — μικρότερο E_2

E_1 ποσοστό συνεκτικής ακτινοβολίας σύμφωνης — E_1

π.χ. $\lambda \sim 1\,cm$ (μικροκύματα) φαίνεται κ από τα προκαταρκτικά ότι είναι ευκολότερη η παραγωγή συνεκτικής ακτινοβολίας στα μικροκύματα ... από ότι στο ορατό $\lambda \sim 500\,nm$ (ορατό)

MASER — LASER

κύρια: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΚΠΟΜΠΩΝ **CIC**

$$\boxed{\frac{dW_{αυθ.εκπ.}}{dW_{εξ.εκπ.}} = \frac{A_{21}}{B_{21}\rho(\omega,T)} = \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right) - 1}$$

Η σύγκριση έχει νόημα διότι αφορά μεταβάσεις από την ίδια αρχική στάθμη (2) στην ίδια τελική στάθμη (1) και και αφορά ο αρχικός πληθυσμός της N_2

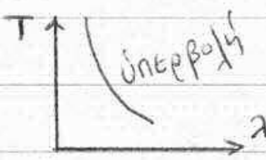
$\omega \downarrow \Rightarrow$ to stimulated προς εξαναγκασμένες $\Rightarrow$ to coherence προς συνεκτικότητα — Οι χαμηλές συχνότητες (τα υψηλά μήκη κύματος) ευνοούν τη συνεκτικότητα

$T \uparrow \Rightarrow$ to stimulated προς εξαναγκασμένες $\Rightarrow$ to coherence προς συνεκτικότητα — Οι υψηλές θερμοκρασίες ευνοούν τη συνεκτικότητα.

Έστω ότι θέλουμε $\frac{dW_{αυθ.εκπ}}{dW_{εξ.εκπ}} = 1 \Leftrightarrow \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{\hbar\omega}{k_BT} = \ln 2 \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{\hbar\omega}{k_B\ln 2}}$

ποσά ανάλογα $T = \frac{h\nu}{k_B\ln 2}$

ή $T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2}$ ποσά αντιστρόφως ανάλογα



$\lambda = 700\,nm$ (ερυθρό) $\Rightarrow T = \frac{6.63\cdot10^{-34}\,Js\;3\cdot10^{8}\,ms^{-1}}{700\cdot10^{-9}\,m\;1.38\cdot10^{-23}\,JK^{-1}\ln 2} \Rightarrow T \simeq 29705\,K$

οπότε (με θερμοδυναμική ισορροπία) αυτό είναι πρακτικώς ανέφικτο $\Rightarrow$ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ, ΑΝΤΛΗΣΗ ...

$\lambda = 1\,cm$ (μικροκύματα) $\Rightarrow T = \ldots \Rightarrow T = 2.079\,K$

Αν πάλι θέλουμε $T = 300\,K \Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda = 69\,\mu m$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ
Comparison of Stimulated Processes

ρ_0, I_0 → [ ] → $I < I_0$, $\rho < \rho_0$ δηλαδή αυτών που εξαρτώνται από την πυκνότητα ακτινοβολίας $\rho(\omega, T)$

έστω μάλιστα σύμφωνα

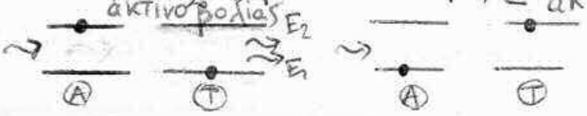
$$\left.\begin{aligned} dW_{\text{εξ. απορ}} &= B_{12}\rho(\omega,T)\,dt \\ dW_{\text{εξ. εκπ}} &= B_{21}\rho(\omega,T)\,dt \end{aligned}\right\}$$ ίσα αν μιλάμε για σύστημα με ίδια στατιστικά βάρη g_i $(B_{12} = B_{21})$

Αλλά, $N_2 << N_1$ (σε θερμοδυναμική ισορροπία)

Άρα αφού
$$\begin{cases} dN^{\text{εξ}}_{2\to1} = N_2\, dW_{\text{εξ. εκπ}} = N_2 B_{21}\rho(\omega,T)\,dt \\ dN^{\text{εξ}}_{1\to2} = N_1\, dW_{(\text{εξ})\text{ απορ}} = N_1 B_{12}\rho(\omega,T)\,dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{dN^{\text{εξ}}_{2\to1}}_{\text{ενίσχυση συνεκτικής ακτινοβολίας}} << \underbrace{dN^{\text{εξ}}_{1\to2}}_{\text{εξασθένιση συνεκτικής ακτινοβολίας}}$$

Αυξάνεται ο πληθυσμός της στάθμης 2 και κατόπιν αυτά εκπέμπονται αυθόρμητως ⟹ ενίσχυση μη συνεκτικής ακτινοβολίας



Άσκηση 2-1. Δες 2γ κέντρα χρώματος

Προκειμένου να πάρετε μια ιδέα για το μέγεθος των ενεργειακών διαφορών σχετικών με τη μεταφορική κίνηση φορτίου, θεωρείστε ηλεκτρόνιο σε κυβικό κιβώτιο ακμής L. Βρείτε τύπο για τις ιδιοτιμές της ενέργειας. Σχηματίστε ένα μέρος από το φάσμα των γραμμών εκπομπής. Για να δείτε τη δυνατότητα εκπομπής στο "συνεχές", βρείτε, για δεδομένο μήκος ακμής του κιβωτίου L, την ελάχιστη συχνότητα (ή μέγιστο μήκος κύματος) με την οποία μπορεί να εκπέμψει φωτόνιο. Βάζοντας αριθμούς μπορείτε να σχηματίσετε αντίληψη για το φάσμα σε μεγάλα μήκη κύματος και τη δυνατότητα παραπλήσιων σε ενέργεια φωτονίων.

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για τριδιάστατο απειρόβαθο φρέαρ.

- Για το μονοδιάστατο απειρόβαθο φρέαρ, $V(x) = \begin{cases} 0, & 0<x<L \\ \infty, & \text{αλλού} \end{cases}$, έχουμε: ιδιοτιμές κ ιδιοσυναρτήσεις

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2} \quad \text{και} \quad \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & 0<x<L \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}, \quad n = 1,2,3,\dots$$

και άρα το φάσμα εκπομπής μεταξύ διαδοχικών σταθμών* είναι $h\nu = E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(2n+1)$

Άρα $h\nu_{min} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(2n_{min}+1) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\cdot 3 \Rightarrow \nu_{min} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2mL^2\,\hbar\, 2\pi} = \frac{3(\hbar 2\pi)}{2\, 2mL^2\, 2}$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_{min} = \frac{3}{8}\frac{h}{mL^2}}$$

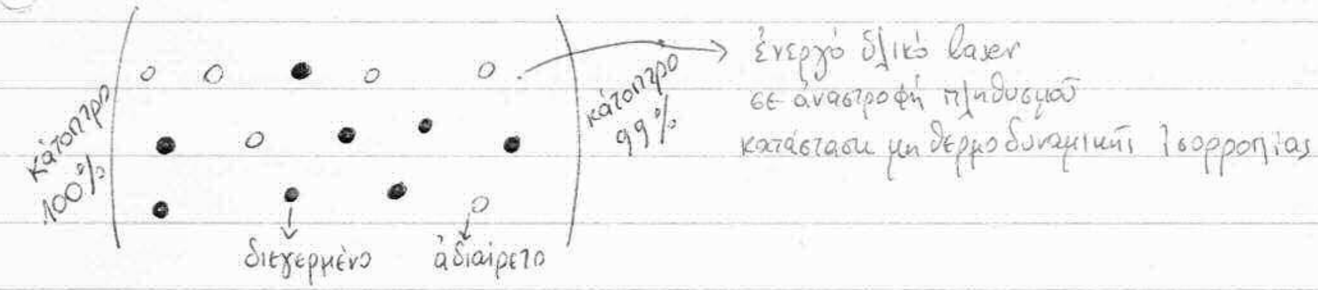
* Γενικά το φάσμα εκπομπής είναι $h\nu = E_\ell - E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(\ell^2 - n^2)$ μεταξύ σταθμών ℓ και n

Άρα $\frac{dN^{\varepsilon\xi}_{2\to 1}}{dt} << \frac{dN^{\varepsilon\xi}_{1\to 2}}{dt}$

ρυθμός ενισχύσεως συνεκτικής ακτινοβολίας | ρυθμός εξασθενίσεως συνεκτικής ακτινοβολίας

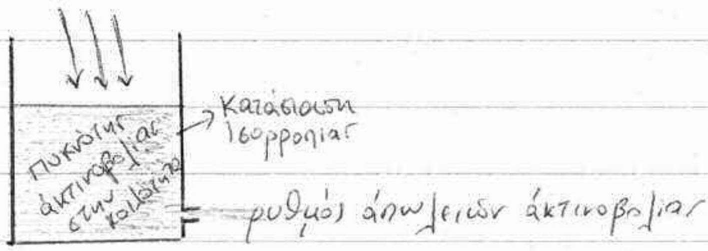
Το πρόβλημα αυτό επιλύεται με την αναστροφή πληθυσμών ($N_2 > N_1$) μέσω άντλησης. Υπάρχουν διάφοροι τύποι αντλήσεως.

ενίσχυση χωρίς αναστροφή σε ημιαγώγιμες νανοδομές
π.χ. gain without inversion (GWI) Frogley et al Nature Materials **5** (2006) 175



$N_2 > N_1$ αναστροφή πληθυσμού

... "μηχανικό ανάλογο" ...



Δηλαδή για συγκεκριμένο $n \Rightarrow$ έχουμε $h\nu_{min}$ για $\ell = n+1 \Rightarrow$

$$h\nu_{min} = E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(2n+1) \quad (\forall n)$$

και από όλα αυτά μικρότερο είναι αυτό που αντιστοιχεί στο μικρότερο $n_{min} = 1$

$$\Rightarrow h\nu_{min} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(2n_{min}+1) = \frac{3}{2}\frac{h^2 4\pi^2}{4mL^2} = \frac{3}{8}\frac{h^2}{mL^2} \Rightarrow \boxed{\nu_{min} = \frac{3h}{8mL^2}}$$

π.χ. για $L = 1m$ $\quad \nu_{min} = \frac{3 \cdot 6.63\ 10^{-34}\ Js}{8\ 9.1\ 10^{-31}\ kg\ 1m^2} \simeq 0.27 \cdot 10^{-3}\ Hz$

$L = 1cm \quad \nu_{min} \simeq 0.27 \cdot 10 Hz \simeq 2.7 Hz$

$L = 1\mu m \quad \nu_{min} \simeq 0.27\ 10^9 Hz \simeq 0.27\ GHz$

$L = 1nm \quad \nu_{min} \simeq 0.27 \cdot 10^{15} \simeq 0.27\ PHz$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

$$\hat{H}\psi = E\psi \Rightarrow \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi = E\psi \Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E\psi \Leftrightarrow \psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm ik \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} > 0$

$$\Rightarrow \psi(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}$$

Αλλά οι συνοριακές συνθήκες είναι $\psi(0) = 0$ και $\psi(L) = 0$, απειρόβαθο φρέαρ, γάρ.

$\psi(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 \Rightarrow \psi(x) = c_1 e^{ikx} - c_1 e^{-ikx}$

$\Rightarrow \psi(x) = c_1 2i \sin kx \quad (k>0)$

$\psi(L) = 0 \Rightarrow c_1 2i\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}L = n\pi \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}}$

$n = 1, 2, 3, \dots$

και $\psi(x) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad k = \frac{n\pi}{L}$

κανονικοποίηση

$$1 = \int_0^L |\psi(x)|^2 dx \Rightarrow |A|^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 1 \Rightarrow |A|^2\frac{L}{n\pi}\int_0^{n\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) d\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 1$$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

$$\Rightarrow |A|^2\frac{L}{n\pi}\int_0^{n\pi}\frac{(1-\cos\psi)\,d\psi}{2} = 1$$

$$\Rightarrow |A|^2\frac{L}{n\pi}\left\{\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\int_0^{n\pi}\cos\psi\, d\psi}_{[\sin\psi]_0^{n\pi} = 0}\right\} = 1 \Rightarrow |A|^2 = \frac{2}{L}$$

$\Rightarrow$ π.χ. $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

• Σε τρεις διαστάσεις επειδή χωρίζονται οι μεταβλητές έχουμε

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) \qquad n_i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\psi_{n_1,n_2,n_3}(x,y,z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_3 \pi z}{L}\right)$$

θεμελιώδης $n_1 = 1 \quad n_2 = 1 \quad n_3 = 1$

1η διεγερμένη $n_1 = 2 \quad n_2 = 1 \quad n_3 = 1$

$$E_{1\delta} - E_\theta = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}(6-3)$$

Αν για αυτή τη μετάβαση ψάχνουμε την ν_{min}, τότε

$$h\nu_{min} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \cdot 3 \Rightarrow \nu_{min} = \frac{3\hbar^2 4\pi^2}{8mL^2 h} \Rightarrow \boxed{\nu_{min} = \frac{3h}{8mL^2}}$$

Αλλιώς $h\nu_{min} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}\left(l_1^2 - n_1^2 + l_2^2 - n_2^2 + l_3^2 - n_3^2\right)$ l_i: ανώτερη στάθμη, n_i: κατώτερη στάθμη

$$\nu_{min} = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{8mL^2 h} \sum_{i=1}^{3}\left(l_i^2 - n_i^2\right)\Big|_{min} \Rightarrow \boxed{\nu_{min} = \frac{h}{8mL^2} \sum_{i=1}^{3}\left(l_i^2 - n_i^2\right)\Big|_{min}}$$

για συγκεκριμένα n_i min $\overset{\text{π.χ.}}{\Rightarrow} l_1 = n_1 + 1, \; l_2 = n_2, \; l_3 = n_3$

$$\nu_{min} = \frac{h}{8mL^2}(2n_1 + 1)$$

και τώρα θέλουμε και τα μικρότερα δυνατά n_1, δηλ. $n_1 = 1 \Rightarrow 2n_1 + 1 = 3$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_{min} = \frac{3h}{8mL^2}}$$

Άσκηση 2-2

Βρείτε την έκφραση για τη θερμοκρασία T στην οποία σε κοιλότητα μέλανος σώματος, η πιθανότητα διεγειρόμενης εκπομπής για κάποια συχνότητα ν, θα είναι ίση με την πιθανότητα αυθόρμητης εκπομπής ν. Σχεδιάστε σε διάγραμμα τη μεταβολή της θερμοκρασίας ως προς το μήκος κύματος στην περίπτωση αυτή ισορροπίας.
Τι τιμές θα πάρει η θερμοκρασία όταν η συχνότητα μεταβάλλεται από το ένα έως το άλλο άκρο του φάσματος;

$$dW_{\varepsilon\xi.\varepsilon\kappa\pi} = B_{21}\,\rho(\omega,T)\,dt$$

$$dW_{\alpha\upsilon\theta.\varepsilon\kappa\pi} = A_{21}\,dt$$

$$dW_{\alpha\upsilon\theta.\varepsilon\kappa\pi} = dW_{\varepsilon\xi.\varepsilon\kappa\pi} \Rightarrow B_{21}\rho(\omega,T) = A_{21} \Rightarrow \frac{A_{21}}{B_{21}\rho(\omega,T)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right) - 1 = 1 \Rightarrow \exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right) = 2 \Rightarrow \frac{h\nu}{k_BT} = \ln 2 \Rightarrow T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2}$$

ποσά ανάλογα

$$\text{ή } c = \lambda\nu \Rightarrow \lambda T = \frac{hc}{k_B \ln 2} \Rightarrow T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2}$$

ποσά αντιστρόφως ανάλογα

κόκκινο

$$\text{για } \lambda = 700\,nm \Rightarrow T = \frac{6.63\cdot 10^{-34}\,Js\; 3\cdot 10^{8}\,ms^{-1}}{700\cdot 10^{-9}\,m\; 1.38\cdot 10^{-23}\,JK^{-1}\ln 2} \Rightarrow T \simeq 29705\,K$$

όπως με θερμοδυναμική ισορροπία αυτό είναι πρακτικώς ανέφικτο

$$\text{για } \lambda = 1\,cm \Rightarrow T = \frac{6.63\; 10^{-34}\,Js\; 3\cdot 10^{8}\,ms^{-1}}{10^{-2}\,m\; 1.38\cdot 10^{-23}\,JK^{-1}\ln 2} \Rightarrow T \simeq 2.079\,K$$

τυπικά για μικροκύματα

εκ πρώτης όψεως φαίνεται πιθανό στα μικροκύματα

$$dW_{\alpha\upsilon\theta.\varepsilon\kappa}/dW_{\varepsilon\xi.\varepsilon\kappa\pi} = \exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1$$

$\lambda = 1\,cm$	$T = 300\,K$	$\simeq 1.005 - 1$	$\simeq 0.005$
$\lambda = 70\,\mu m$	$T = 300\,K$	$\simeq 2 - 1$	$\simeq 1$
$\lambda = 500\,nm$	$T = 300\,K$	$\simeq 5\cdot 10^{41} - 1$	$= 5\cdot 10^{41}$
$\lambda = 500\,nm$	$T = 6000\,K$	$\simeq 122 - 1$	$\simeq 121$
$\lambda = 500\,nm$	$T = 30000\,K$	$\simeq 2.6 - 1$	$\simeq 1.6$

άπειρες

θέλω υψηλές θερμοκρασίες για εξ. εκπομπή

Άσκηση 2-3

Θεωρείστε την αλληλεπίδραση ακτινοβολίας με την ύλη σε κοιλότητα μέλανος σώματος σε θερ
δυναμική ισορροπία. Βρείτε την πυκνότητα ακτινοβολίας μέλανος σώματος για διάφορε
θερμοκρασίες π.χ. 900 K, 1650 K, 6400 K (θερμοκρασία επιφανείας ήλιου) και
μήκη κύματος 694 nm (ερυθρό), 1150 nm (υπέρυθρο), 1.25 cm (μικροκύμα
και σε περιοχές μηκών κύματος του εύρους $\Delta\lambda = 10$ nm (ενός φίλτρου).

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

$$\rho(\lambda,T) = 8\pi hc\,\frac{\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda k_BT}-1} \qquad \frac{J\,s\,m\,s^{-1}}{m^5} = \frac{J}{m^4} = \frac{J}{m^3 \cdot m}$$

$$\int_{\lambda-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda+\frac{\Delta\lambda}{2}} \rho(\lambda,T)\,d\lambda \simeq \rho(\lambda,T)\cdot\Delta\lambda = \cdots$$

Η άσκηση απαντιέται μέσω ~~των~~ των προγρα[μμάτων]
MATLAB planck1.m και planck2.m

Να ελεχθούν και τα όρια $\lambda \to 0$ και $\lambda \to \infty$ του τύπου

• $\boxed{\lambda \to 0}$

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-5} = \infty \qquad \lim_{\lambda\to 0}\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_BT}\right)-1\right] = \infty$$

∞/∞ Οπότε αρχίζουμε τις [παραγωγίσεις] De l'Hospital

$$\frac{\lambda^{-5}}{\exp(\ )-1} \xrightarrow{\pi} \frac{(-5)\lambda^{-6}}{\exp(\ )\frac{hc}{k_BT}(-1)\lambda^{-2}} \overset{\alpha}{\Longrightarrow} \frac{\lambda^{-4}\to\infty}{\exp(\ )\to\infty} \xrightarrow{\pi} \frac{(-4)\lambda^{-5}}{\exp(\ )\frac{hc}{k_BT}(-1)\lambda^{-2}} \overset{\alpha}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{\lambda^{-3}\to\infty}{\exp(\ )\to\infty} \xrightarrow{\pi} \frac{(-3)\lambda^{-4}}{\exp(\ )\frac{hc}{k_BT}(-1)\lambda^{-2}} \overset{\alpha}{\Longrightarrow} \frac{\lambda^{-2}\to\infty}{\exp(\ )\to\infty} \longrightarrow \frac{(-2)\lambda^{-3}}{\exp(\ )\frac{hc}{k_BT}(-1)\lambda^{-2}} \overset{\alpha}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{\lambda^{-1}\to\infty}{\exp(\ )\to\infty} \xrightarrow{\pi} \frac{(-1)\lambda^{-2}}{\exp(\ )\frac{hc}{k_BT}(-1)\lambda^{-2}} \overset{\alpha}{\Longrightarrow} \frac{1}{\exp(\ )\to\infty} \longrightarrow 0$$

Δηλ. $\lim_{\lambda\to 0}\rho(\lambda,T) = 0$

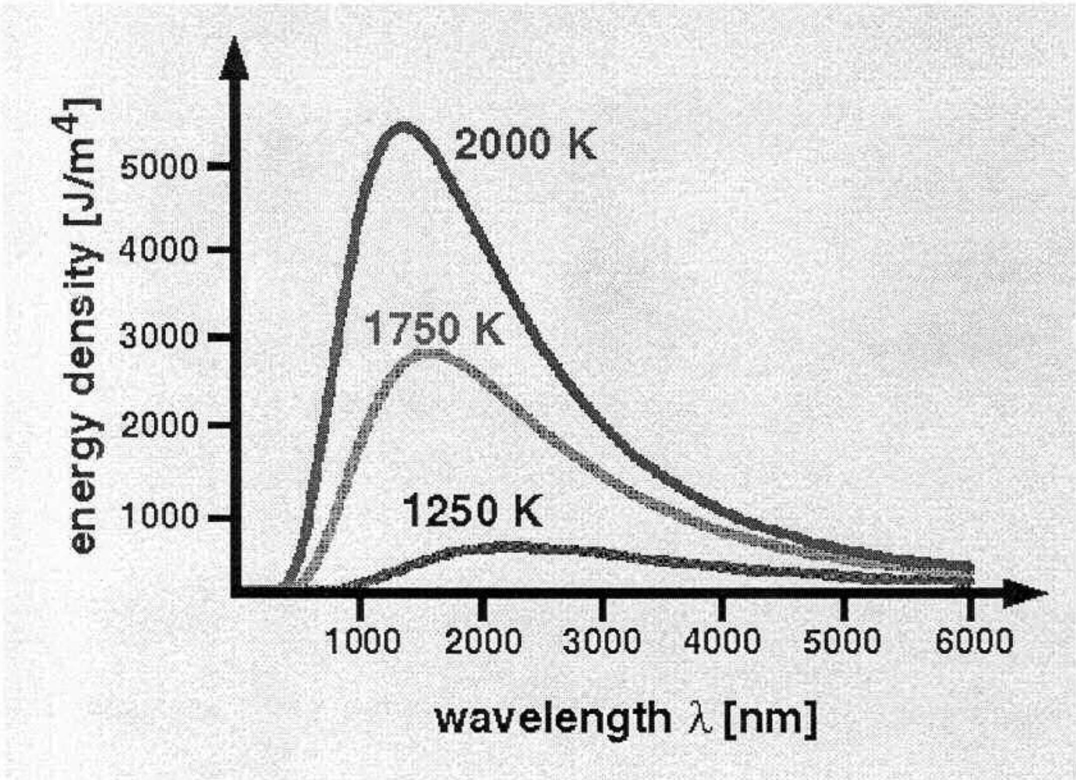
• $\boxed{\lambda \to \infty}$

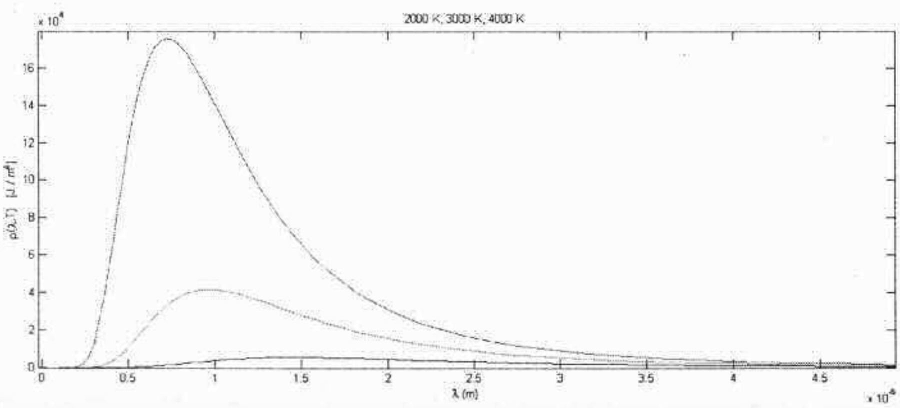
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-5} = 0 \qquad \lim_{\lambda\to\infty}\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_BT}\right)-1\right] = 0$$

$0/0$ Οπότε αρχίζουμε τις παραγω[γίσεις]

$$\frac{\lambda^{-5}}{\exp(\ )-1} \xrightarrow{\pi} \frac{(-5)\lambda^{-6}}{\exp(\ )\frac{hc}{k_BT}(-1)\lambda^{-2}} \overset{\alpha}{\Longrightarrow} \frac{\lambda^{-4}\to 0}{\exp(\ )\to 1} \longrightarrow 0$$

Για την άσκηση 2-3





από planck.m

Θεωρούμε σύστημα ατόμων Η σε θερμοδυναμική ισορροπία, σε κοιλότητα

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Θεωρείστε το Ατομικό Πρότυπο Bohr και συγκεκριμένα τις δύο εσώτερες "τροχιές", σε θερμοκρασία <u>(α')</u> $T_a = 4.2K$ και <u>(β')</u> $T_\beta = 300K$. (Α) Συγκρίνετε τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται στην 1η τροχιά Bohr, N_1, με τον αριθμό των ατόμων που βρίσκονται στην 2η τροχιά Bohr, N_2. (Β) Συγκρίνετε τον αριθμό των ατόμων που μεταβαίνουν σε χρόνο dt από την 1 στη 2, $dN^{\varepsilon\xi}_{1\to 2}$, με τον αριθμό των ατόμων που μεταβαίνουν σε χρόνο dt από τη 2 στην 1, $dN^{\varepsilon\xi}_{2\to 1}$ με εξαναγκασμένες διαδικασίες: $1\to 2$ (εξ. απορ) και $2\to 1$ (εξ. εκπ.). Θεωρείστε ότι $B_{12} = B_{21}$ οπότε $dW_{\varepsilon\xi.\alpha\pi o\rho} = B_{12}\,\rho(\nu T)\,dt = B_{21}\,\rho(\nu T)\,dt = dW_{\varepsilon\xi.\varepsilon\kappa\pi.}$

(Γ) Υπολογίστε το λόγο της πιθανότητας αυθόρμητης εκπομπής, $dW_{\alpha\upsilon\theta.\varepsilon\kappa\pi}$, προς την πιθανότητα εξαναγκασμένης εκπομπής, $dW_{\varepsilon\xi.\varepsilon\kappa\pi.}$ Δίνεται η ενέργεια Rydberg $= 13.6\,eV$ και η σταθερά Boltzmann $k_B = 8.6173324\times 10^{-5}\ eV\,K^{-1}$.

Επίσης θεωρούμε ότι τα στατιστικά βάρη της 1ης κ 2ης "τροχιάς Bohr" είναι ίσα.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -13.6\,eV \\ E_2 &= -\frac{13.6\,eV}{2^2} = -3.4\,eV \end{aligned}\right\} E_2 - E_1 = 10.2\,eV$$

(Α) $$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_0\lambda\, e^{-\frac{E_1}{k_BT}}\ Z}{Z\ N_0\lambda\ e^{-E_2/k_BT}} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{E_2-E_1}{k_BT}}$$

(α') $T_a = 4.2K \Rightarrow k_BT_a = 36.19279608\times 10^{-5}\,eV \simeq 36.2\times 10^{-5}\,eV \simeq 0.36\,meV$

(β') $T_\beta = 300K \Rightarrow k_BT_\beta = 2585.19972\times 10^{-5}\,eV \simeq 25.85\,meV$

(α') $\frac{E_2-E_1}{k_BT_a} = \frac{10.2\,eV}{0.36\,meV} = 28333.\overline{3} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} \simeq e^{28333.\overline{3}} =$ "∞" overflow ...

(β') $\frac{E_2-E_1}{k_BT_\beta} = \frac{10.2\,eV}{25.85\,meV} = 394.6 \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} \simeq e^{394.6} \simeq 2.36\times 10^{171}$

ΑΡΑ και για τις θερμοκρασίες ΙΣΧΥΕΙ $N_1 >> N_2$ (*)

(Β) $$\left.\begin{aligned} dN^{\varepsilon\xi}_{1\to 2} &= N_1\cdot dW_{\varepsilon\xi.\alpha\pi o\rho} = N_1\cdot B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt \\ dN^{\varepsilon\xi}_{2\to 1} &= N_2\ dW_{\varepsilon\xi.\varepsilon\kappa\pi} = N_2\ B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt \end{aligned}\right\} \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow dN^{\varepsilon\xi}_{1\to 2} >> dN^{\varepsilon\xi}_{2\to 1}$$

από τις εξαναγκασμένες ΕΧΟΥΜΕ μείωση ακτινοβολίας

Ⓒ $\frac{dW_{\alpha\upsilon\theta.\,\epsilon\kappa\pi}}{dW_{\epsilon\xi.\,\epsilon\kappa\pi}} = \frac{A_{21}\,dt}{B_{21}\,\rho(\nu T)\,dt} = \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1$

$h\nu = E_2 - E_1 = 10.2\,eV$

(α') $\frac{dW_{\alpha\upsilon\theta.\,\epsilon\kappa\pi}}{dW_{\epsilon\xi.\,\epsilon\kappa\pi}} = e^{28333.\bar{3}} - 1 = $ "∞" overflow

(β') $\frac{dW_{\alpha\upsilon\theta.\,\epsilon\kappa\pi}}{dW_{\epsilon\xi.\,\epsilon\kappa\pi}} \simeq e^{394.6} - 1 \simeq 2.36 \times 10^{171}$

ΑΡΑ ΥΠΕΡΙΣΧΥΕΙ ΣΥΝΤΡΙΠΤΙΚΑ Η ΑΥΘΟΡΜΗΤΗ ΕΚΠΟΜΠΗ $\Rightarrow$ incoherent photons

ΑΣΚΗΣΗ Θεωρήστε ότι μας ενδιαφέρει η (εξαναγκασμένη) απορρόφηση και μάλιστα η διατήρηση ενέργειας και η διατήρηση ορμής. Προσπαθήστε να βρείτε σε ποιά περιοχή μηκών κύματος λ, η κινητική ενέργεια τού ατ μετά την απορρόφηση τού φωτονίου είναι αρκετά μεγάλη (ίση με την ενέργεια του φωτονίου που απορροφάται) ώστε δεν μπορεί να αγνοηθεί στο ενεργειακό ισοζύγιο. Δίνονται:

μάζα πρωτονίου $m_p \simeq 1.673 \times 10^{-27}$ kg

σταθερά Planck $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js

ταχύτητα φωτός στο κενό $c \simeq 3 \times 10^{8}\ m \cdot s^{-1}$

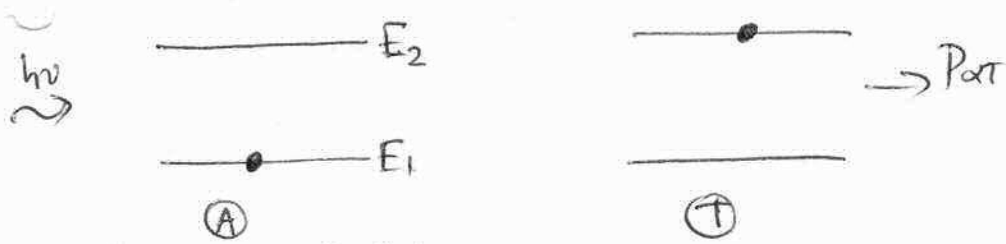
Θεωρήστε επίσης ότι

$$m_{ατ} \approx Z m_p + N m_n + Z m_e$$

$$\approx A m_p$$

αγνοήστε δηλ. το έλλειμα μάζας για την σύνδεση των p, n, e.

× —— ×



$$E_{KIN}^{ατ} = \frac{P_{ατ}^2}{2 m_{ατ}}$$

Θεωρούμε αρχικά ακίνητο άτομο

$\Delta E \qquad E_1 + h\nu = E_2 + \frac{P_{ατ}^2}{2 m_{ατ}} \qquad c = \lambda \nu$

$\Delta O \qquad P_{φωτ}^{A} = P_{ατόμου}^{T} \Rightarrow \frac{h\nu}{c} = P_{ατ}$

$$\frac{E_{KIN}^{ατ}}{E_{φωτ}} = \frac{\frac{P_{ατ}^2}{2m_{ατ}}}{h\nu} = \frac{h^2\nu^2}{2 m_{ατ}\, h\nu\, c^2} = \frac{h\nu}{2 m_{ατ} c^2} = \frac{hc}{2\lambda m_{ατ} c^2} = \frac{h}{2\lambda c m_{ατ}}$$

$$m_{ατ} \sim A m_p$$

$$\frac{E_{KIN}^{ατ}}{E} \simeq \frac{h}{2\lambda c A m_p} \xrightarrow{θέλω} 1 \Rightarrow \frac{h}{2 c m_p} \simeq \lambda A \Rightarrow \lambda A \simeq \frac{6.626\times 10^{-34} Js^2}{2\cdot 3\times 10^{8} m\ 1.67 \times 10^{-27}}$$

$$\frac{N m s^2}{m\, kg} = \frac{kg\, m\, s}{s^2\, kg}$$

$$\Rightarrow \lambda A \simeq 0.66 \times 10^{-34-8+27} m = 0.66 \times 10^{-15} m \Big\} \Rightarrow$$

$A \sim 1$ με 100

$\lambda \sim 10^{-15}$ με 10^{-17} m

X-rays $\lambda_x \sim 10^{-10}$ m

γ-rays $\lambda_\gamma \sim 10^{-12}$ m

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ EINSTEIN με χρονικά εξαρτώμενη ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

§3.1

ΗΜΙΚΛΑΣΣΙΚΗ αντιμετώπιση

αντιμετωπίζουμε κλασικά το ΗΜ πεδίο

ΗΜ ακτινοβολία: εξωτερικώς μεταβαλλόμενη διαταραχή

Θεωρούμε την ΗΜ ακτινοβολία αρκετά πυκνή ούτως ώστε η απορρόφηση ή η εκπομπή ενός φωτονίου από το υπό μελέτη άτομο δεν μπορεί να επηρεάσει αισθητά τα πλάτη του ηλεκτρικού κ μαγνητικού πεδίου του κύματος.

Αν μας ενδιαφέρει η διακύμανση της πυκνότητας της ΗΜ ακτινοβολίας θα πρέπει να θεωρήσουμε τόσο τη δυναμική του ατόμου όσο και της ΗΜ ακτινοβολίας, σε αλληλεπίδραση. Αυτό θα γίνει αργότερα όταν το σύστημα άτομο – ακτινοβολία μελετηθεί στην πλήρη κβαντική του μορφή. Δηλαδή στο κεφάλαιο 4 θα αντιμετωπίσουμε κβαντικά και την ΗΜ ακτινοβολία.

$\boxed{\text{ΑΔΙΑΤΑΡΑΚΤΟ ΑΤΟΜΟ}}$ (χωρίς ΗΜ ακτινοβολία)

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + U(\vec{r}) \quad (A1)$$ χαμιλτονιανή αδιατάρακτου ηλεκτρονίου στο άτομο $\quad e = 1.6\times 10^{-19}\,C$

π.χ. $$U(\vec{r}) = (-e)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (A2)$$ άτομο υδρογόνου

(A2') $$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$ δυναμικό Coulomb

$Q = Ze$

ή $$U_s(\vec{r}) = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot e^{-k_0 r} \quad (A3)$$

ή (A3') $$V_s(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}e^{-k_0 r}$$ θωρακισμένο δυναμικό Coulomb

screened Coulomb potential

k_0: strength of the damping factor

Debye or Thomas-Fermi wave vector

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \hat{H}_0\Psi(\vec{r},t) \quad (A4)$$

$V_s(r)$ same form as Yukawa potential

$\Psi(\vec{r},t)$: κυματοσυνάρτηση αδιατάρακτου ηλεκτρονίου

$$\Psi(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r})T(t) \quad \text{υποθέτουμε χωρισμό μεταβλητών (A5)}$$

$$\overset{(A4)}{\underset{(A5)}{\Longrightarrow}} \Phi(\vec{r})\, i\hbar\frac{dT(t)}{dt} = T(t)\,\hat{H}_0\Phi(\vec{r}) \Rightarrow \frac{i\hbar}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat{H}_0\Phi(\vec{r})}{\Phi(\vec{r})} \quad \text{για } T(t)\neq 0\neq\Phi(\vec{r})$$

Αλλά για να ικανοποιείται η τελευταία θα πρέπει $\frac{i\hbar}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\hat{H}_0 \Phi(\vec{r})}{\Phi(\vec{r})} = E$ (ΣΤΑΘΕΡΑ) (A6)

ΑΡΑ ① $\hat{H}_0 \Phi(\vec{r}) = E\Phi(\vec{r})$ άρα E είναι οι ιδιοτιμές της ενέργειας (A7)

② $\frac{dT}{T} = \frac{E\,dt}{i\hbar} \Rightarrow \ln T = -\frac{iEt}{\hbar} + c \Rightarrow T(t) = \underbrace{e^{c}}_{\mathcal{N}} e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ (A8)

$\Rightarrow T(t) = \mathcal{N} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ (A9)

ΑΡΑ (A10) $\Psi(\vec{r},t) = \mathcal{N} e^{-\frac{iE_k t}{\hbar}} \Phi_k(\vec{r})$ $\mathcal{N}$: σταθερά κανονικοποίησης

(A11) $\hat{H}_0 \Phi_k(\vec{r}) = E_k \Phi_k(\vec{r})$ ιδιοκαταστάσεις ΑΔΙΑΤΑΡΑΚΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ιδιοενέργειες E_k $\Phi_k(\vec{r})$ ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις

(A12) $E_k = \hbar \Omega_k$

$$\int |\Psi(\vec{r},t)|^2 dV = 1 \iff |\mathcal{N}|^2 \underbrace{\int |\Phi(\vec{r})|^2 dV}_{1} = 1$$

στοιχειώδης όγκος $dV := d^3\vec{r}$

(k) k: συλλογικός κβαντικός αριθμός π.χ στο άτομο υδρογόνου $k = \{n, l, m_l\}$

Στην ιδιοκατάσταση $\Phi_k(r,\theta,\phi)$ αντιστοιχεί ενέργεια $E_k = -\frac{R_E}{n^2} = E_n$

$R_E \simeq 13.6\,eV$ RYDBERG ΕΝΕΡΓΕΙΑ

$R_E = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2}$

Στο άτομο υδρογόνου προκύπτουν ίδιες ενέργειες με αυτές του προτύπου Bohr δηλαδή $E_{nlm} = E_n = -\frac{R_E}{n^2}$. Αυτό αλλάζει σε πολυηλεκτρονικά άτομα όπου $E_{nlm} = E_{nl}$. Σε μαγνητικό πεδίο αίρεται ο εκφυλισμός ως προς m. Τύποι Ατομικού Προτύπου Bohr:

$E_n = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r_n}$

$E_n = -\underbrace{\left(\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\right)}_{R_E} \cdot \frac{Z^2}{n^2}$

Z = 1

$E_1 = -13.6\,eV$

$E_2 = -3.4\,eV$ $E_3 = -1.51\,eV$

...

$r_n = 4\pi\varepsilon_0 \frac{n^2\hbar^2}{m_e Z e^2}$

Z = 1 $r_1 := a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \sim 0.529\,\text{Å}$ ακτίνα Bohr

$r_2 = 4r_1$

$r_3 = 9r_1$

...

ΔΙΑΤΑΡΑΓΜΕΝΟ ΑΤΟΜΟ (με ΗΜ ακτινοβολία)

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \underbrace{U_\varepsilon(\vec{r},t)}_{\text{δυναμική ενέργεια διαταραχής}} \quad (\Delta 1)$$

δυναμική ενέργεια διαταραχής ΜΙΚΡΗ σε σχέση με την $\hat{H}_0$

Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα: **με αρχική συνθήκη**

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\,\Psi(\vec{r},t) \quad (\Delta 2) \qquad \Psi(\vec{r},0) = \Phi(\vec{r}) = \text{γνωστή} \quad (\Delta 3)$$

Υποθέτουμε ότι μπορούμε να αναπτύξουμε τόσο την $\Psi(\vec{r},0)=\Phi(\vec{r})$ όσο και την $\Psi(\vec{r},t)$ συναρτήσει των ιδιοσυναρτήσεων του αδιατάρακτου προβλήματος $\Phi_k(\vec{r})$.

Δηλαδή:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_k f_k \Phi_k(\vec{r}) \quad (\Delta 4)$$

όπου $C_k(0) = f_k$ (Δ6) π.χ.

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) \quad (\Delta 5)$$

(Δ1)(Δ2)(Δ5) $\Rightarrow$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r})\right] = \left[\hat{H}_0 + U_\varepsilon(\vec{r},t)\right]\left[\sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r})\right] \quad (\Delta 7)$$

Α' μέλος
$$A' = i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) + i\hbar \sum_k C_k(t)(-i\Omega_k)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r})$$

$$\Rightarrow A' = i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) + \cancel{\sum_k C_k(t)\, E_k\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r})}$$

(Α12)

Β' μέλος
$$B' = \cancel{\sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, E_k \Phi_k(\vec{r})} + U_\varepsilon(\vec{r},t) \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r})$$

με (Α11)

ΑΡΑ
$$i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) = U_\varepsilon(\vec{r},t) \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r}) \quad (\Delta 8)$$

Τώρα εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι οι $\Phi_k(\vec{r})$ είναι ορθοκανονικές:
Πολλαπλασιάζουμε την (Δ8) με $\Phi_n^*(\vec{r})$ και ολοκληρώνουμε στο χώρο. ΑΡΑ

$$i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t)\, e^{-i\Omega_k t} \underbrace{\int \Phi_n^*(\vec{r})\Phi_k(\vec{r})\,dV}_{\delta_{nk}} = \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t} \int \Phi_n^*(\vec{r})\, U_\varepsilon(\vec{r},t)\, \Phi_k(\vec{r})\,dV$$

$$\Rightarrow i\hbar\, \dot{C}_n(t)\, e^{-i\Omega_n t} = \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, U_{\varepsilon nk}(t) \quad (\Delta 9)$$

$$\boxed{\dot{C}_n(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_k C_k(t)\, e^{i(\Omega_n - \Omega_k)t}\, U_{\varepsilon nk}(t)} \quad (\Delta 10)$$

$$U_{\varepsilon nk}(t) = \int \Phi_n^*(\vec{r})\, U_\varepsilon(\vec{r},t)\, \Phi_k(\vec{r})\,dV = \langle \Phi_n | U_\varepsilon(\vec{r},t) | \Phi_k \rangle \quad (\Delta 11)$$

∞ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 1ης ΤΑΞΕΩΣ αν λύσουμε το (Δ10) αναστικά λύνουμε το πρόβλημα (Δ1) (Δ2)

"Τα παραπάνω συνιστούν τη λεγόμενη χρονικά εξαρτώμενη θεωρία διαταραχών"

ΠΑΡΑΚΑΤΩ θα την εφαρμόσουμε σε διστάθμικό άτομο

υπό την επίδραση μονοχρωματικού ηλεκτρικού κύματος ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ

κ πολωμένου

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $\quad C_k(t) = \mathbb{C}_k(t)\, e^{i\Omega_k t}$ (Δ12)

(Δ10)(Δ12) $\Rightarrow$
$$\dot{\mathbb{C}}_n(t)\, \cancel{e^{i\Omega_n t}} + \mathbb{C}_n(t)\, i\Omega_n \cancel{e^{i\Omega_n t}} = -\frac{i}{\hbar}\sum_k \mathbb{C}_k(t)\, \cancel{e^{i\Omega_k t}}\, \cancel{e^{i\Omega_n t}}\, \cancel{e^{-i\Omega_k t}}\, U_{\varepsilon nk}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\mathbb{C}}_n(t) + \mathbb{C}_n(t)\, i\Omega_n = -\frac{i}{\hbar}\sum_k \mathbb{C}_k(t)\, U_{\varepsilon nk}(t) \qquad (\Delta 13)$$

"άν και αυτό δεν πολυεξυπηρετεί, εφόσον ο χρόνος εξακολουθεί να έχει την παρουσία του στα στοιχεία πίνακα $U_{\varepsilon nk}(t)$"

Τώρα θα κάνουμε πιο συγκεκριμένη την αρχική συνθήκη (Δ3) : (ΣΔ3)

π.χ. $\quad \Psi(\vec{r},0) = \Phi(\vec{r}) = \text{γνωστή} = \Phi_\ell(\vec{r}) \Rightarrow$

(Δ5) $\Rightarrow \quad C_\ell(0) = 1 \quad$ και $\quad C_{k\neq \ell}(0) = 0 \quad$ (ΣΔ3′)

Εάν η αρχική κατάσταση δεν είναι μια συγκεκριμένη ιδιοκατάσταση του συστήματος (όπως εδώ η ℓ) αλλά μίγμα ιδιοκαταστάσεων, τότε θα έχουμε περισσότερους μη μηδενικούς συντελεστές C (και όχι μόνο, όπως εδώ, τον C_ℓ).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Επειδή $\displaystyle\int |\Psi(\vec{r},t)|^2 dV = 1 \xRightarrow{\Delta 5} \int \sum_{k'} C_{k'}^*(t)\, e^{i\Omega_{k'} t}\, \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\, \Phi_k(\vec{r})\, dV = 1$

$$\Rightarrow \sum_{k'}\sum_k C_{k'}^*(t)\, C_k(t)\, e^{i(\Omega_{k'}-\Omega_k)t} \underbrace{\int dV\, \Phi_{k'}^*(\vec{r})\, \Phi_k(\vec{r})}_{\delta_{k'k}\ (\text{ορθοκανονικές})} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_k |C_k(t)|^2 = 1 \xRightarrow{\Delta 12}$$

$$\sum_k |\mathbb{C}_k(t)|^2 = 1$$

όπου $|C_k(t)|^2 = |\mathbb{C}_k(t)|^2$ είναι η πιθανότητα το σύστημα να είναι κατά τη χρονική t στην ιδιοκατάσταση k

(x)

Περιοριζόμαστε τώρα σε δυνάμεις που προέρχονται από το ηλεκτρικό πεδίο οδεύοντος πολωμένου κύματος: $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_a \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}_H - \omega t + \varphi)]$ ← αυθαίρετη

όπου το $\vec{\mathcal{E}}_a$ καθορίζει την πόλωση του κύματος, ω είναι η κυκλική του συχνότητα ($\omega = 2\pi\nu$)

$\vec{r}_H$ είναι η θέση του ηλεκτρονίου

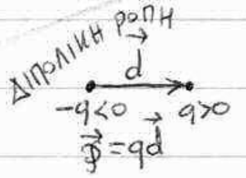
Όμως θα θεωρήσουμε ότι αυτή δεν διαφέρει σημαντικά από τη θέση του πυρήνα $\vec{R}$ για την κλίμακα μεγέθους που μας αφορά εδώ. Δηλαδή $\vec{r}_H \simeq \vec{R}$

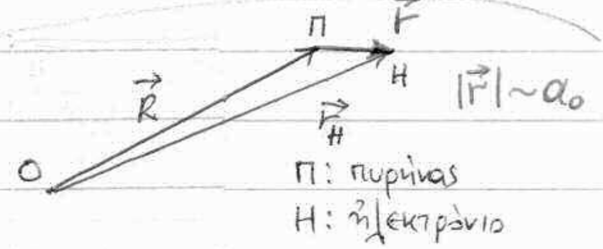
Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι ότι θεωρούμε οπτικά μήκη κύματος λ.

Άρα αν π.χ. $\lambda = 500\,nm$, δεδομένου ότι το μέγεθος της "τροχιάς" του ηλεκτρονίου είναι της τάξεως της ακτίνας Bohr $a_0 = 0.529\times10^{-10}\,m \simeq 0.5\times10^{-1}\,nm$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{a_0} = \frac{500\,nm}{0.05\,nm} = 10^4$$

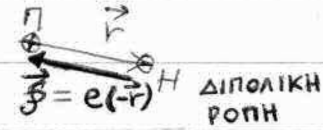
$$\lambda \gg a_0 \sim |\vec{r}|$$





Το ηλεκτρικό πεδίο είναι πρακτικά ομογενές.

Δεν έχει πρακτικά χωρική εξάρτηση.



$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_a \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{R} - \omega t + \varphi)] = \underbrace{\vec{\mathcal{E}}_a \exp[i(\vec{k}\cdot\vec{R} + \varphi)]}_{\vec{\mathcal{E}}_0} \cdot \exp(-i\omega t)$$

Οπότε $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t)$

Δηλαδή συμπεριλαμβάνουμε το $\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{R} + \varphi)]$ στο πλάτος θεωρώντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει πρακτικά **ΜΟΝΟ ΧΡΟΝΙΚΗ** εξάρτηση

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= -\vec{\nabla}V \\ dV &= \vec{\nabla}V\cdot d\vec{r} \end{aligned}\right\} \quad dV = -\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{r} \Rightarrow V(\vec{r},t) - \cancel{V(0,t)} = -\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{r}$$

λόγω φ

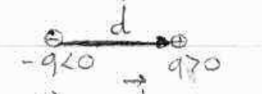
$$U_\mathcal{E}(\vec{r},t) - \cancel{U_\mathcal{E}(0,t)} = e\,\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{r}$$

$$e = 1.6\times10^{-19}\,C$$

$$\Rightarrow U_\mathcal{E}(\vec{r},t) = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}(t)$$

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

electric dipole



$\vec{p} = q\vec{d}$

electric dipole moment

$U = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}$ potential energy

$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{\mathcal{E}}$ torque ΡΟΠΗ

magnetic dipole

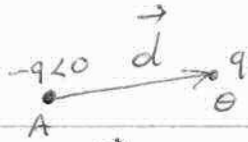
$\vec{\mu} = I\vec{A}$

magnetic (dipole) moment

$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ potential energy

$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$ torque ΡΟΠΗ

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ



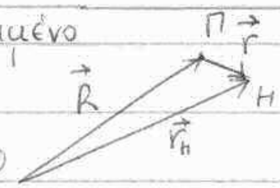
$\vec{d} = \vec{A\Theta}$

$\vec{\mu} = I\vec{A}$

$\vec{p} = q\vec{d}$ electric dipole moment	$\vec{\mu} = I\vec{A}$ magnetic (dipole) moment
$U_{\mathcal{E}} = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}$ potential energy	$U_B = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ potential energy
$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{\mathcal{E}}$ torque	$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$ torque
$[\vec{p}] = Cm$	$[\vec{\mu}] = Am^2$ $(F = BIl)$
$[U_{\mathcal{E}}] = Cm\frac{N}{C} = Nm = J$	$[U_B] = Am^2T = Am^2\frac{N}{Am} = Nm = J$
$[\vec{\tau}] = Cm\frac{N}{C} = Nm$	$[\vec{\tau}] = Am^2T = Am^2\frac{N}{Am} = Nm$

Στο συγκεκριμένο

$\vec{p} = q\vec{d} = e\vec{H\Pi}$



$\vec{\Pi H} = \vec{r}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = -e\vec{r}}$ (A)

$\vec{p}\cdot\hat{z} = (-e)\vec{r}\cdot\hat{z} \Rightarrow p_z = (-e)z$

Δείξαμε ότι για οπτικά μήκη κύματος μπορούμε να γράψουμε $\boxed{\vec{\mathcal{E}} \simeq \vec{\mathcal{E}}_0 \exp(-i\omega t)}$ (B)

Θεωρώντας ότι η πόλωση είναι στην κατεύθυνση $\hat{z}$ και παίρνοντας το πραγματικό μέρος της (B) έχουμε $\boxed{\vec{\mathcal{E}} \simeq \mathcal{E}_0 \hat{z}\cos\omega t}$ (B′) $\quad \vec{r}\cdot\hat{z} =$

Άρα $U_{\mathcal{E}} = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}} = -(-e)\vec{r}\cdot\mathcal{E}_0\hat{z}\cos\omega t \Rightarrow U_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e z\cos\omega t$

Δηλαδή $\boxed{U_{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \mathcal{E}_0 e z\cos\omega t}$ (Γ)

$U_{\mathcal{E}nk}(t) = \int dV\, \Phi_n^*(\vec{r})\, U_{\mathcal{E}}(\vec{r},t)\, \Phi_k(\vec{r})$ (Δ11) $\overset{(\Gamma)}{\Longrightarrow}$ (Δ)

$U_{\mathcal{E}nk}(t) = \int dV\, \Phi_n^*(\vec{r})\, \mathcal{E}_0 e z\cos\omega t\, \Phi_k(\vec{r}) \Rightarrow \boxed{U_{\mathcal{E}nk}(t) = \mathcal{E}_0 e\cos\omega t \int dV\, \Phi_n^*(\vec{r})\, z\, \Phi_k(\vec{r})}$

ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟ ΑΤΟΜΟ

E_2 —— $\Phi_2(\vec{r})$

E_1 —— $\Phi_1(\vec{r})$

$U_{\mathcal{E}12}(t) = \mathcal{E}_0 e\cos\omega t\, Z_{12}$

$U_{\mathcal{E}21}(t) = \mathcal{E}_0 e\cos\omega t\, Z_{21}$

$U_{\mathcal{E}kk}(t) = \mathcal{E}_0 e\cos\omega t\, Z_{kk} = 0$

$k=1$ ή $k=2$ (E)

ή

$U_{\mathcal{E}12}(t) = -\mathcal{E}_0\, p_{z12}\cos\omega t$

$U_{\mathcal{E}21}(t) = -\mathcal{E}_0\, p_{z21}\cos\omega t$

$U_{\mathcal{E}kk}(t) = 0$ (E′)

$Z_{nk} := \int dV\, \Phi_n^*(\vec{r})\, z\, \Phi_k(\vec{r})$

$Z_{nk}^* = Z_{kn}$

$Z_{kk} = \int dV\, \Phi_k^*(\vec{r})\, z\, \Phi_k(\vec{r}) = \int dV\, \underbrace{|\Phi_k(\vec{r})|^2}_{\text{άρτια}}\, \underbrace{z}_{\text{περιττή}} = 0$

ΥΠΟΘΕΣΗ: τα φωτόνια του ΗΜ πεδίου ταιριάζουν ενεργειακά με την ενεργειακή διαφορά των 2 σταθμών.

$h\nu \simeq E_2 - E_1$ (ς)

$$\dot{c}_n(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_k c_k(t)\, e^{i(\Omega_n-\Omega_k)t}\, U_{\varepsilon nk}(t) \quad (\Delta 10)$$

Θα το λύσουμε λοιπόν στο διστάθμικό άτομο και θέτουμε $\Omega_2 - \Omega_1 = \Omega$.

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{i}{\hbar}\, c_1(t)\, \underbrace{e^{i(\Omega_1-\Omega_1)t}}_{1}\, \underbrace{U_{\varepsilon 11}(t)}_{0} - \frac{i}{\hbar}\, c_2(t)\, e^{i(\Omega_1-\Omega_2)t}\, U_{\varepsilon 12}(t)$$

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{i}{\hbar}\, c_2(t)\, e^{-i\Omega t}(-\mathcal{E}_0)\,\mathcal{P}_{z12}\cos\omega t = \frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{P}_{z12}}{\hbar}\, e^{-i\Omega t}\cos\omega t\; c_2(t) \Big\} \Rightarrow$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = \cos x + i\sin x + \cos(-x) + i\sin(-x) = 2\cos x$$

$$\dot{c}_1(t) = \frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{P}_{z12}}{2\hbar}\, e^{-i\Omega t}\left\{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right\}$$

$$\boxed{\dot{c}_1(t) = c_2(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{P}_{z12}}{2\hbar}\left\{e^{-i(\Omega-\omega)t} + e^{-i(\Omega+\omega)t}\right\}} \quad (Z1)$$

$$\dot{c}_2(t) = -\frac{i}{\hbar}\, c_1(t)\, e^{i(\Omega_2-\Omega_1)t}\, U_{\varepsilon 21}(t) - \frac{i}{\hbar}\, c_2(t)\, \underbrace{e^{i(\Omega_2-\Omega_2)t}}_{1}\, \underbrace{U_{\varepsilon 22}(t)}_{0}$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{-i}{\hbar}\, c_1(t)\, e^{i\Omega t}(-\mathcal{E}_0)\,\mathcal{P}_{z21}\cos\omega t = \frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{P}_{z21}}{2\hbar}\, c_1(t)\, e^{i\Omega t}\left\{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right\}$$

$$\boxed{\dot{c}_2(t) = c_1(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{P}_{z21}}{2\hbar}\left\{e^{i(\Omega+\omega)t} + e^{i(\Omega-\omega)t}\right\}} \quad (Z2)$$

γενικά $Z_{21}^* = Z_{12} \Longleftrightarrow \mathcal{P}_{z21}^* = \mathcal{P}_{z12}$ άλλά εδώ θα τα θεωρήσουμε πραγματικά και θα θέσουμε $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{z21} = \mathcal{P}_{z12}$

ΑΡΑ οι εξισώσεις (Z1)(Z2) γίνονται

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= c_2(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{P}}{2\hbar}\left\{e^{-i(\Omega-\omega)t} + \underbrace{e^{-i(\Omega+\omega)t}}_{0\,(RWA)}\right\} \\ \dot{c}_2(t) &= c_1(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{P}}{2\hbar}\left\{\underbrace{e^{i(\Omega+\omega)t}}_{0\,(RWA)} + e^{i(\Omega-\omega)t}\right\} \end{aligned}} \quad (Z)$$

εξισώσεις Rabi

Isidor Isaac Rabi
1898 – 1988

Οι όροι με $(\Omega-\omega)$ μεταβάλλονται αργά αφού μάλιστα $\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \simeq \omega$ ενώ οι όροι με $(\Omega+\omega)$ μεταβάλλονται γρήγορα. Hence, on any appreciable time scale, these oscillations will quickly average to zero. The <u>rotating wave approximation</u> RWA is the claim that these fast terms may be neglected.

Άρα εφαρμόζοντας την RWA οι εξισώσεις (Σ) γίνονται

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= c_2(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{D}}{2\hbar}\,e^{-i(\Omega-\omega)t} \\ \dot{c}_2(t) &= c_1(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{D}}{2\hbar}\,e^{i(\Omega-\omega)t} \end{aligned}} \quad (H)$$

Θα λύσουμε τις (H) για αρχικές συνθήκες $c_1(0)=1 \quad c_2(0)=0$ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕ

Θα ακολουθήσουμε την επαναληπτική μέθοδο Newton

παίρνοντας ως μηδενικής τάξεως προσέγγιση $c_1^{(0)}(t)=1 \quad c_2^{(0)}(t)=0$

δηλ. για μικρούς χρόνους η λύση δεν απέχει πολύ από τις ΑΡΧΙΚΕΣ Σ

$$\dot{c}_1^{(1)}(t) = \cancelto{0}{c_2^{(0)}(t)}\,\frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{D}}{2\hbar}\,e^{-i(\Omega-\omega)t} = 0$$

$$\dot{c}_2^{(1)}(t) = \cancelto{1}{c_1^{(0)}(t)}\,\frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{D}}{2\hbar}\,e^{i(\Omega-\omega)t} \Rightarrow \int_0^t dc_2^{(1)}(t) = \int_0^t \frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{D}}{2\hbar}\,e^{i(\Omega-\omega)t}\,dt$$

$$\Rightarrow c_2^{(1)}(t) - \cancelto{0}{c_2^{(1)}(0)} = \frac{i\mathcal{E}_0\mathcal{D}}{2\hbar}\,\frac{1}{i(\Omega-\omega)}\left[e^{i(\Omega-\omega)t}\right]_0^t$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow c_2^{(1)}(t) = \frac{\mathcal{E}_0\mathcal{D}}{2\hbar(\Omega-\omega)}\left(e^{i(\Omega-\omega)t}-1\right) \\ &e^{ix}-1 = 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_2^{(1)}(t) = \frac{\mathcal{E}_0\mathcal{D}}{2\hbar(\Omega-\omega)}\,2i\sin\left(\frac{(\Omega-\omega)t}{2}\right) e^{i\frac{(\Omega-\omega)t}{2}}$$

$$\Rightarrow \left|c_2^{(1)}(t)\right|^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2\mathcal{D}^2}{\hbar^2(\Omega-\omega)^2}\cdot\sin^2\left(\frac{(\Omega-\omega)t}{2}\right)$$

ή

$$\boxed{\left|c_2^{(1)}(t)\right|^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2\mathcal{D}^2}{4\hbar^2}\;\frac{\sin^2\left(\frac{(\Omega-\omega)t}{2}\right)}{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)^2}}$$

πιθανότητα απορρόφησης σε διστάθμικό άτομο για πολωμένο κ μονοχρωματικό ΗΜ πεδίο

§21.6 Bestimmte Integrale p. 1083 Taschenbuch der Mathematik BSMM

16. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}|a|$

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση με $a \neq 0$ $\displaystyle\delta_a(x) = \frac{1}{\pi|a|}\left(\frac{\sin(ax)}{x}\right)^2$ είναι μια προσέγγιση της $\delta(x)$

Επί παραδείγματι:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\delta_a(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\pi|a|}\,\frac{\sin^2(ax)}{a^2x^2}\,a^2 = \frac{|a|}{\pi}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(ax)}{a^2x^2} =$

$$= \frac{|a|}{\pi}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 = \frac{|a|}{\pi}\left(\lim_{ax\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 = \frac{|a|}{\pi}1^2 = \frac{|a|}{\pi}$$

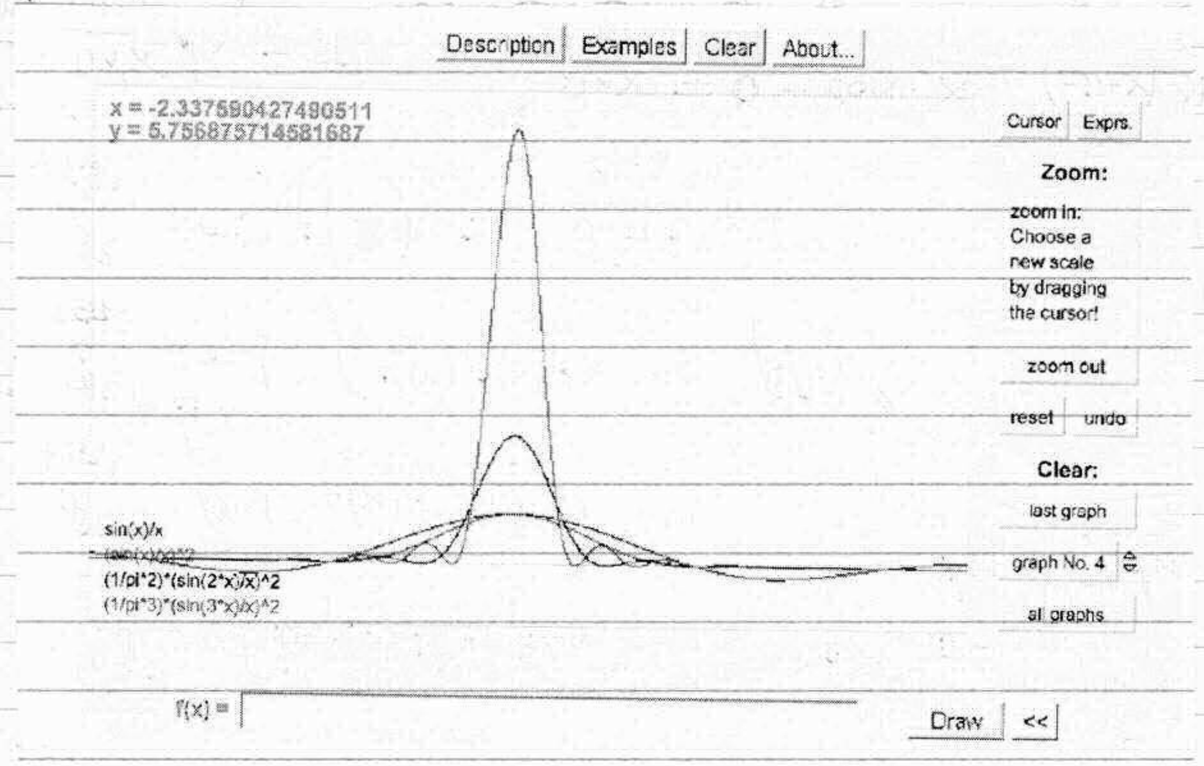
Δηλ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\delta_a(x) = \frac{|a|}{\pi}$ και άρα $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\delta_a(x)\right) = \infty$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_a(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi|a|}\,\frac{\sin^2 ax}{x^2}\,dx = \frac{1}{\pi|a|}\,\pi|a| = 1$

$$\lim_{a\to\infty}\delta_a(x) = \delta(x)$$

- να παρασταθούν προσεγγίσεις της $\delta_a(x)$ για αύξοντα a

π.χ. με τη βοήθεια Online Equation Grapher



http://www.tutor-homework.com/grapher.html

§3.4 Προσέγγιση Rabi

$$\dot{c}_1(t) = \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\left\{e^{-i(\Omega-\omega)t} + e^{-i(\Omega+\omega)t}\right\} c_2(t)$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\left\{e^{i(\Omega-\omega)t} + e^{i(\Omega+\omega)t}\right\} c_1(t) \qquad (3.29)$$

αρχικές συνθήκες

$$c_1(0) = 1$$
$$c_2(0) = 0 \qquad (3.30)$$

"Ακολουθούμε την επαναληπτική μέθοδο του Newton, παίρνοντας ως μηδενικής τάξεως προσέγγιση την εξής:" $c_1^{(0)}(t) \simeq 1 \quad c_2^{(0)}(t) \simeq 0 \quad \boxed{\Pi 0}$

Δηλαδή "με τη σκέψη ότι για μικρούς χρόνους θα είμαστε κοντά στις αρχικές συνθήκες."

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\Pi 0}\\ (3.29)\end{array}\right\} \Rightarrow \dot{c}_1^{(1)}(t) \simeq \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\{\dots\}\, c_2^{(0)}(t) \simeq 0 \Rightarrow c_1^{(1)}(t) \simeq c_1(0) = 1$$

$$\dot{c}_2^{(1)}(t) \simeq \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\{\dots\}\, \overset{1}{c_1^{(0)}(t)} \simeq \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\left\{e^{i(\Omega-\omega)t} + e^{i(\Omega+\omega)t}\right\} = f(t) \qquad (3.31)$$

$$\Rightarrow dc_2^{(1)}(t') = f(t')dt' \Rightarrow \int_0^t dc_2^{(1)}(t') = \int_0^t f(t')dt' \Rightarrow c_2^{(1)}(t) - c_2^{(1)}(0) = \int_0^t f(t')dt'$$

$$\Rightarrow c_2^{(1)}(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \quad \text{διατηρώντας τη συνθήκη } c_2^{(1)}(0) = c_2^{(0)}(0) = 0$$

Άρα $c_1^{(1)}(t) \simeq 1 \qquad \boxed{\Pi 1}$

$$c_2^{(1)}(t) \simeq \int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\int_0^t \left(e^{i(\Omega-\omega)\tau} + e^{i(\Omega+\omega)\tau}\right)d\tau = \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\left\{\frac{e^{i(\Omega-\omega)\tau}}{i(\Omega-\omega)} + \frac{e^{i(\Omega+\omega)\tau}}{i(\Omega+\omega)}\right\}\Bigg|_0^t$$

$$\Rightarrow c_2^{(1)}(t) \simeq \frac{i\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\left\{\frac{e^{i(\Omega-\omega)t}-1}{i(\Omega-\omega)} + \frac{e^{i(\Omega+\omega)t}-1}{i(\Omega+\omega)}\right\} \Rightarrow$$

$$c_1^{(1)}(t) \simeq 1 \qquad \boxed{\Pi 1}$$

$$c_2^{(1)}(t) = \frac{\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\left\{\frac{e^{i(\Omega-\omega)t}-1}{\Omega-\omega} + \frac{e^{i(\Omega+\omega)t}-1}{\Omega+\omega}\right\} \qquad (3.32)$$

§3.4 Προσέγγιση Rabi

$$\left.\begin{aligned}\dot{c}_1 &= i\frac{\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\left\{e^{-i(\Omega-\omega)t} + e^{-i(\Omega+\omega)t}\right\}c_2 \\ \dot{c}_2 &= i\frac{\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}\left\{e^{i(\Omega-\omega)t} + e^{i(\Omega+\omega)t}\right\}c_1\end{aligned}\right\}\text{εξισώσεις Rabi (3.29)}$$

Παραλείπουμε λοιπόν από τις αρχικές εξισώσεις (3.29) τους ΓΡΗΓΟΡΟΥΣ όρους που περιλαμβάνουν το $\Omega+\omega$ (Rotating Wave Approximation) και έχουμε

$$\left.\begin{aligned}i\dot{c}_1 &= -\frac{\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}e^{-i(\Omega-\omega)t}c_2 \\ i\dot{c}_2 &= -\frac{\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}e^{i(\Omega-\omega)t}c_1\end{aligned}\right\}(3.33)$$

Ορίζουμε $\left.\begin{aligned}c_1 &= e^{-i(\Omega-\omega)t/2}c_1' \\ c_2 &= e^{i(\Omega-\omega)t/2}c_2'\end{aligned}\right\}(3.34) \Rightarrow \left.\begin{aligned}\dot{c}_1 &= \frac{-i(\Omega-\omega)}{2}e^{-i(\Omega-\omega)t/2}c_1' + e^{-i(\Omega-\omega)t/2}\dot{c}_1' \\ \dot{c}_2 &= \frac{i(\Omega-\omega)}{2}e^{i(\Omega-\omega)t/2}c_2' + e^{i(\Omega-\omega)t/2}\dot{c}_2'\end{aligned}\right\}\overset{der}{(3.34)}$

$(3.33), (3.34), \overset{der}{(3.34)} \Rightarrow$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\Omega-\omega}{2}e^{-i(\Omega-\omega)t/2}c_1' + ie^{-i(\Omega-\omega)t/2}\dot{c}_1' &= -\frac{\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}e^{-i(\Omega-\omega)t}e^{i(\Omega-\omega)t/2}c_2' \\ -\frac{\Omega-\omega}{2}e^{i(\Omega-\omega)t/2}c_2' + ie^{i(\Omega-\omega)t/2}\dot{c}_2' &= -\frac{\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}e^{i(\Omega-\omega)t}e^{-i(\Omega-\omega)t/2}c_1'\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{aligned}i\dot{c}_1' + \frac{\Omega-\omega}{2}c_1' &= -\frac{\wp^*\mathcal{E}_0}{2\hbar}c_2' \\ i\dot{c}_2' - \frac{\Omega-\omega}{2}c_2' &= -\frac{\wp\mathcal{E}_0}{2\hbar}c_1'\end{aligned}\right\}(3.35)$$

"This is still a set of linear, coupled differential equations, but with time-independent coefficients"

5.46 Kryszewski σελ. 85

και αν ονομάσω $\Delta = \omega - \Omega$ και $\Omega = \frac{\wp\mathcal{E}_0}{\hbar}$

$$\left.\begin{aligned}i\dot{c}_1' - \frac{\Delta}{2}c_1' &= -\frac{\Omega^*}{2}c_2' \\ i\dot{c}_2' + \frac{\Delta}{2}c_2' &= -\frac{\Omega}{2}c_1'\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\dot{c}_1' &= -\frac{i\Delta}{2}c_1' + i\frac{\Omega^*}{2}c_2' \quad (5.45) \\ \dot{c}_2' &= \frac{i\Delta}{2}c_2' + i\frac{\Omega}{2}c_1'\end{aligned}$$

Είχαμε δείξει λοιπόν ότι

$$\left|C_2^{(1)}(t)\right|^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2 \wp^2}{4\hbar^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\Omega-\omega}{2}t\right)}{\left(\frac{\Omega-\omega}{2}t\right)^2} t^2$$

μπορούμε να ορίσουμε

$$x \equiv \frac{\omega-\Omega}{2}t$$

πιθανότητα απορροφήσεως σε διστάθμικό άτομο για πολωμένο και μονοχρωματικό φως.

οπότε $\left|C_2^{(1)}(t)\right|^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2 \wp^2}{4\hbar^2} \frac{\sin^2 x}{x^2} t^2$

$$f(x) \equiv \frac{\sin^2 x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}\right)^2 = 1^2 = 1$$

για $x=0$ απόλυτο μέγιστο με τιμή 1

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi, \quad n\in\mathbb{Z}$$

για $x=n\pi$, $n\in$ απόλυτα ελάχιστα με τιμή 0

ας ψάξουμε τοπικά μέγιστα κ. ελάχιστα

$$f'(x) = \frac{2\sin x\cos x\cdot x^2 - \sin^2 x\cdot 2x}{x^4}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x\cdot x\cdot\sin x\cdot\cos x - \sin x\cdot\sin x\cdot x = 0$$

$$\Rightarrow x\cdot\sin x\,(x\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow$$

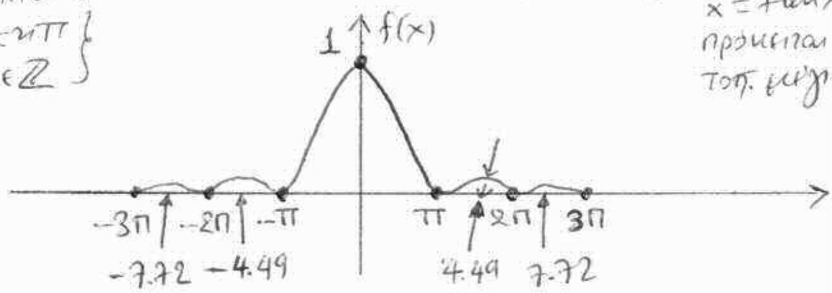
$x=0$ ή $\sin x = 0$ ή $x\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \tan x$

$x=0$ ⇓ το απόλυτο μέγιστο

$\sin x = 0$ ⇓ τα απόλυτα ελάχιστα $\left\{\begin{array}{l} x=n\pi \\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right\}$

$x=\tan x$ ⇓ $x \simeq \pm 4.49, \pm 7.72,$

μάλιστα α… κανείς κοιτ… τη λύση τ… $x=\tan x$ προκύπτει… τοπ. μέγ…



Αν μας ενδιαφέρει η πιθανότητα απορροφήσεως σε διστάθμικό άτομο (5)

για πολωμένο φως αλλά όχι μονοχρωματικό
(να προέρχεται από μεγάλη περιοχή συχνοτήτων γύρω από το $\omega_0 = \Omega$)

ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΟΥΜΕ

$$\mathcal{E}_0^2 = \int_{\Omega - \text{κάτι}}^{\Omega + \text{κάτι}} \frac{d\omega\, \rho(\omega)}{\varepsilon_0}$$

ε_0: διηλεκτρική σταθερά κενού $[\varepsilon_0] = \frac{C^2}{Nm^2}$

ρ: πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας

$$[\rho] = \frac{J}{m^3\, Hz} = \frac{J \cdot s}{m^3}$$

Άρα

$$\left[\int \frac{d\omega \rho(\omega)}{\varepsilon_0}\right] = \cancel{Hz} \cdot \frac{J}{m^3 \cancel{Hz}} \frac{N\cancel{m^2}}{C^2} = \frac{N^2}{C^2} = \left[\mathcal{E}_0^2\right]$$

$$P_2(t) = \frac{\mathcal{P}^2}{4\hbar^2} \int \frac{d\omega \rho(\omega)}{\varepsilon_0} \frac{\sin^2\left(\frac{\Omega-\omega}{2} t\right)}{\left(\frac{\Omega-\omega}{2} t\right)^2} t^2$$

πάλι

$$x \equiv \frac{\omega - \Omega}{2} t \Rightarrow$$

$$\frac{2x}{t} = \omega - \Omega \Rightarrow \omega = \Omega + \frac{2x}{t}$$

$$d\omega = \frac{2}{t} dx$$

Άρα

$$P_2(t) = \frac{\mathcal{P}^2}{4\varepsilon_0\hbar^2} \int_{-\text{κάτι}}^{\text{κάτι}} \frac{2}{t} dx\, \rho(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} t^2 = \frac{\mathcal{P}^2 t}{2\varepsilon_0 \hbar^2} \int_{-\text{κάτι}}^{\text{κάτι}} dx\, \rho(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \simeq \pi\, \delta(x)$$

$$P_2(t) \simeq \frac{\mathcal{P}^2 t \pi}{2\varepsilon_0 \hbar^2} \rho(x=0)$$

$x = 0 \Leftrightarrow \omega = \Omega$

t πεπερασμένο

$$\Downarrow$$

$$P_2(t) \simeq \frac{\mathcal{P}^2 t \pi}{2\varepsilon_0\hbar^2} \rho(\Omega) \Rightarrow \frac{dP_2(t)}{dt} \simeq \frac{\mathcal{P}^2 \pi}{2\varepsilon_0 \hbar^2} \rho(\Omega)$$

Στην περίπτωση που η ΗΜ ακτινοβολία <u>προέρχεται από μέλαν σώμα</u>
η ΗΜ ακτινοβολία <u>δεν είναι πολωμένη</u>
και κατά ένα τρόπο το $\rho(\Omega)$ μιας πολώσεως
θα πρέπει να αντικατασταθεί με το $\frac{\rho(\Omega)}{3}$
σύμφωνα με τη σχέση πλατών έντασης πεδίου

$$\langle \mathcal{E}_0^2 \rangle = \langle \mathcal{E}_{0x}^2 + \mathcal{E}_{0y}^2 + \mathcal{E}_{0z}^2 \rangle = 3 \langle \mathcal{E}_{0z}^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \mathcal{E}_{0z}^2 \rangle = \frac{\langle \mathcal{E}_0^2 \rangle}{3}$$

ΑΡΑ ΘΑ ΕΠΡΕΠΕ $\quad \frac{dP_2(t)}{dt} \simeq \frac{\mathcal{P}^2 \pi}{2\varepsilon_0 \hbar^2} \frac{1}{3} \rho(\Omega)$

$$\left.\begin{array}{l} dP_2(t) \simeq \frac{\mathcal{P}^2 \pi}{6\varepsilon_0 \hbar^2} \rho(\Omega)\, dt \\ \text{για } \omega = \Omega \quad dW_{\substack{\text{εξαναγκ.}\\ \text{απορ.}}} = B_{12}\, \rho(\Omega)\, dt \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B_{12} \simeq \frac{\mathcal{P}^2 \pi}{6\varepsilon_0 \hbar^2}}$$

είχαμε βρεί κάποτε $\quad \boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}}$ ή $\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3}}$

και $\quad \boxed{B_{12} = B_{21} = B}$ και $\boxed{B_{12} = B_{21} = B}$

με κατανομή $\rho(\nu, T)$ $\qquad$ με κατανομή $\rho(\omega, T)$

$$\boxed{B \simeq \frac{\mathcal{P}^2 \pi}{6\varepsilon_0 \hbar^2}}$$

$$\boxed{A \simeq \frac{\mathcal{P}^2 \Omega^3}{6\pi \hbar \varepsilon_0 c^3}}$$

Να λυθούν οι εξισώσεις (4) (μετά την RWA) χωρίς την <u>επαναληπτική μέθοδο Newton</u>

$$\dot{c}_1(t) = c_2(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0 \wp}{2\hbar}\, e^{-i(\Omega-\omega)t}$$

$$\dot{c}_2(t) = c_1(t)\,\frac{i\mathcal{E}_0 \wp}{2\hbar}\, e^{i(\Omega-\omega)t}$$

§3.6 Ασκήσεις ΑΣΚΗΣΗ 3.1 (3.8) ✡ ένωσεται με προσεγγίσεις

Θεωρείστε άτομο με ένα οπτικά ενεργό ηλεκτρόνιο το οποίο υπό την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου

$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{\imath}\,\mathcal{E}_x(z,t) = \hat{\imath}\,\mathcal{E}_0(z)\cos(\omega t)$$ ($\hat{\imath}$ μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα x)

περιορίζεται να κινείται μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων $u_1(\vec r)$ ($\Phi_1(\vec r)$) και $u_2(\vec r)$ ($\Phi_2(\vec r)$) της αδιατάρακτης Χαμιλτονιανής του ατόμου με αντίστοιχες ενέργειες E_1 και E_2.

Και το πρόβλημα τίθεται ως εξής: Δεδομένου ότι η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι $\Psi(\vec r,0)=\Phi(\vec r)$ ποια είναι η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t, $\Psi(\vec r,t)$, όταν ισχύει η $\underline{(3.10)}$;

Γράφουμε $\Phi(\vec r) = \sum_k f_k\,\Phi_k(\vec r)$ $\underline{(3.12)}$

$$\Psi(\vec r,t) = \sum_k C_k(t)\,e^{-i\Omega_k t}\,\Phi_k(\vec r) \quad \underline{(3.13)}$$

$\Psi(\vec r,0)=\Phi(\vec r)$ $\underline{(3.11)} \Longrightarrow C_k(0)=f_k$ $\underline{(3.14)}$

Αν η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου υπό την επίδραση της Η/Μ ακτινοβολίας είναι

$$\Psi(\vec r,t) = C_1(t)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\,u_1(\vec r) + C_2(t)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\,u_2(\vec r)$$ (ουσιαστικά η (3.13))

βρείτε τις εξισώσεις κίνησης των (μιγαδικών) πλατών $C_1(t)$, $C_2(t)$ όταν το $\mathcal{E}(z)$ μεταβάλλεται ελάχιστα σε αποστάσεις της τάξης των ατομικών διαστάσεων.

σταθερό

ουσιαστικά $\vec{\mathcal{E}}(t)=\hat{\imath}\,\mathcal{E}_0\cos\omega t$ ⟷ παρέβαλε με $\vec{\mathcal{E}}(t)=\hat z\,\mathcal{E}_0\cos\omega t$ της θεωρίας

Αν $E_1<E_2$, δώστε τις αρχικές συνθήκες στις οποίες θα υποβάλετε τα πλάτη $C_1(t)$, $C_2(t)$ προκειμένου να βρείτε την πιθανότητα ώστε το άτομο να απορροφήσει ενέργεια $E_2-E_1=\hbar\Omega$

→ RWA

→ Αρχικές συνθήκες $C_1(0)=1$, $C_2(0)=0$ $\underline{(3.30)}$

→ Ακολουθούμε την επαναληπτική μέθοδο του Νεύτωνα.

$\Phi_k(\vec r,t)=\Phi_k(\vec r)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}$

η χρονική εξέλιξη της αδιατάρακτης

$$i\hbar\frac{\partial\Phi_k(\vec r,t)}{\partial t}=\hat H_0\Phi_k(\vec r,t)$$

$$\Phi_k(\vec r,t)\overset{\text{υπ.}}{=}T(t)\,\Phi_k(\vec r)$$

$$i\hbar\,\Phi_k(\vec r)\frac{dT}{dt} = T(t)\,\hat H_0\Phi_k(\vec r)$$

$$i\hbar\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{\hat H_0\Phi_k(\vec r)}{\Phi_k(\vec r)} = \text{σταθερά, η οποία } E_k$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{i}{\hbar}E_k\,dt$$

$$\ln T = -\frac{i}{\hbar}E_k t + c$$

$$T(t)=\mathcal{N}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}$$

και επειδή $\Phi_k(\vec r,0)=\Phi_k(\vec r)$ υποθέτουμε

$\Longrightarrow \Phi_k(\vec r)=T(0)\,\Phi_k(\vec r)$

$\Longrightarrow T(0)=1 \Longrightarrow \mathcal{N}=1$

Άρα $\Phi_k(\vec r,t)=e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}\,\Phi_k(\vec r)$

$$\Rightarrow C_1^{(1)}(t)\simeq C_1(0)=1 \quad \text{κ}$$

$$C_2^{(1)}(t)\simeq \frac{\wp\,\mathcal{E}_0}{2\hbar}\left[\frac{e^{i(\Omega-\omega)t}-1}{\Omega-\omega}+\cancel{\frac{e^{i(\Omega+\omega)t}-1}{\Omega+\omega}}\right] \quad \underline{(3.32)}$$

$\boxed{\text{ΟΥΣΙΑΣΤΙΚΑ ΠΡΟΚΕΙΤΑΙ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΘΕΩΡΙΑΣ}}$

το αγνοούμε : RWA (Rotating Wave Approximation)

διότι $\left|e^{i(\Omega-\omega)t}\right|=1$ $\quad \left|e^{i(\Omega+\omega)t}\right|=1$

μεγάλος ⟸ $/(\Omega-\omega)$ $\quad$ $/\Omega+\omega$ → μικρός

αργός $\quad$ γρήγορος

RWA (3.32) $\Longrightarrow$

$$C_2^{(1)}(t) \simeq \frac{\wp \mathcal{E}_0}{2\hbar} \frac{e^{i(\Omega-\omega)t} - 1}{\Omega-\omega}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_2^{(1)}(t) \simeq \dfrac{\wp \mathcal{E}_0}{2\hbar} \dfrac{e^{i(\Omega-\omega)t} - 1}{\Omega-\omega} \\ e^{ix} - 1 = 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{ix}{2}} \end{array}\right\} \overset{RWA}{\Longrightarrow} C_2^{(1)}(t) \simeq \frac{\wp \mathcal{E}_0}{2\hbar} \frac{2i}{\Omega-\omega} \sin\left(\frac{(\Omega-\omega)t}{2}\right) e^{i\frac{(\Omega-\omega)t}{2}}$$

$$\overset{RWA}{\Longrightarrow} P_2^{(1)}(t) \simeq \frac{\wp^2 \mathcal{E}_0^2}{4\hbar^2} \frac{4}{(\Omega-\omega)^2} \sin^2\left(\frac{(\Omega-\omega)t}{2}\right)$$

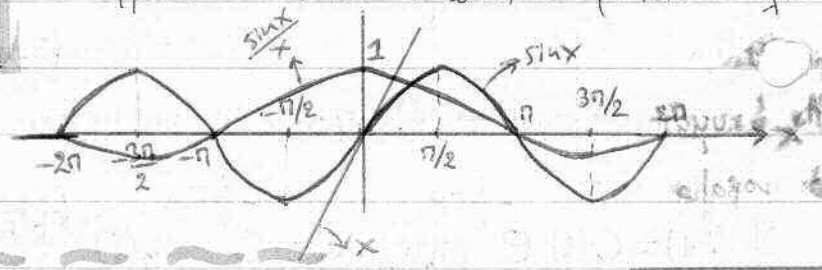
πιθανότητα

$$\overset{RWA}{\Longrightarrow} P_2^{(1)}(t) = \frac{\wp^2 \mathcal{E}_0^2}{4\hbar^2} \frac{\sin^2\left(\frac{(\Omega-\omega)}{2} t\right)}{\left(\frac{\Omega-\omega}{2} t\right)^2} t^2 \qquad x = \frac{(\omega-\Omega)}{2} t$$

RWA ⊕ ΕΠΑΝ. ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON

$$\boxed{\Longrightarrow P_2^{(1)}(t) = \frac{\wp^2 \mathcal{E}_0^2}{4\hbar^2} \frac{\sin^2 x}{x^2} t^2 = |C_2^{(1)}(t)|^2}$$

Εκφράστε την πιθανότητα αυτή συναρτήσει των πλατών.



$$P_2^{(1)}(\varnothing) \overset{RWA}{=} \frac{\wp^2 \mathcal{E}_0^2}{4\hbar^2} 1 \cdot \varnothing^2 = \varnothing$$

Άνθέλω $P_2^{(1)}(t) \overset{RWA}{=} 1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{και } \omega = \Omega \Rightarrow x = \varnothing \Rightarrow \dfrac{\sin^2 x}{x^2} = 1 \\ \text{και } \omega \neq \Omega \Rightarrow x \neq \varnothing \Rightarrow \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \neq 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\wp^2 \mathcal{E}_0^2}{4\hbar^2} \cdot 1\, t^2 = 1 \Rightarrow \boxed{t = \frac{2\hbar}{\wp \mathcal{E}_0}}$$

... άλλαξε η λύση

Πόσος είναι αυτός ο χρόνος, άραγε;

$\hbar \simeq 1.054\ 10^{-34}$ Js $\qquad \wp \simeq e \cdot a_\varnothing$

ακτίνα Bohr (ακτίνα τροχιάς ηλεκτρονίου στο άτομο H^1)

$a_\varnothing \simeq 0.529\ 10^{-10}$ m $\qquad e \simeq 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$\mathcal{E}_0$: ας πάρουμε $10^3 \frac{V}{m} \Rightarrow t = \dfrac{2 \cdot 1.054\ 10^{-34}\ Js}{1.6\ 10^{-19}\ C\ 0.529 \cdot 10^{-10}\ m\ 10^3 \frac{V}{m}} \simeq 2.5 \cdot 10^{-8}$ s $\simeq 25$ ns

$10^5 \frac{V}{m} \Rightarrow t = \dots \simeq 2.5 \cdot 10^{-10}$ s $= 0.25$ ns

$10^8 \frac{V}{m} \Rightarrow t = \dots \simeq 2.5\ 10^{-13}$ s $= 0.25$ ps

Δώστε την αντίστοιχη απάντηση όταν το άτομο θα εκπέμψει ενέργεια $E_2 - E_1 = \hbar\Omega$

Θα πρέπει $\left.\begin{array}{l} P_2^{(1)}(t) \overset{RWA}{=} \varnothing \\ t \neq \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\sin^2 x}{x^2} = \varnothing \Rightarrow$ (δες σχήμα) $x = \pi \Rightarrow \dfrac{(\Omega-\omega)}{2} t = \pi$

$\Omega = \omega$	δεν έχει λύση
$\Omega \neq \omega$	$t = \frac{2\pi}{\Omega-\omega}$

6.8 RADIATIVE TRANSITIONS

What happens when an electron goes from one state to another

In formulating his theory of the hydrogen atom, Bohr was obliged to postulate that the frequency ν of the radiation emitted by an atom dropping from an energy level E_m to a lower level E_n is

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{h}$$

It is not hard to show that this relationship arises naturally in quantum mechanics. For simplicity we shall consider a system in which an electron moves only in the x direction.

From Sec. 5.7 we know that the time-dependent wave function Ψ_n of an electron in a state of quantum number n and energy E_n is the product of a time-independent wave function ψ_n and a time-varying function whose frequency is

$$\nu_n = \frac{E_n}{h}$$

Hence

$$\Psi_n = \psi_n e^{-(iE_n/\hbar)t} \qquad \Psi_n^* = \psi_n^* e^{+(iE_n/\hbar)t} \tag{6.26}$$

The expectation value $\langle x \rangle$ of the position of such an electron is

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\Psi_n^*\Psi_n \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^*\psi_n e^{[(iE_n/\hbar)-(iE_n/\hbar)]t} \, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^*\psi_n \, dx \tag{6.27}$$

The expectation value $\langle x \rangle$ is constant in time since ψ_n and ψ_n^* are, by definition, functions of position only. The electron does not oscillate, and no radiation occurs. Thus quantum mechanics predicts that a system in a specific quantum state does not radiate, as observed.

The electron's position therefore oscillates sinusoidally at the frequency

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{h} \tag{6.33}$$

When the electron is in state n or state m the expectation value of the electron's position is constant. When the electron is undergoing a transition between these states, its position oscillates with the frequency ν. Such an electron, of course, is like an electric dipole and radiates electromagnetic waves of the same frequency ν. This result is the same as that postulated by Bohr and verified by experiment. As we have seen, quantum mechanics gives Eq. (6.33) without the need for any special assumptions.

6.9 SELECTION RULES

Some transitions are more likely to occur than others

We did not have to know the values of the probabilities a and b as functions of time, nor the electron wave functions ψ_n and ψ_m, in order to find the frequency ν. We need these quantities, however, to calculate the chance a given transition will occur. The general condition necessary for an atom in an excited state to radiate is that the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n\psi_m^* \, dx \tag{6.34}$$

not be zero, since the intensity of the radiation is proportional to it. Transitions for which this integral is finite are called **allowed transitions**, while those for which it is zero are called **forbidden transitions**.

In the case of the hydrogen atom, three quantum numbers are needed to specify the initial and final states involved in a radiative transition. If the principal, orbital, and magnetic quantum numbers of the initial state are n', l', m_l', respectively, and those of the final state are n, l, m_l, and u represents either the x, y, or z coordinate, the condition for an allowed transition is

Allowed transitions

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\psi_{n,l,m_l}\psi_{n',l',m_l'}^* \, dV \neq 0 \tag{6.35}$$

where the integral is now over all space. When u is taken as x, for example, the radiation would be that produced by a dipole antenna lying on the x axis.

Since the wave functions ψ_{n,l,m_l} for the hydrogen atom are known, Eq. (6.35) can be evaluated for $u = x$, $u = y$, and $u = z$ for all pairs of states differing in one or more quantum numbers. When this is done, it is found that the only transitions between states of different n that can occur are those in which the orbital quantum number l changes by $+1$ or -1 and the magnetic quantum number m_l does not change or changes by $+1$ or -1. That is, the condition for an allowed transition is that

Selection rules

$$\boxed{\Delta l = \pm 1} \tag{6.36}$$
$$\boxed{\Delta m_l = 0, \pm 1} \tag{6.37}$$

change in total quantum number n is not restricted. Equations (6.36) and (6.37) known as the selection rules for allowed transitions (Fig. 6.13).

We next consider an electron that shifts from one energy state to another. A system might be in its ground state n when an excitation process of some kind (a beam of radiation, say, or collisions with other particles) begins to act upon it. Subsequently we find that the system emits radiation corresponding to a transition from an excited state of energy E_m to the ground state. We conclude that at some time during the intervening period the system existed in the state m. What is the frequency of the radiation?

The wave function Ψ of an electron that can exist in both states n and m is

$$\Psi = a\Psi_n + b\Psi_m \tag{6.28}$$

where a^*a is the probability that the electron is in state n and b^*b the probability that it is in state m. Of course, it must always be true that $a^*a + b^*b = 1$. Initially $a = 1$ and $b = 0$; when the electron is in the excited state, $a = 0$ and $b = 1$; and ultimately $a = 1$ and $b = 0$ once more. While the electron is in either state, there is no radiation, but when it is in the midst of the transition from m to n (that is, when both a and b have nonvanishing values), electromagnetic waves are produced.

The expectation value $\langle x \rangle$ that corresponds to the composite wave function of Eq. (6.28) is

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x(a^*\Psi_n^* + b^*\Psi_m^*)(a\Psi_n + b\Psi_m)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(a^2\Psi_n^*\Psi_n + b^*a\Psi_m^*\Psi_n + a^*b\Psi_n^*\Psi_m + b^2\Psi_m^*\Psi_m)\, dx \end{aligned}\tag{6.29}$$

Here, as before, we let $a^*a = a^2$ and $b^*b = b^2$. The first and last integrals do not vary with time, so the second and third integrals are the only ones able to contribute to a time variation in $\langle x \rangle$.

With the help of Eqs. (6.26) we expand Eq. (6.29) to give

$$\begin{aligned}\langle x \rangle = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^*\psi_n\, dx + b^*a \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_m^* e^{+(iE_m/\hbar)t}\psi_n e^{-(iE_n/\hbar)t}\, dx \\ + a^*b \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_n^* e^{+(iE_n/\hbar)t}\psi_m e^{-(iE_m/\hbar)t}\, dx + b^2 \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_m^*\psi_m\, dx\end{aligned}\tag{6.30}$$

Because

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{and} \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

the two middle terms of Eq. (6.30), which are functions of time, become

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{E_m - E_n}{\hbar}\right)t \int_{-\infty}^{\infty} x[b^*a\psi_m^*\psi_n + a^*b\psi_n^*\psi_m]\, dx \\ + i\sin\left(\frac{E_m - E_n}{\hbar}\right)t \int_{-\infty}^{\infty} x[b^*a\psi_m^*\psi_n - a^*b\psi_n^*\psi_m]\, dx\end{aligned}\tag{6.31}$$

The real part of this result varies with time as

$$\cos\left(\frac{E_m - E_n}{\hbar}\right)t = \cos 2\pi\left(\frac{E_m - E_n}{h}\right)t = \cos 2\pi\nu t \tag{6.32}$$

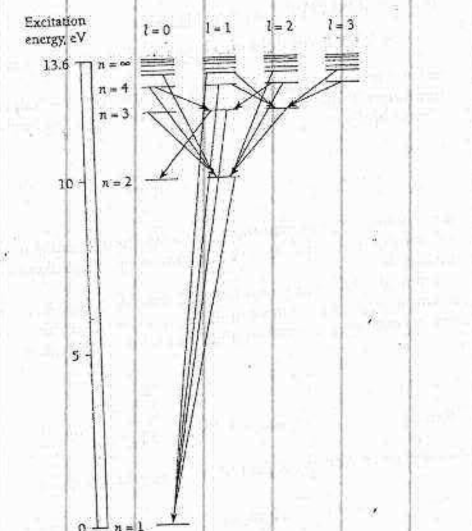


Figure 6.13 Energy-level diagram for hydrogen showing transitions allowed by the selection rule $\Delta l = \pm 1$. In this diagram the vertical axis represents excitation energy above the ground state.

The selection rule requiring that l change by ± 1 if an atom is to radiate means that an emitted photon carries off the angular momentum $\pm\hbar$ equal to the difference between the angular momenta of the atom's initial and final states. The classical analog of a photon with angular momentum $\pm\hbar$ is a left or right circularly polarized electromagnetic wave, so this notion is not unique with quantum theory.

$\Phi_1(\vec r)$ $\Phi_j(\vec r)$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\vec{r}_{1j} = \int u_1^*(\vec r)\,\vec r\,u_j(\vec r)\,d^3r$

όταν $u_1(\vec r)$ είναι η θεμελιώδης κατάσταση του ατόμου του Υδρογόνου $\Phi_{100}(r,\theta,\phi)$

και $u_j(\vec r)$ είναι μία από τις διεγερμένες καταστάσεις $\Phi_{200}, \Phi_{210}, \Phi_{21\pm1}$

Επίσης υπολογίστε το $\vec r_{1j}$ για $u_j(\vec r) = \Phi_{100}$

Δίνονται:

Άτομο Υδρογόνου $\quad \Psi_{nlm}(r\theta\phi) = R_{nl}(r)\cdot\Theta_{lm}(\theta)\cdot\Phi_m(\phi)$

principal quantum number $\quad n = 1,2,3,\ldots \quad R_{nl}(r) = e^{-(\text{σταθερά})\cdot r}(\text{πολυώνυμο τοῦ } r)$

orbital quantum number $\quad l = 0,1,2,\ldots,n-1 \quad \Theta_{lm}(\theta) = (\text{πολυώνυμο τοῦ } \cos\theta)$

magnetic quantum number $\quad m = m_l = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots l-1, l \quad \Phi_m(\phi) = e^{im\phi}$

spin quantum number $\quad m_s = \pm 1/2$

$E_n = \hbar\Omega_n = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a_0 n^2}$ eigenenergies $\quad a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \simeq 0.529\,\text{Å}$ $\quad$ ΠΡΟΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ σελ. 8 ΕΧΕΙ ΔΕΙΧΘΕΙ

$\Phi_{100}(r\theta\phi) = (\pi a_0^3)^{-1/2}\cdot \exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)$ άρτια

Στην αλλαγή $\vec r \rightarrow \vec r' = -\vec r$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} r \rightarrow r' = r \\ \theta \rightarrow \theta' = \pi - \theta \\ \phi \rightarrow \phi' = \pi + \phi \end{cases} \quad \boxed{2}$$

$\Phi_{200}(r\theta\phi) = (32\pi a_0^3)^{-1/2}\cdot\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)\cdot\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$ άρτια

$\Phi_{210}(r,\theta,\phi) = (32\pi a_0^3)^{-1/2}\cdot\left(\frac{r}{a_0}\right)\cdot\cos\theta\cdot\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$ περιττή

$\Phi_{21\pm1}(r\theta\phi) = (64\pi a_0^3)^{-1/2}\left(\frac{r}{a_0}\right)\cdot\sin\theta\cdot\exp(\pm i\phi)\cdot\exp\left(\frac{-r}{2a_0}\right)$ περιττή

Οι υπολογισμοί διευκολύνονται άν χρησιμοποιήσετε την πιο κάτω έκφραση για το διάνυσμα θέσης

$$\vec r = \frac{r}{2}\sin\theta\left[(\hat i - i\hat j)e^{i\phi} + (\hat i + i\hat j)e^{-i\phi}\right] + \hat k\, r\cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned}(\hat i - i\hat j)e^{i\phi} &= (\hat i - i\hat j)(\cos\phi + i\sin\phi) = \hat i\cos\phi - \cancel{i\cos\phi}\,\hat j + \cancel{i\sin\phi\,\hat i} + \sin\phi\,\hat j \\ (\hat i + i\hat j)e^{-i\phi} &= (\hat i + i\hat j)(\cos\phi - i\sin\phi) = \hat i\cos\phi + \cancel{i\cos\phi}\,\hat j - \cancel{i\sin\phi\,\hat i} + \sin\phi\,\hat j\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec r = r\sin\theta\cos\phi\,\hat i + r\sin\theta\sin\phi\,\hat j + r\cos\theta\,\hat k \Rightarrow \vec r = x\hat i + y\hat j + z\hat k \text{ ok}$$

και το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-\gamma r)\cdot r^n\,dr = \gamma^{-(n+1)}\,n!$ $\quad \boxed{6}$ $\quad$ ΠΡΟΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ σελ. 8 ΕΧΕΙ ΔΕΙΧΘΕΙ

selection rules

$\Delta l = \pm 1 \quad \Delta m_l = 0, \pm 1$

u_1	u_j	ολοκληρωτέα ποσότης	$\vec{r}_{1j}$	
Φ_{200} (A)	Φ_{200} (A)	(Π)	0	
Φ_{100} (A)	Φ_{100} (A)	(Π)	0	
»	Φ_{200} (A)	(Π)	0	
»	Φ_{210} (Π)	(A)	$\neq 0$	$100\vec{r}210$
»	$\Phi_{21\pm1}$ (Π)	(A)	$\neq 0$	$100\vec{r}21\pm1$

Δηλαδή (α) Δείξτε ότι $\vec{r}_{11} = \vec{r}_{22} = 0$ Ισχύει επειδή οι Φ_{100}, Φ_{200} είναι άρτιες (A) δηλαδή η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι περιττή (Π).

Άρα μένουν να εξεταστούν τα $100\vec{r}210$ και $100\vec{r}21\pm1$

$$d^3r = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$100\vec{r}210$

$$(\pi a_0^3)^{-1/2}(32\pi a_0^3)^{-1/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \; e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \cos\theta \; r \cdot \left\{ \frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{i}-i\hat{j})e^{i\phi} + (\hat{i}+i\hat{j})e^{-i\phi}\right] + \hat{k}\cos\theta \right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi a_0^3\sqrt{2}} a_0^4 \int_0^\infty \left(\frac{r}{a_0}\right)^4 d\left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{3}{2}\frac{r}{a_0}} \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi \cos\theta \left\{ \frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{i}-i\hat{j})e^{i\phi} + (\hat{i}+i\hat{j})e^{-i\phi}\right] + \hat{k}\cos\theta \right\}$$

$$\int_0^\infty q^4 e^{-\frac{3}{2}q} dq \overset{[6]}{=} \left(\frac{3}{2}\right)^{-(4+1)} 4! = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} 4! = \frac{2^8}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

$n=4 \quad \gamma = \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \cos\phi \int_0^{2\pi} d\phi \left[(\hat{i}-i\hat{j})e^{i\phi} + (\hat{i}+i\hat{j})e^{-i\phi}\right] + \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta \, \hat{k} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \, e^{\pm i\phi} = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi}_{0} \pm i \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \sin\phi}_{0}$$

Απομένει $\hat{k}\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \hat{k}(-1)\int_{+1}^{-1} \cos^2\theta \, d(\cos\theta) = \hat{k}\int_{-1}^{1} \beta^2 d\beta = \hat{k}\left[\frac{\beta^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\hat{k}$

Άρα, αν δεν έχω ξεχάσει κάτι $100\vec{r}210 = \frac{a_0}{\cancel{4\pi}\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3}\right)^4 \frac{2}{3}\hat{k}\,\cancel{2\pi} = a_0 \hat{k} \, \frac{2^{15/2}}{3^5}$

$\underline{100\vec{r}\,21\pm1}$

$$(\pi a_0^3)^{-1/2}(64\pi a_0^3)^{-1/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi\; e^{-\frac{r}{a_0}}\,\frac{r}{a_0}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}\, e^{-\frac{r}{2a_0}}\;\boxed{\vec{r}}\,\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{i}-i\hat{j})e^{i\phi}+(\hat{i}+i\hat{j})e^{-i\phi}\right]+\hat{k}\cos\theta\right\}$$

$$=\frac{1}{8\pi a_0^3}\,a_0^4\int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^4 e^{-\frac{r}{a_0}}\,e^{-\frac{r}{2a_0}}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}d\theta\,\sin^2\theta\, e^{\pm i\phi}\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{i}-i\hat{j})e^{i\phi}+(\hat{i}+i\hat{j})e^{-i\phi}\right]+\hat{k}\cos\theta\right\}$$

$$\int_0^\infty dq\cdot q^4\cdot e^{-\frac{3}{2}q}\ \underset{=}{\overset{[6]}{=}}\ \left(\frac{3}{2}\right)^{-(4+1)}4! = \frac{2^5}{3^5}\,2\cdot3\cdot2^2=\frac{2^8}{3^4}=\left(\frac{4}{3}\right)^4$$

$n=4\quad \gamma=\frac{3}{2}$

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\,\sin^3\theta\int_0^{2\pi}d\phi\, e^{\pm i\phi}\left[(\hat{i}-i\hat{j})e^{i\phi}+(\hat{i}+i\hat{j})e^{-i\phi}\right]+\int_0^\pi d\theta\sin^2\theta\cos\theta\,\hat{k}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi\, e^{\pm i\phi}}_{0}$$

$$\oplus\ =\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\,\sin^3\theta\cdot\left\langle\int_0^{2\pi}d\phi\,(\hat{i}+i\hat{j})\right\rangle=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right]_0^\pi 2\pi(\hat{i}+i\hat{j})$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cancel{2}\pi(\hat{i}+i\hat{j})=\frac{4\pi}{3}(\hat{i}+i\hat{j})$$

$$\ominus\ \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\sin^3\theta\left\langle\int_0^{2\pi}d\phi\,(\hat{i}-i\hat{j})\right\rangle=\dots\ \frac{4\pi}{3}(\hat{i}-i\hat{j})$$

$100\vec{r}\,21\pm1 =$

$$\pm\quad \frac{a_0}{8\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^4\frac{4\pi}{3}(\hat{i}\pm i\hat{j})=a_0(\hat{i}\pm i\hat{j})\frac{2^7}{3^5}\qquad |100\vec{r}\,21\pm1|=a_0\frac{2^{15/2}}{3^5}$$

$$=|100\vec{r}\,210|$$

ΚΑΤΟΠΙΝ (α) Δείξτε ότι $\vec{r}_{11}=0=\vec{r}_{22}$

(β) Βρείτε μεταξύ ποιων καταστάσεων $u_1(\vec{r})=\Phi_{100}(r,\theta,\phi)$ και $u_j(\vec{r})=\Phi_{200}(r,\theta,\phi)$ ή $\Phi_{210}(r,\theta,\phi)$ ή $\Phi_{21\pm1}(r,\theta,\phi)$ μπορεί να αναπτυχθεί διπολική ροπή $\vec{p}\neq0$. Διατυπώστε συμπεράσματα σε ότι αφορά τη δυνατότητα διέγερσης του ατόμου από τη στάθμη E_1 στην E_2 μέσω ηλεκτρικού πεδίου για τις διάφορες καταστάσεις u_j $\quad \vec{p}=-e\vec{r}\quad \vec{p}_{12}=\int\Phi_1^*(\vec{r})(-e\vec{r})\Phi_2(\vec{r})\,dV$

Άρα ανατρέχουμε στα προηγούμενα ολοκληρώματα

Μη μηδενικά είναι τα $\langle 100|\vec{r}|210\rangle$ ή $\vec{p}_{100\,210}$

$\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle$ ή $\vec{p}_{100\,21\pm1}$

Οπότε επιβεβαιώνονται οι κανόνες επιλογής $\Delta l = \pm 1$

(selection rules) $\Delta m_l = 0, \pm 1$

$$\vec{p}_{100\,210} = -e\langle 100|\vec{r}|210\rangle = -e a_0 \hat{k}\, \frac{2^{15/2}}{3^5} \qquad |\vec{p}_{100\,210}| = e a_0 \frac{2^{15/2}}{3^5}$$

$$\vec{p}_{100\,21\pm1} = -e\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle = -e a_0 (\hat{i} \pm i\hat{j}) \frac{2^7}{3^5} \cdot \qquad |\vec{p}_{100\,21\pm1}| = e a_0 \frac{2^{15/2}}{3^5}$$

οπότε ενιαία μπορούμε να γράψουμε $p = e a_0 \dfrac{2^{15/2}}{3^5}$

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0.529\,\text{Å} \quad \Rightarrow$$

$$p \simeq 1.6\, 10^{-19} C \,\frac{2^{15/2}}{3^5}\, 0.529\, 10^{-10} m \simeq 0.6305\, 10^{-29}\ Cm$$

(γ) Βάσει των σχέσεων (3.48) κ (3.50) για το ρυθμό πιθανότητας διεγερμένης εκπομπής από την ακτινοβολία μέλανος σώματος, υπολογίστε τους συντελεστές A κ B για τις συγκεκριμένες ατομικές μεταβάσεις στο άτομο Υδρογόνου.

$$\overset{(3.48)}{B = \frac{\pi p^2}{6\varepsilon_0 \hbar^2}} = \frac{\pi\, 0.6305^2 \cdot 10^{-58}\, C^2 m^2 m}{6\, 8.85\cdot 10^{-12} F\, 1.054^2\, 10^{-68} J^2 s^2} = 0.02117\cdot 10^{-58+80} \frac{\cancel{V}\,\cancel{C}\, m^3}{\cancel{C}\, J^2 s^2}$$

$$\Rightarrow B \simeq 0.02117\cdot 10^{22} \frac{m^3}{J s^2} \qquad [dW_{\delta\iota\epsilon\gamma.\epsilon\kappa\pi o\mu\pi.}] = [B\rho(\omega,T)\,dt]$$

$$= \frac{m^3}{J s^2}\,\frac{J}{m^3}\, s\, s = 1 \text{ (αδιάστατο, πιθανότητα)}$$

Αν π.χ. θέλω $dW_{\delta.\epsilon.} = 1$ σε $dt = 1s$ $\Rightarrow \rho = \dfrac{dW}{dt \cdot B} = \dfrac{1}{1s\, 0.02117\cdot 10^{22} m^3}\, J s^2$

$$\Rightarrow \rho = 47.23\cdot 10^{-22} \frac{J}{m^3 Hz} \simeq 29.52\, 10^{-3} \frac{eV}{m^3 Hz}$$

ενώ αν θέλω $dW_{\delta.\epsilon.} = 1$ σε $dt = 1ps$ $\Rightarrow \rho = \dfrac{dW}{dt \cdot B} = \dfrac{1}{10^{-12} s\, 0.02117\cdot 10^{22} m^3}\, J s^2$

$$\Rightarrow \rho = 47.23\cdot 10^{-10} \frac{J}{m^3 Hz} \simeq 29.52\cdot 10^{9} \frac{eV}{m^3 Hz}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2

- Δίνονται οἱ ἰδιοσυναρτήσεις τοῦ ἀτόμου τοῦ Ὑδρογόνου: συλλογικὸς κβαντικὸς ἀριθμός

$$\Psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = R_{n\ell}(r)\cdot \Theta_{\ell m}(\theta)\cdot \Phi_m(\phi) = \Phi_k(\vec r) \qquad k=\{n,\ell,m_\ell\}$$

principal quantum number $n=1,2,3,\dots$ $R_{n\ell}(r)=e^{-(\text{σταθερά})r}\cdot(\text{πολυώνυμο τοῦ } r)$

orbital quantum number $\ell=0,1,2,\dots,n-1$ $\Theta_{\ell m}(\theta)=(\text{πολυώνυμο τοῦ } \cos\theta)$

magnetic quantum number $m=m_\ell=-\ell,-\ell+1,\dots,\ell-1,\ell$ $\Phi_m(\phi)=e^{im\phi}$

spin quantum number $m_s=\pm 1/2$

με ἰδιοενέργειες

$$E_k=\hbar\Omega_k=-\frac{R_E}{n^2}=E_n$$ (δηλαδὴ ὑπάρχει ἐκφυλισμὸς ὡς πρὸς τα ℓ, m_ℓ)

$R_E \simeq 13.6\,eV$ ENEPΓEIA RYDBERG

$$R_E=\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \qquad r_1:=a_0=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}\simeq 0{,}529\,\text{Å}$$ ἀκτίνα Bohr

Ὁ ἐκφυλισμὸς ὡς πρὸς ℓ αἴρεται σε πολυηλεκτρονικὰ ἄτομα ὅπου $E_{n\ell m_\ell}=E_{n\ell}$, ἐνῶ σε μαγνητικὸ πεδίο αἴρεται ὁ ἐκφυλισμὸς ὡς πρὸς m_ℓ (φαινόμενο Zeeman).

ΠΡΟΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΕΧΕΙ ΔΕΙΧΤΕΙ: ἡ ἀλλαγὴ $\vec r \to \vec r\,' = -\vec r$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} r \to r'=r \\ \theta \to \theta'=\pi-\theta \\ \phi \to \phi'=\pi+\phi \end{cases} \qquad [2]$$

$$\Phi_{100}(r,\theta,\varphi)=(\pi a_0^3)^{-1/2}\exp\left(\frac{-r}{a_0}\right)$$ ἄρτια

$$\Phi_{200}(r,\theta,\phi)=(32\pi a_0^3)^{-1/2}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\cdot\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$$ ἄρτια

$$\Phi_{210}(r,\theta,\phi)=(32\pi a_0^3)^{-1/2}\left(\frac{r}{a_0}\right)\cos\theta\cdot\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$$ περιττή

$$\Phi_{21\pm1}(r,\theta,\phi)=(64\pi a_0^3)^{-1/2}\left(\frac{r}{a_0}\right)\sin\theta\cdot\exp(\pm i\phi)\exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$$ περιττή

να παρατεθοῦν και οἱ ὑπόλοιπες

και να ἐλεγχθεῖ ἂν εἶναι ἄρτιες ἢ περιττές

• Οι υπολογισμοί διευκολύνονται αν χρησιμοποιήσετε την πιο κάτω έκφραση για το διάνυσμα θέσεως:

$$\vec{r} = \frac{r}{2}\sin\theta\left[(\hat{\imath}-i\hat{\jmath})e^{i\phi} + (\hat{\imath}+i\hat{\jmath})e^{-i\phi}\right] + \hat{k}r\cos\theta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$(\hat{\imath}-i\hat{\jmath})e^{i\phi} = (\hat{\imath}-i\hat{\jmath})(\cos\phi + i\sin\phi) = \hat{\imath}\cos\phi + \cancel{\hat{\imath}\, i\sin\phi} - \cancel{i\hat{\jmath}\cos\phi} + \hat{\jmath}\sin\phi$$

$$(\hat{\imath}+i\hat{\jmath})e^{-i\phi} = (\hat{\imath}+i\hat{\jmath})(\cos\phi - i\sin\phi) = \hat{\imath}\cos\phi - \cancel{\hat{\imath}\, i\sin\phi} + \cancel{i\hat{\jmath}\cos\phi} + \hat{\jmath}\sin\phi$$

$$\Rightarrow \left[\ldots\right] = 2\hat{\imath}\cos\phi + 2\hat{\jmath}\sin\phi \Rightarrow \frac{r}{2}\sin\theta\left[\ldots\right] + \hat{k}r\cos\theta = r\cos\phi\sin\theta\,\hat{\imath} + r\sin\phi\sin\theta\,\hat{\jmath} + r\cos\theta\,\hat{k} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = \vec{r}$$

• Επίσης ΠΡΟΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΕΧΕΙ ΔΕΙΧΤΕΙ [6]

$$\int_0^\infty \exp(-\gamma r)\cdot r^n\, dr = \gamma^{-(n+1)}\, n!$$

• Θέλουμε να υπολογίσουμε αρχικά τα ολοκληρώματα $\vec{r}_{1j} = \int dV\, \Phi_1^*(\vec{r})\,\vec{r}\,\Phi_j(\vec{r})$ και στη συνέχεια τα $\vec{r}_{2j} = \int dV\, \Phi_2^*(\vec{r})\,\vec{r}\,\Phi_j(\vec{r})$

όπου οι δείκτες 1, 2, j αναφέρονται στο συλλογικό κβαντικό αριθμό $k = \{n, l, m_l\}$

1 $\Phi_{100}(r,\theta,\phi)$

2 $\Phi_{200}(r,\theta,\phi)$

3 $\Phi_{210}(r,\theta,\phi)$

4,5 $\Phi_{21\pm1}(r,\theta,\phi)$

k $\Phi_{nlm_l}(r,\theta,\phi)$

π.χ $\vec{r}_{11} :\equiv {}_{100}\vec{r}_{100}$

$\vec{r}_{12} :\equiv {}_{100}\vec{r}_{200}$

$\vec{r}_{13} :\equiv {}_{100}\vec{r}_{210}$

$\vec{r}_{14,5} :\equiv {}_{100}\vec{r}_{21\pm1}$

Ουσιαστικά τα ολοκληρώματα αυτά είναι ανάλογα με τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής $\vec{p} = e(-\vec{r})$

Π $\vec{r}$ Η

Εάν το στοιχείο πίνακα της διπολικής ροπής μηδενίζεται

$\Rightarrow$ δεν υπάρχει τέτοια μετάβαση.

✡ Θα φανεί λοιπόν ότι υπάρχουν οι κανόνες επιλογής
✡ $\Delta l = \pm 1$ — selection rules $\Delta l = \pm 1$, $\Delta m_l = 0, \pm 1$

$\Delta m_l = 0, \pm 1$

ΠΙΝΑΚΑΣ

$\Phi_i(\vec{r})$	$\Phi_j(\vec{r})$	Δl	Δm		ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΕΑ ΠΟΣΟΤΗΣ $\Phi_i^*(\vec{r})\vec{r}\Phi_j(\vec{r})$	ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ $\vec{r}_{ij}$	
100 (Α)	100 (Α)	0			(Π)	0	$100\vec{r}100$
100 (Α)	200 (Α)	0	0		(Π)	0	$100\vec{r}200$
100 (Α)	210 (Π)	1	0	ΥΠΑΚΟΥΕΙ	(Α)	$\neq 0$	$100\vec{r}210$
100 (Α)	21±1 (Π)	1	±1	ΥΠΑΚΟΥΕΙ	(Α)	$\neq 0$	$100\vec{r}21\pm1$
200 (Α)	200 (Α)	0	0		(Π)	0	$200\vec{r}200$

(α)(β) Δεδομένου ότι $\vec{p} = e(-\vec{r}) \Leftrightarrow \vec{p}_{ij} = (-e)\vec{r}_{ij} = \int \Phi_i^{+}(\vec{r})\,(-e)\vec{r}\,\Phi_j(\vec{r})\,dV$

Οπότε αν $\vec{r}_{ij} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_{ij} = \vec{0}$ και δεν επιτρέπεται τέτοια μετάβαση

Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε αν οι $\Phi_i(\vec{r})$ είναι κανονικοποιημένες και μεταξύ τους ορθογώνιες δηλαδή αν οι $\Phi_i(\vec{r})$ είναι ορθοκανονικές.

(γ) Δεδομένο έχοντας ότι οι συντελεστές Einstein δίνονται από τις σχέσεις

$$B = \frac{\pi p^2}{6\varepsilon_0 \hbar^2} \quad \text{και} \quad A = \frac{p^2 \Omega^3}{6\pi\hbar\varepsilon_0 c^3}$$

υπολογίστε τους για τις άνωθεν ατομικές μεταβάσεις στο άτομο του Υδρογόνου.

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\,Js$$

Οι πράξεις δείχνουν ότι

$$\vec{\mathcal{P}}_{100210} = (-e)\langle 100|\vec{r}|210\rangle = (-e)\,a_0\,\hat{k}\,\frac{2^{15/2}}{3^5} \Rightarrow \left|\vec{\mathcal{P}}_{100210}\right| = e a_0 \frac{2^{15/2}}{3^5}$$

$$\vec{\mathcal{P}}_{10021\pm1} = (-e)\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle = (-e)a_0(\hat{i} \pm i\hat{j})\frac{2^7}{3^5} \Rightarrow \left|\vec{\mathcal{P}}_{10021\pm1}\right| = e a_0 \frac{2^{15/2}}{3^5}$$

Οπότε ενιαία μπορούμε να γράψουμε $\mathcal{P} = e a_0 \frac{2^{15/2}}{3^5}$

$$\Rightarrow \mathcal{P} \simeq 1.6 \times 10^{-19}\,C\; 0.529 \times 10^{-10}\,m\; \frac{2^{15/2}}{3^5} \simeq 0.6305 \times 10^{-29}\,Cm$$

Αρα

$$B \simeq \frac{\pi \mathcal{P}^2}{6\varepsilon_0 \hbar^2} \simeq \frac{\pi \cdot 0.6305^2 \times 10^{-58}\,C^2 m^2}{6\cdot 8.85 \times 10^{-12}\,\frac{F}{m}\; 1.054^2 \cdot 10^{-68}\,J^2 s^2} \simeq 0.02117 \times 10^{22}\,\frac{m^3}{Js^2}$$

$$\frac{C^2 m^2 m}{F\,J^2 s^2} = \frac{C^2 m^3 V}{C\,J^2 s^2} = \frac{m^3}{J\cdot s^2}$$

$$[dW_{εξ.απορ}] = [B_{12}\rho(\nu,T)dt] = \frac{m^3}{Js^2}\,\frac{J}{m^3\cdot Hz}\,s = 1$$ (αδιάστατο, πιθανότητα)

Αν π.χ. θέλω $dW_{εξ.απορ} = 1$ σε $dt = 1s \Rightarrow \rho = \frac{1}{0.02117 \times 10^{22}\,m^3 \cdot 1s}\,Js^2$

$$\Rightarrow \rho = 47.23 \times 10^{-22}\,\frac{J}{m^3 Hz} \simeq 29.52 \times 10^{-3}\,\frac{eV}{m^3 Hz}$$

ενώ αν θέλω $dW_{εξ.απορ.} = 1$ σε $dt = 1ps \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho \simeq 47.23 \times 10^{-10}\,\frac{J}{m^3 Hz} \simeq 29.52 \times 10^{9}\,\frac{eV}{m^3 Hz}$$

$$E_1 = -13.6eV \quad E_2 = -\frac{13.6eV}{4} = -3.4eV \Rightarrow E_2 - E_1 = 10.2\,eV$$

$$\Rightarrow \Omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \equiv \Omega = \frac{10.2 \quad 1.6 \times 10^{-19}\,J}{1.054 \times 10^{-34}\,Js} = 15.48 \times 10^{15}\,Hz = 15.48\,PHz$$

$$A \simeq \frac{\mathcal{P}^2 \Omega^3}{6\pi\hbar\varepsilon_0 c^3} = \frac{0.6305^2 \times 10^{-58}\,C^2 m^2\; 15.48^3 \times 10^{45}\,Hz^3}{6\pi\; 1.054 \times 10^{-34}\,Js\; 8.85 \times 10^{-12}\,\frac{F}{m}\; 3^3 \times 10^{24}\,\frac{m^3}{s^3}}$$

$$\simeq 0.311 \times 10^9\,Hz \qquad \frac{C^2 m^2\; m\, s^3}{Js\; s^3\, F\, m^3} = \frac{C^2 V}{J s C} = \frac{1}{s} = Hz$$

$\vec{r}_{11}$

$$\langle 100|\vec{r}|100\rangle = (\pi a_0^3)^{-1/2}(\pi a_0^3)^{-1/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi\; e^{-\frac{2r}{a_0}}\, r\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{i}-i\hat{j})e^{i\phi}+(\hat{i}+i\hat{j})e^{-i\phi}\right]+\hat{k}\cos\theta\right\}$$

$$= \frac{a_0^4}{\pi a_0^3}\int_0^\infty\left(\frac{r}{a_0}\right)^3 e^{-\frac{2r}{a_0}} d\left(\frac{r}{a_0}\right)\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\phi\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{i}-i\hat{j})e^{i\phi}+(\hat{i}+i\hat{j})e^{-i\phi}\right]+\hat{k}\cos\theta\right\}$$

$$= \frac{a_0}{\pi}\int_0^\infty q^3 e^{-2q}dq\cdot\left\{\int_0^\pi d\theta\frac{\sin^2\theta}{2}\int_0^{2\pi}d\phi\left[(\hat{i}-i\hat{j})e^{i\phi}+(\hat{i}+i\hat{j})e^{-i\phi}\right]+\int_0^\pi d\theta\sin\theta\cos\theta\,\hat{k}\int_0^{2\pi}d\phi\right\}$$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \Rightarrow \sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

Όμως $\displaystyle\int_0^\infty q^3 e^{-2q}dq = 2^{-(3+1)}\,3! = \frac{2\cdot 3}{2^4} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$

$\gamma=2 \quad n=3$

$$\int_0^{2\pi}d\phi[\ldots] = (\hat{i}-i\hat{j})\int_0^{2\pi}d\phi\, e^{i\phi} + (\hat{i}+i\hat{j})\int_0^{2\pi}d\phi\, e^{-i\phi}$$

$$\int_0^{2\pi}d\phi\, e^{\pm i\phi} = \int_0^{2\pi}d\phi\cos(\pm\phi) + i\int_0^{2\pi}d\phi\sin(\pm\phi) = \underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi\cos\phi}_{0} \pm i\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi\sin\phi}_{0} = 0$$

$$\int_0^\pi d\theta\frac{\sin^2\theta}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{1}{4}\left\{\pi - \underbrace{\int_0^\pi\cos 2\theta\, d\theta}_{\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^\pi}\right\} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\pi d\theta\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\sin 2\theta = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^\pi = 0$$

Άρα $\displaystyle\langle 100|\vec{r}|100\rangle = \frac{a_0}{\pi}\frac{3}{2^3}\left\{\frac{\pi}{4}\cdot 0 + 0\cdot 2\pi\right\} = 0$

Αναμενόμενο διότι $\langle 100|\vec{r}|100\rangle = \int ⒶⓅⒶ = 0$

Ενώ $$\langle 100|100\rangle = (\pi a_0^3)^{-1}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi\; e^{-\frac{2r}{a_0}} = \frac{a_0^3}{\pi a_0^3}\int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq\, q^2 e^{-2q}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi\cdot 2\pi = \frac{1}{\cancel{\pi}}\,2^{-(2+1)}\,2!\,(1+1)\cdot 2\cancel{\pi} = \frac{2^3}{2^3} = 1$$

$\gamma=2 \quad n=2$

Αναμενόμενο διότι η Φ_{100} είναι κανονικοποιημένη.

(Αθ)

$$100\,\vec{r}\,200 = (\pi a_0^3)^{-1/2}(32\pi a_0^3)^{-1/2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi\; e^{-\frac{r}{a_0}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}\, r$$
$$\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{\imath}-i\hat{\jmath})e^{i\phi}+(\hat{\imath}+i\hat{\jmath})e^{-i\phi}\right]+\hat{k}\cos\theta\right\}$$

$$= \frac{a_0^4}{\pi a_0^3 4\sqrt{2}}\int_0^{\infty} d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^3 e^{-\frac{3r}{2a_0}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\phi\left\{\frac{\sin\theta}{2}[\ldots]+\hat{k}\cos\theta\right\}$$

$$\int_0^{\infty} dq\, q^3 e^{-\frac{3q}{2}}(2-q) = 2\int_0^{\infty} dq\, q^3 e^{-\frac{3q}{2}} - \int_0^{\infty} dq\, q^4 e^{-\frac{3}{2}q} = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{-(3+1)}3! - \left(\frac{3}{2}\right)^{-(4+1)}4!$$

$n=3\ \gamma=\frac{3}{2}$ $\quad$ $n=4\ \gamma=\frac{3}{2}$

$$= \frac{2\cdot 2^4}{3^4}2\cdot 3 - \frac{2^5}{3^5}2\cdot 3\cdot 2^2 = \frac{2^6}{3^3}-\frac{2^8}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^3-\left(\frac{4}{3}\right)^4$$

$$\int_0^{\pi} d\theta\,\frac{\sin^2\theta}{2}\int_0^{2\pi} d\phi\left[(\hat{\imath}-i\hat{\jmath})e^{i\phi}+(\hat{\imath}+i\hat{\jmath})e^{-i\phi}\right]+\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\cos\theta\,\hat{k}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi}{4}\cdot 0 + 0\cdot 2\pi = 0$$

Άρα $100\,\vec{r}\,200 = \frac{a_0}{\pi 4\sqrt{2}}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^3-\left(\frac{4}{3}\right)^4\right)\cdot 0 = 0$

Αναμενόμενο διότι $100\,\vec{r}\,200 = \int (A)(\Pi)(A) = 0$

Ενώ $$100\,200 = (\pi a_0^3)^{-1/2}(32\pi a_0^3)^{-1/2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi\; e^{-\frac{r}{a_0}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}} =$$

$$= \frac{a_0^3}{\pi a_0^3 4\sqrt{2}}\int_0^{\infty} d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{3r}{2a_0}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{1}{\cancel{4\pi}\sqrt{2}}\int_0^{\infty} dq\, q^2 e^{-\frac{3q}{2}}(2-q)\cdot\cancel{4\pi} \qquad [-\cos\theta]_0^{\pi} = 1+1 = 2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{2\int_0^{\infty} dq\, q^2 e^{-\frac{3q}{2}} - \int_0^{\infty} dq\, q^3 e^{-\frac{3q}{2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{2\left(\frac{3}{2}\right)^{-(2+1)}2! - \left(\frac{3}{2}\right)^{-(3+1)}3!\right\}$$

$n=2\ \gamma=3/2$ $\quad$ $n=3\ \gamma=3/2$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{2^5}{3^3}-\frac{2^5}{3^3}\right\} = 0$$

Αναμενόμενο διότι οι Φ_{100} και Φ_{200} είναι ορθογώνιες.

$$\langle 200|200\rangle = \frac{1}{32\pi a_0^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \left(2-\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$= \frac{a_0^3}{32\pi a_0^3}\int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\left(2-\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \underbrace{\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\phi}_{4\pi}$$

4π (ολική στερεά γωνία)

$$=\frac{1}{8}\left\{\int_0^\infty dq\, q^2\left(4+q^2-4q\right)e^{-q}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{4\int_0^\infty dq\,q^2e^{-q}+\int_0^\infty dq\,q^4e^{-q}-4\int_0^\infty dq\,q^3e^{-q}\right\}$$

$\gamma=1\ \ n=2 \qquad \gamma=1\ \ n=4 \qquad \gamma=1\ \ n=3$

$$=\frac{1}{8}\left\{4\cdot1^{-(2+1)}2!+1^{-(4+1)}4!-4\cdot1^{-(3+1)}3!\right\}=\frac{8+4!-4!}{8}=1$$

Αναμενόμενο διότι η Φ_{200} είναι κανονικοποιημένη.

$$\langle 100|\vec r|210\rangle = \left(\pi a_0^3\right)^{-1/2}\left(32\pi a_0^3\right)^{-1/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\, e^{-\frac{r}{a_0}}\left(\frac{r}{a_0}\right)\cos\theta\, e^{-\frac{r}{2a_0}}\, r \left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat i-i\hat j)e^{i\phi}+(\hat i+i\hat j)e^{-i\phi}\right]+\hat k\cos\theta\right\} =$$

(II)

$$\frac{a_0}{\pi4\sqrt2}\left(\frac{4}{3}\right)^4\frac{2}{3}\hat k\,2\pi = a_0\hat k\,\frac{2^{15/2}}{3^5}$$

$$=\frac{a_0^4}{\pi a_0^3 4\sqrt2}\int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^4 e^{-\frac{r}{a_0}}e^{-\frac{r}{2a_0}}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\phi\left\{\frac{\sin\theta}{2}[\ldots\phi\ldots]+\hat k\cos\theta\right\}$$

$\Delta l=1$

$$\Delta m_l=0 \quad =\frac{a_0}{\pi4\sqrt2}\int_0^\infty dq\,q^4e^{-\frac{3}{2}q}\left\{\int_0^\pi d\theta\,\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{2}\int_0^{2\pi}d\phi\left[(\hat i-i\hat j)e^{i\phi}+(\hat i+i\hat j)e^{-i\phi}\right] + \int_0^\pi d\theta\sin\theta\cos^2\theta\,\hat k\int_0^{2\pi}d\phi\right\}$$

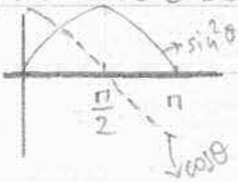
$\gamma=\frac{3}{2}\ \ n=4$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-(4+1)}4!=\frac{2^5}{3^5}2\cdot3\cdot2^2=\frac{2^8}{3^4}=\left(\frac{4}{3}\right)^4$$

$$-\int_1^{-1}\cos^2\theta\,d(\cos\theta)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=2/3 \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}d\phi[\ldots]=(\hat i-i\hat j)\int_0^{2\pi}\underbrace{e^{i\phi}d\phi}_{0}+(\hat i+i\hat j)\int_0^{2\pi}\underbrace{e^{-i\phi}d\phi}_{0}=0$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\,\sin^2\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\int\sin^2\theta\, d(\sin\theta)=0 \qquad =\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^0\right\}=0$$



$$\overset{?}{=}\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\pi/2}d\theta\sin^2\theta\cos\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}d\theta\sin^2\theta\cos\theta\right\}=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1\sin^2\theta\, d(\sin\theta)+\int_1^0\sin^2\theta\, d(\sin\theta)\right\}$$

(A10) $\Delta \ell = 1 \quad \Delta m_\ell = \pm 1$

$$\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle = (\pi a_0^3)^{-1/2}(64\pi a_0^3)^{-1/2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi\, e^{-\frac{r}{a_0}}\frac{r}{a_0}\sin\theta\, e^{\pm i\phi} e^{-\frac{r}{2a_0}} r$$

$$\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{\imath}-i\hat{\jmath})e^{i\phi}+(\hat{\imath}+i\hat{\jmath})e^{-i\phi}\right]+\hat{k}\cos\theta\right\}$$

$$= \frac{a_0^4}{\pi a_0^3 8}\int_0^\infty d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^4 e^{-\frac{r}{a_0}} e^{-\frac{r}{2a_0}} \int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\theta\, d\phi\, \sin^2\theta\, e^{\pm i\phi}\cdot$$

$$\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[\quad \phi \quad\right]+\hat{k}\cos\theta\right\}$$

$$\int_0^\infty dq\, q^4 e^{-q} e^{-\frac{q}{2}} = \int_0^\infty dq\, q^4 e^{-\frac{3q}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-(4+1)} 4! = \frac{2^5}{3^5}2\cdot3\cdot2^2 = \frac{2^8}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

$\gamma = \frac{3}{2} \quad n=4$

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta \sin^3\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, e^{\pm i\phi}\left[(\hat{\imath}-i\hat{\jmath})e^{i\phi}+(\hat{\imath}+i\hat{\jmath})e^{-i\phi}\right] +$$

$$\underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^2\theta\cos\theta\,\hat{k}}_{0}\ \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{\pm i\phi}}_{0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{\pm i\phi}\left[(\hat{\imath}-i\hat{\jmath})e^{i\phi}+(\hat{\imath}+i\hat{\jmath})e^{-i\phi}\right]$$

$$\int_0^\pi d\theta \sin^3\theta = \left[\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right]_0^\pi = \left(\frac{(-1)}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right) = -\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1 = 2-\frac{2}{3}$$
$$= \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$$

αν $\oplus$ $$= \frac{2}{3}\left\{\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{2i\phi}}_{0}(\hat{\imath}-i\hat{\jmath}) + \int_0^{2\pi} d\phi\,(\hat{\imath}+i\hat{\jmath})\right\} = \frac{2}{3}\cdot 2\pi(\hat{\imath}+i\hat{\jmath}) = \frac{4\pi}{3}(\hat{\imath}+i\hat{\jmath})$$

αν $\ominus$ $$= \frac{2}{3}\left\{\int_0^{2\pi} d\phi\,(\hat{\imath}-i\hat{\jmath}) + \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{-2i\phi}}_{0}(\hat{\imath}+i\hat{\jmath})\right\} = \frac{2}{3}2\pi(\hat{\imath}-i\hat{\jmath}) = \frac{4\pi}{3}(\hat{\imath}-i\hat{\jmath})$$

όποτε $$\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle = \frac{a_0}{8\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^4\frac{4\pi}{3}(\hat{\imath}\pm i\hat{\jmath}) = a_0(\hat{\imath}\pm i\hat{\jmath})\frac{2^7}{3^5}$$

$$\left|\langle 100|\vec{r}|21\pm1\rangle\right| = a_0\frac{2^7}{3^5}2^{1/2} = a_0\frac{2^{15/2}}{3^5} = \left|\langle 100|\vec{r}|210\rangle\right|$$

$\vec{r}_{22}$

$$200\vec{r}200 = (32\pi a_0^3)^{-1/2}(32\pi a_0^3)^{-1/2}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\left(2-\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\,r\,\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[(\hat{i}-i\hat{j})e^{i\phi}+(\hat{i}+i\hat{j})e^{-i\phi}\right]+\hat{k}\cos\theta\right\} =$$

$$= \frac{a_0^4}{32\pi a_0^3}\int_0^{\infty} d\left(\frac{r}{a_0}\right)\left(\frac{r}{a_0}\right)^3\left(2-\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\cdot\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\cdot$$

$$\left\{\frac{\sin\theta}{2}\left[\ \cdot\ \phi\ \right]+\hat{k}\cos\theta\right\} =$$

$$\int_0^{\infty} dq\, q^3(2-q)^2 e^{-q} = \int_0^{\infty} dq\, q^3(4+q^2-4q)e^{-q} = 4\int_0^{\infty} dq\, q^3 e^{-q} + \int_0^{\infty} dq\, q^5 e^{-q} - 4\int_0^{\infty} dq\, q^4 e^{-q}$$

$\gamma=1\ n=3 \qquad \gamma=1\ n=5 \qquad \gamma=1\ n=4$

$$= 4\,1^{-(3+1)}\,3! + 1^{-(5+1)}\,5! - 4\cdot 1^{-(4+1)}\,4! = 4! + 4!\,5 - 4!\,4 =$$

$$= 4!(1+5-4) = 2\cdot 4!$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta\,\sin^2\theta\int_0^{2\pi} d\phi\left[(\hat{i}-i\hat{j})\underbrace{e^{i\phi}}_{\emptyset}+(\hat{i}+i\hat{j})\underbrace{e^{-i\phi}}_{\emptyset}\right] + \int_0^{\pi} d\theta\cdot\sin\theta\,\hat{k}\cos\theta\int_0^{2\pi} d\phi\,.$$

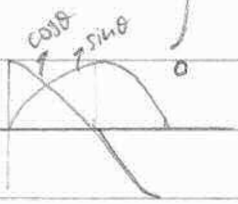
$$\int_0^{\pi} d\theta\,\sin^2\theta = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sin 2\theta}{2\cdot 2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$

$$\int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\cos\theta = \int_0 \sin\theta\, d(\sin\theta) = \emptyset$$



$$\Rightarrow 200\vec{r}200 = \frac{a_0}{32\pi}\,2\cdot 4!\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\emptyset + \emptyset\cdot 2\pi\right\} = \emptyset$$

Αναμενόμενο διότι $200\vec{r}200 = \int (A)(\Pi)(A) = \emptyset$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

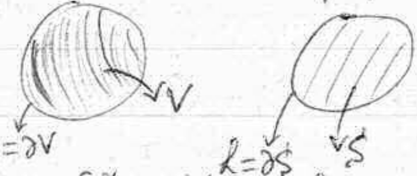
Κβάντωση Πεδίου.

Αλληλεπίδραση ΗΜ ακτινοβολίας – ύλης κβαντικά.

MAXWELL equations Formulation in terms of total charge and current

θεώρημα Gauss $\vec{\Delta}$: διάνυσμα β: βαθμωτό θεώρημα Stokes

$$\oint_{S=\partial V} \vec{\Delta}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\Delta}\, dV \qquad\qquad \oint_{\ell=\partial S} \vec{\Delta}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{\Delta}\cdot d\vec{S}$$



S: σύνορο του όγκου V ℓ: σύνορο της επιφάνειας S

διαφορική μορφή ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL ολοκληρωτική μορφή

ν. Gauss ηλεκτρικό $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ $\boxed{\Delta 1}$

$$\underbrace{\oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\Phi_{\vec{E},S=\partial V}:\ \text{ηλεκτρική ροή}} \overset{\theta.\,Gauss}{=\!=} \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV = \frac{q_{εντός}}{\varepsilon_0} \qquad \Phi_{\vec{E},S=\partial V} = \frac{q_{εντός}}{\varepsilon_0}\ \boxed{O1}$$

ν. Gauss μαγνητικό $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ $\boxed{\Delta 2}$

$$\underbrace{\oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{S}}_{\Phi_{\vec{B},S=\partial V}:\ \text{μαγνητική ροή}} \overset{\theta.\,Gauss}{=\!=} \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = 0 \qquad \Phi_{\vec{B},S=\partial V} = 0\ \boxed{O2}$$

ν. Faraday (επαγωγής) induction $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\boxed{\Delta 3}$

χρονικώς μεταβαλλόμενο $\vec{B}$ δημιουργεί $\vec{E}$

$$\underbrace{\int_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}_{\mathcal{E}\ (ΗΕΔ)} \overset{\theta.\,Stokes}{=\!=} \int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\mathcal{E}_{\ell=\partial S} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\vec{B},S}\ \boxed{O3}$$

ν. Ampère ⊕ διόρθωση Maxwell $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $\boxed{\Delta 4}$

χρονικώς μεταβαλλόμενο $\vec{E}$ ή/και $\vec{J}$ δημιουργούν $\vec{B}$

$$\underbrace{\oint_{\ell=\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{\ell}}_{\mathfrak{B}} \overset{\theta.\,Stokes}{=\!=} \int_S \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{S} = \mu_0\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \mu_0\varepsilon_0\int_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$= \underbrace{\mu_0 I_{διαπερνά,S}}_{\text{ν. Ampère}} + \underbrace{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\Phi_{\vec{E},S}}{\partial t}}_{\text{διόρθωση Maxwell}}\ \boxed{O4}$$

$\to I_d$ ρεύμα μετατοπίσεως · displacement current

ΣΤΟ ΚΕΝΟ

$\boxed{\rho = 0,\ \vec{J} = 0}$ ή αντίστοιχως $\boxed{q_{εντός} = 0,\ I_{διαπερνά,S} = 0}$

οπότε οι εξισώσεις Maxwell γίνονται

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$	$\boxed{\Delta 1\kappa}$		$\Phi_{\vec{E},S=\partial V} = 0$	$O1\kappa$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	$\boxed{\Delta 2\kappa}$		$\Phi_{\vec{B},S=\partial V} = 0$	$O2\kappa$
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\boxed{\Delta 3\kappa}$	15	$\mathcal{E}_{\ell=\partial S} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\vec{B},S}$	$O3\kappa$
$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	$\boxed{\Delta 4\kappa}$	14	$\mathfrak{B}_{\ell=\partial S} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\vec{E},S}$	$O4\kappa$

$\boxed{\text{ΥΠΑΡΞΗ Η/Μ κυμάτων στο κενό}}$ Με τη βοήθεια των Δ1κ, Δ2κ, Δ3κ, Δ4κ θα αποδείξουμε την ύπαρξη Η/Μ κυμάτων στο κενό

χρειαζόμαστε και την ταυτότητα $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\Delta}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Delta}) - \nabla^2\vec{\Delta}$ $\boxed{T1}$

$\nabla^2\vec{\Delta} \equiv (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{\Delta}$ vector Laplacian $\boxed{T2}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}(\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}}_{\substack{0 \\ \text{από } \boxed{Δ1κ}}}) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \Rightarrow \nabla^2\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \boxed{KE}$$

K.E.3Δ με $u_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c \simeq 3\cdot 10^8\ m/s$ $\boxed{ΦΤ}$

Ορίζοντας $\square \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ $\boxed{T3}$ D'Alembertian, η $\boxed{KE}$ μπορεί να γραφτεί $\square\vec{E} = \varnothing$ $\boxed{KE'}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\,\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}(\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}}_{\substack{0 \\ \text{από } \boxed{Δ2κ}}}) - \nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{E}) \Rightarrow$$

$$-\nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \quad \boxed{KB}$$

K.E.3Δ με $u_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c \simeq 3\cdot 10^8\ m/s$ $\boxed{ΦΤ}$

όμοιως η $\boxed{KB}$ μπορεί να γραφτεί $\square\vec{B} = \varnothing$ $\boxed{KB'}$

$\boxed{KE}$ & $\boxed{KB}$ each component of $\vec{E}$ or $\vec{B}$ independently satisfies the wave equation

Για την $\boxed{KE}$ δοκιμάζω λύσεις της μορφής $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\overbrace{\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta}^{\Phi})}$ $\boxed{Λ1}$

Η $\boxed{Λ1}$ εκφράζει μιγαδική ποσότητα και ως εκ τούτου δεν μπορεί να παριστάνει το ηλεκτρικό πεδίο που είναι πραγματικό μέγεθος. Όμως, τόσο το πραγματικό της μέρος $\vec{E}_0\cos(\overbrace{\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta}^{\Phi})$ όσο και το φανταστικό της μέρος $\vec{E}_0\sin(\overbrace{\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta}^{\Phi})$ συνιστούν λύσεις που διαφέρουν κατά το όρισμα. Είναι ίδιες με διαφορετικό δ.

$\boxed{KE}$ $\boxed{Λ1}$

$\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} = ik_x\vec{E}$ $\quad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = (ik_x)^2\vec{E}$ $\quad$ Άρα $\boxed{KE} \Rightarrow -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} \Rightarrow$

$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = (-i\omega)\vec{E}$ $\quad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = (-i\omega)^2\vec{E}$

dispersion relation $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ $\boxed{ΣΔ}$ $\quad k^2 = |\vec{k}|^2$

$\vec{E}_0$ is a constant vector, ω and $\vec{k}$ are constants related to the frequency f and wavelength λ of the wave by $\boxed{|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}}$ $\boxed{\omega = 2\pi f}$ the frequency is conventionally defined to be positive

We find that $\boxed{Λ1}$ is a solution to $\boxed{KE}$ provided that ω and $\vec{k}$ satisfy the dispersion relation $\boxed{ΣΔ}$.

If we inspect $\boxed{Λ1}$, we see that a particle travelling in the direction $\vec{k}$ has to move at a speed $\omega/|\vec{k}|$ in order to remain at the same phase in the wave: the quantity c is the phase velocity of the wave.

Θεωρώ $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\overbrace{\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta}^{\Phi})}$ $\boxed{Λ2}$

$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(E_x,E_y,E_z)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \Big\} \Rightarrow$

$\frac{\partial E_x}{\partial x}=ik_xE_x,\quad \frac{\partial E_y}{\partial y}=ik_yE_y,\quad \frac{\partial E_z}{\partial z}=ik_zE_z \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=i\vec{k}\cdot\vec{E}$

$\vec{\nabla}\to i\vec{k}$ για $\boxed{\Lambda 1}$

$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E}=0$ άρα $\vec{E}\perp\vec{k}$ (A) ή $\vec{k}\cdot\vec{E}_0=0$ άρα $\vec{E}_0\perp\vec{k}$ 27

κάθετα   ισοδύναμα

$\boxed{\Delta 2K}$

$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(B_x,B_y,B_z)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \Big\} \Rightarrow$

$\frac{\partial B_x}{\partial x}=ik_xB_x,\quad \frac{\partial B_y}{\partial y}=ik_yB_y,\quad \frac{\partial B_z}{\partial z}=ik_zB_z \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=i\vec{k}\cdot\vec{B}$

$\vec{\nabla}\to i\vec{k}$ για $\boxed{\Lambda 2}$

$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{B}=0$ άρα $\vec{B}\perp\vec{k}$ (B) ή $\vec{k}\cdot\vec{B}_0=0$ άρα $\vec{B}_0\perp\vec{k}$ 28

κάθετα   ισοδύναμα

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\hat{i}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

$$=\hat{i}\left(ik_yB_z-ik_zB_y\right)-\hat{j}\left(ik_xB_z-ik_zB_x\right)+\hat{k}\left(ik_xB_y-ik_yB_x\right)$$

$\frac{\partial B_\ell}{\partial x_m}=ik_mB_\ell$

$$=i\vec{k}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B}=i\vec{k}\times\vec{B} \qquad \vec{\nabla}\to i\vec{k} \text{ για } \boxed{\Lambda 2}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=i\vec{k}\times\vec{E} \qquad \vec{\nabla}\to i\vec{k} \text{ για } \boxed{\Lambda 1}$$

$\boxed{\Delta 3K}$

$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \Rightarrow i\vec{k}\times\vec{E}=-(-i\omega)\vec{B} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{E}=\omega\vec{B}$ (Γ)

$\boxed{\Delta 4K}$

$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}} \Rightarrow i\vec{k}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0(-i\omega)\vec{E} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{B}=-\mu_0\varepsilon_0\omega\vec{E}$ (Δ)

Ακόμα $\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E})=\vec{k}\times\omega\vec{B} \Leftrightarrow \underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{E})}_{0\ (A)}\vec{k}-(\vec{k}\cdot\vec{k})\vec{E}=\omega\underbrace{(\vec{k}\times\vec{B})}_{(\Delta)} \Rightarrow -k^2\vec{E}=\omega(-\mu_0\varepsilon_0\omega)\vec{E}$

$\boxed{T}$ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ (Δ) $\Rightarrow k^2=\frac{\omega^2}{c^2}$ (ΣΔ)

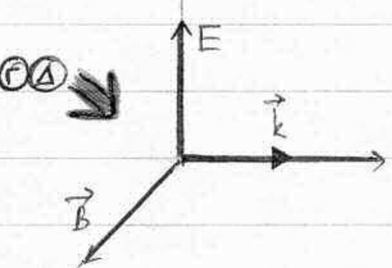
ισχύει

$\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{B})=\vec{k}\times(-\mu_0\varepsilon_0\omega\vec{E}) \Rightarrow \underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{B})}_{0\ (B)}\vec{k}-(\vec{k}\cdot\vec{k})\vec{B}=-\mu_0\varepsilon_0\omega\underbrace{(\vec{k}\times\vec{E})}_{(\Gamma)} \Rightarrow$

$\Rightarrow -k^2\vec{B}=-\mu_0\varepsilon_0\omega^2\vec{B}$

$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}$ (ΣΔ)

Επίσης (A)(B)(Γ)(Δ)



$\vec{E}\times\vec{B}\uparrow\uparrow\vec{k}$

και (Γ) $\Rightarrow |\vec{k}|\,|\vec{E}|=\omega|\vec{B}|$
(Δ) $\Rightarrow |\vec{k}|\,|\vec{B}|=\frac{\omega}{c^2}|\vec{E}|$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}=c}$ $\boxed{EBC}$

(4) ✡ $\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ $\boxed{KE}$ 20 $\qquad \nabla^2\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$ $\boxed{KB}$ 25

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\underbrace{(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\delta)}_{\phi}}$ $\boxed{M}$ $\qquad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\underbrace{(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\delta)}_{\phi}}$ $\boxed{\Lambda 2}$

$\vec{E} = \vec{E}_0\cos\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)}_{\phi}$ 21 $\qquad \vec{B} = \vec{B}_0\cos\underbrace{(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\delta)}_{\phi}$ 26

"We have written the same constants ω, $\vec{k}$ and δ as we used for the electric field, though we do not so far know they have to be the same. We shall show in the following section that these constants do indeed need to be the same for both the electric and the magnetic field."

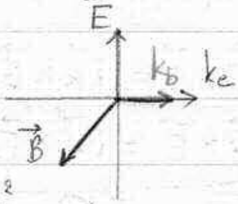
"Finally, substituting the expressions for the fields (21) and (26) into Eqs. (15) and (14) respectively, and again noting that the latter equations must be satisfied at all points in space and at all times, we see first that the quantities ω, $\vec{k}$ and δ appearing in (21) and (26) must be the same in each case. ..." (Γ)(8) $\boxed{EBC}$

Αν θεωρούσαμε τα $\vec{k}, \omega, \delta$ διαφορετικά για κάθε περίπτωση $\vec{E}$ ή $\vec{B}$

π.χ. $\vec{k}_e, \omega_e, \delta_e$ $\qquad \vec{k}_b, \omega_b, \delta_b$

1 $\vec{k}_e\cdot\vec{E} = 0$ (A)' $\qquad$ από τις σχέσεις αυτές 1,2,3,4 ⇓ $\qquad$ 3 $\vec{k}_b\cdot\vec{B} = 0$ (B)'

2 $\vec{k}_e\times\vec{E} = \omega_b\vec{B}$ (Γ)' $\qquad$ 4 $\vec{k}_b\times\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\omega_e\vec{E}$ (Δ)'



άρα $\vec{k}_e \uparrow\uparrow \vec{k}_b$

Έχουμε ακόμη $k_e^2 = \frac{\omega_e^2}{c^2}$, $k_b^2 = \frac{\omega_b^2}{c^2}$ $\Longrightarrow \frac{\omega_e^2}{|\vec{k}_e|^2} = \frac{\omega_b^2}{|\vec{k}_b|^2} \Rightarrow \frac{\omega_e}{\omega_b} = \frac{|\vec{k}_e|}{|\vec{k}_b|}$

$|\vec{k}_e|\,|\vec{E}| = \omega_b|\vec{B}|$ $\qquad |\vec{k}_b|\,|\vec{B}| = \frac{\omega_e|\vec{E}|}{c^2}$

$$\frac{|\vec{k}_e|\,|\vec{E}|}{|\vec{k}_b|\,|\vec{B}|} = \frac{\omega_b|\vec{B}|\,c^2}{\omega_e|\vec{E}|} \Rightarrow \frac{|\vec{E}|^2}{|\vec{B}|^2} = \frac{\omega_b\,|\vec{k}_b|}{\omega_e\,|\vec{k}_e|}c^2$$

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{\omega_b}{|\vec{k}_e|}\ ,\quad \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{|\vec{k}_b|c^2}{\omega_e} \Rightarrow \frac{\omega_b\omega_e}{|\vec{k}_e||\vec{k}_b|} = c^2$$

(15) (14)
(21) (26)

Ας συνδυάσουμε τις Δ3κ (Γ) Δ4κ (Δ) θεωρώντας ότι για το $\vec{E}$ έχουμε $\vec{k}_e, \omega_e, \delta_e, \vec{E}_o$ (σταθερά, πραγματικά)
λοιπόν (1) (2)
και για το $\vec{B}$ έχουμε $\vec{k}_b, \omega_b, \delta_b, \vec{B}_o$

$\vec{k}_e \times \vec{E} = \omega_b \vec{B}$ $\quad$ $\vec{k}_b \times \vec{B} = -\mu_o \varepsilon_o \omega_e \vec{E}$ $\quad$ $\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega_e t + \delta_e)}$

$\vec{B} = \vec{B}_o e^{i(\vec{k}_b \cdot \vec{r} - \omega_b t + \delta_b)}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ k_{ex} & k_{ey} & k_{ez} \\ E_{ox} e^{\cdots} & E_{oy} e^{\cdots} & E_{oz} e^{\cdots} \end{vmatrix} = \omega_b \left(B_{ox} e^{+++}, B_{oy} e^{+++}, B_{oz} e^{+++} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{ey} E_{oz} e^{\cdots} - k_{ez} E_{oy} e^{\cdots} = \omega_b B_{ox} e^{+++} \\ k_{ez} E_{ox} e^{\cdots} - k_{ex} E_{oz} e^{\cdots} = \omega_b B_{oy} e^{+++} \\ k_{ex} E_{oy} e^{\cdots} - k_{ey} E_{ox} e^{\cdots} = \omega_b B_{oz} e^{+++} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k_{ey} E_{oz} - k_{ez} E_{oy}}{\omega_b B_{ox}} = e^{i[(\vec{k}_b - \vec{k}_e)\cdot \vec{r} - (\omega_b - \omega_e)t + (\delta_b - \delta_e)]} \\ \dfrac{k_{ez} E_{ox} - k_{ex} E_{oz}}{\omega_b B_{oy}} = \quad " \\ \dfrac{k_{ex} E_{oy} - k_{ey} E_{ox}}{\omega_b B_{oz}} = \quad " \end{cases}$$

Αν θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, θα πρέπει, δεδομένου ότι τα αριστερά μέλη είναι σταθερά, και το δεξιό μέλος να μην εξαρτάται από το $\vec{r}$ $\Rightarrow$ $\vec{k}_b = \vec{k}_e$

Ομοίως, αν θεωρήσουμε ~~τη~~ κάποια συγκεκριμένη θέση $\vec{r}$, θα πρέπει, " " "

" $t \Rightarrow$ $\omega_b = \omega_e$

Τέλος, αν $\vec{k}_b = \vec{k}_e$ και $\omega_b = \omega_e \Rightarrow$ τα δεξιά μέλη θα ισούνται με $e^{i(\delta_b - \delta_e)} =$

$= \cos(\delta_b - \delta_e) + i \sin(\delta_b - \delta_e)$

Αλλά τα αριστερά μέλη είναι πραγματικά $\Rightarrow \sin(\delta_b - \delta_e) = 0$

$\Rightarrow \delta_b = \delta_e + n\pi, \; n \in \mathbb{Z}$

ΟΧΙ

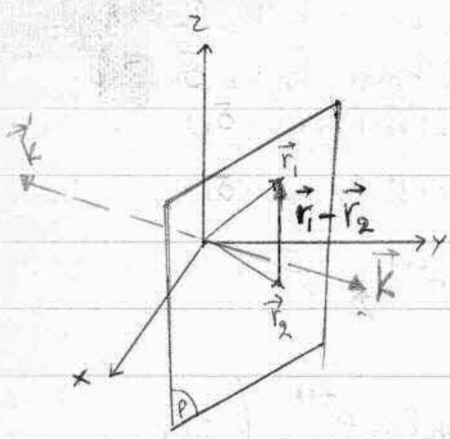
ΟΧΙ, τα $\vec{E}_o, \vec{B}_o$ είναι, γενικώς, μιγαδικά...

και ειδική λύση είναι η $\delta_b = \delta_e$

Γενικώς, είναι προτιμητέος ο συμβολισμός $\phi = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta$

"φάση" "διαφορά φάσεως"

(6)



έστω ότι τα $\overset{\text{τυχαία}}{\vec r_1, \vec r_2}$ καταλήγουν στο επίπεδο p

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (\vec r_1 - \vec r_2) \in p \\ \text{έστω } \vec k \perp p \end{array}\right\} \Rightarrow (\vec r_1 - \vec r_2)\cdot \vec k = 0 \Rightarrow \vec r_1 \cdot \vec k = \vec r_2 \cdot \vec k$

$\Rightarrow \forall \vec r$ που καταλήγει στο p $\boxed{\vec r \cdot \vec k = \sigma}$ (σταθερό)

έστω $\vartheta = (\widehat{\vec r, \vec k})$ $\quad \vec r \cdot \vec k = \sigma \Rightarrow |\vec r| \cdot |\vec k| \cos\vartheta = \sigma$

$> 0 \Rightarrow \cos\vartheta > 0 \Rightarrow \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2})$ $\vec k$ οξεία

$< 0 \Rightarrow \cos\vartheta < 0 \Rightarrow \vartheta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ $\vec k'$ αμβλεία

$= 0 \Rightarrow \cos\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = \pi/2$ ορθή

$\vec r \cdot \vec k = \sigma \Rightarrow$

$k_x x + k_y y + k_z z = \sigma \Rightarrow$

$k_x x + k_y y + k_z z - \sigma = 0$ ή

$Ax + By + Cz + D = 0$

plane equation

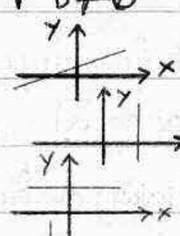
paulbourke.net

Εξίσωση Ευθείας στο επίπεδο xy $\quad Ax + By + \Gamma = 0$ με $\overline{A=0 \land B=0} \Leftrightarrow A \neq 0 \lor B \neq 0$

(i) $x = \frac{-\Gamma}{A} - \frac{By}{A}$ ή $y = \frac{-\Gamma}{B} - \frac{A}{B}x$ δηλαδή $A \neq 0 \quad B \neq 0$

(ii) $x = -\Gamma/A$ $\quad A \neq 0 \quad B = 0$

(iii) $y = -\Gamma/B$ $\quad A = 0 \quad B \neq 0$



(i) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{π.χ.}}{\underset{y=ax+\beta}{=}} \begin{vmatrix} x & ax+\beta & 1 \\ x_1 & ax_1+\beta & 1 \\ x_2 & ax_2+\beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & ax & 1 \\ x_1 & ax_1 & 1 \\ x_2 & ax_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & \beta & 1 \\ x_1 & \beta & 1 \\ x_2 & \beta & 1 \end{vmatrix}$

$= a \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ομοίως για $x = \gamma y + \delta$

(ii) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \underset{x=\sigma}{=} \begin{vmatrix} \sigma & y & 1 \\ \sigma & y_1 & 1 \\ \sigma & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} 1 & y & 1 \\ 1 & y_1 & 1 \\ 1 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(iii) $\underline{y=\sigma}$ $\begin{vmatrix} x & \sigma & 1 \\ x_1 & \sigma & 1 \\ x_2 & \sigma & 1 \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\vec{k}_e \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{k}_e \times \vec{E} = \omega_b \vec{B} \qquad \vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega_e t + \delta_e)}$

$\vec{k}_b \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{k}_b \times \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega_e \vec{E} \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 \, e^{i(\vec{k}_b \cdot \vec{r} - \omega_b t + \delta_b)}$

"θεωρώντας $\vec{k}_e, \omega_e, \delta_e, \vec{E}_0$ σταθερά, πραγματικά"
$\vec{k}_b, \omega_b, \delta_b, \vec{B}_0$

ΑΜΑΡΤΙΑ Ἐξομολογουμένη οὐκ ἔστιν ΑΜΑΡΤΙΑ

Θεωρήσαμε $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)}$ (Λ1)

και $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)}$ (Λ2)

και σας είπα ότι αποδεικνύεται ότι αν θεωρούσα

$\vec{k}_e, \omega_e, \delta_e$ για το $\vec{E}$

και $\vec{k}_b, \omega_b, \delta_b$ για το $\vec{B}$

αποδεικνύεται ότι $\vec{k}_e = \vec{k}_b := \vec{k}$ ΑΛΗΘΕΣ

$\omega_e = \omega_b := \omega$ ΑΛΗΘΕΣ

$\delta_e = \delta_b := \delta$ ΨΕΥΔΕΣ

το ΨΕΥΔΕΣ οφείλεται στην υπόθεση που έκανα ότι τα $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ είναι πραγματικά.

Maxwell equations

Formulations in terms of

total charge and current

... στο κενό ...

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (Δ1) ν. Gauss ηλεκτρισμού $\qquad \rho = 0 \quad \vec{J} = \vec{0}$ $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ (Δ1Κ)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (Δ2) ν. Gauss μαγνητισμού $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (Δ2Κ)

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (Δ3) ν. Faraday $\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (Δ3Κ)

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (Δ4) ν. Ampère κ διόρθωση Maxwell $\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (Δ4Κ)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \quad (T1)$$

$$\nabla^2\vec{A} \stackrel{\text{ορ}}{=} (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} \quad (T2)$$

με $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3\times10^8\,m/s$

$\Rightarrow \nabla^2\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ $\boxed{KE}$ Δοκιμάζω λύση μορφής $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)}$ (Λ1) $\Rightarrow |\vec{k}| = k = \dfrac{\omega}{c}$ [Σ

$\nabla^2\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t}$ $\boxed{KB}$ Δοκιμάζω λύση μορφής $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta')}$ (Λ2) $\Rightarrow \boxed{ΣΔ}$ $\quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$\omega = 2\pi$

$c = \lambda\nu$

➜ Δεδομένου ότι παραγωγίζουμε ως προς x, y, z, t οι διαφορές φάσεως δ, δ′ είναι αυθαίρετες

για (Λ1) κ (Λ2) $\quad \vec{\nabla} \to i\vec{k}$

(Δ1Κ)(Λ1) $\Rightarrow i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E} = 0$ (Α)

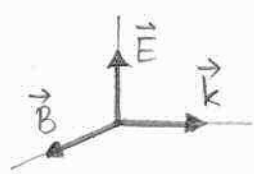
(Δ2Κ)(Λ2) $\Rightarrow i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{B} = 0$ (Β)

(Δ3Κ)(Λ1)(Λ2) $\Rightarrow i\vec{k}\times\vec{E} = i\omega\vec{B} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$ (Γ)

(Δ4Κ)(Λ1)(Λ2) $\Rightarrow i\vec{k}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0(-i\omega)\vec{E} \Rightarrow \vec{k}\times\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\omega\vec{E}$ (Δ)

$\Bigg\} \Rightarrow \dfrac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = c$ $\boxed{EBC}$

(Α)(Β)(Γ)(Δ) $\Rightarrow$



$\vec{E}\times\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{k}$

Ας δοκιμάσουμε λύσεις μορφής $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}_e\cdot\vec{r}-\omega_e t+\delta_e)} = \vec{E}_0\, e^{(e)}$ (Λ1′) .. Τότε..

$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}_b\cdot\vec{r}-\omega_b t+\delta_b)} = \vec{B}_0\, e^{(b)}$ (Λ2′)

(Δ1Κ)(Λ1′) $\Rightarrow \vec{k}_e\cdot\vec{E} = 0$ (Α′)

(Δ2Κ)(Λ2′) $\Rightarrow \vec{k}_b\cdot\vec{B} = 0$ (Β′)

(Δ3Κ)(Λ1′)(Λ2′) $\Rightarrow \vec{k}_e\times\vec{E} = \omega_b\vec{B}$ (Γ′)

(Δ4Κ)(Λ1′)(Λ2′) $\Rightarrow \vec{k}_b\times\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\omega_e\vec{E}$ (Δ′)

καμία σχέση για δ_e, δ_b

Γ') $\vec{k}_e \times \vec{E} = \omega_b \vec{B} \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ k_{ex} & k_{ey} & k_{ez} \\ E_{ox} e^{e} & E_{oy} e^{e} & E_{oz} e^{e} \end{vmatrix} = (\omega_b B_{ox} e^{b}, \omega_b B_{oy} e^{b}, \omega_b B_{oz} e^{b}) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{ey} E_{oz} e^{e} - k_{ez} E_{oy} e^{e} = \omega_b B_{ox} e^{b} \\ k_{ez} E_{ox} e^{e} - k_{ex} E_{oz} e^{e} = \omega_b B_{oy} e^{b} \\ k_{ex} E_{oy} e^{e} - k_{ey} E_{ox} e^{e} = \omega_b B_{oz} e^{b} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{k_{ey} E_{oz} - k_{ez} E_{oy}}{\omega_b B_{ox}} = e^{b} e^{e *} = e^{i[(\vec{k}_b - \vec{k}_e)\cdot \vec{r} - (\omega_b - \omega_e)t + (\delta_b - \delta_e)]}$$

$$\frac{k_{ez} E_{ox} - k_{ex} E_{oz}}{\omega_b B_{oy}} = e^{b} e^{e *} = \quad \text{ΙΔΙΟ}$$

$$\frac{k_{ex} E_{oy} - k_{ey} E_{ox}}{\omega_b B_{oz}} = e^{b} e^{e *} = \quad \text{ΙΔΙΟ}$$

σταθερές $\qquad\qquad\qquad$ συναρτήσεις των $\vec{r}, t$

Αν θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, επειδή τα αριστερά μέρη είναι σταθερά θα πρέπει και τα δεξιά να είναι, δηλαδή να μην εξαρτώνται από το $\vec{r} \Rightarrow$

$$\vec{k}_b = \vec{k}_e.$$

Αν θεωρήσουμε κάποια συγκεκριμένη θέση $\vec{r}$, επειδή τα αριστερά μέρη είναι σταθερά θα πρέπει και τα δεξιά να είναι, δηλαδή να μην εξαρτώνται από το $t \Rightarrow$

$$\omega_b = \omega_e.$$

Τέλος, αν $\vec{k}_b = \vec{k}_e$ και $\omega_b = \omega_e \Rightarrow$ τα δεξιά μέρη θα ισούνται με $e^{i(\delta_b - \delta_e)} = \cos(\delta_b - \delta_e) + i \sin(\delta_b - \delta_e)$

Αν τα αριστερά μέρη ήταν πραγματικά $\Rightarrow \sin(\delta_b - \delta_e) = 0 \Rightarrow$
(*ΥΠΟΘΕΣΗ ΠΟΥ ΕΚΑΝΑ*)

$\delta_b - \delta_e = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow$ μερική λύση $\delta_b = \delta_e$

Τα $\vec{E}_o, \vec{B}_o$ όμως είναι εν γένει ΜΙΓΑΔΙΚΑ $\Rightarrow$ ΜΕΝΟΥΜΕ ΣΤΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

$$\frac{k_{ey} E_{oz} - k_{ez} E_{oy}}{\omega_b B_{ox}} = e^{i(\delta_b - \delta_e)}$$

$$\frac{k_{ez} E_{ox} - k_{ex} E_{oz}}{\omega_b B_{oy}} = e^{i(\delta_b - \delta_e)} \qquad \text{ΚΑΙ ΤΙΠΟΤΕ ΠΑΡΑΠΑΝΩ}$$

$$\frac{k_{ex} E_{oy} - k_{ey} E_{ox}}{\omega_b B_{oz}} = e^{i(\delta_b - \delta_e)}$$

• στο προηγούμενο κεφάλαιο κάναμε **ΗΜΙΚΛΑΣΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ** — άτομο κβαντικά, ΗΜ πεδίο κλασικά

υποθέσαμε $\vec{E}_a$ (πλάτος Η πεδίου) = σταθερό
έπρεπε η ΗΜ ακτινοβολία να είναι πυκνή ώστε να μην επηρεάζεται το $\vec{E}_a$ από την απορρόφηση ή εκπομπή φωτονίων

ΗΜ πεδίο : γλώσσα ανυσματικών μεγεθών $\vec{E}, \vec{B}$

• στο παρόν κεφάλαιο κάνουμε **ΠΛΗΡΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ** — άτομο κβαντικά, ΗΜ πεδίο κβαντικά

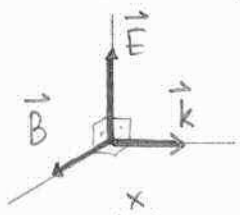
ΗΜ πεδίο: γλώσσα αριθμού φωτονίων

προσπαθούμε να εκφράσουμε το ΗΜ πεδίο στη γλώσσα των φωτονίων

"Το πρώτο βήμα για να επιτευχθεί αυτό είναι να βρεθεί μιά έκφραση της Χαμιλτονιανής του ΗΜ πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού φωτονίων, αντί της γλώσσας που χρησιμοποιεί τα ανυσματικά μεγέθη $\vec{E}, \vec{B}$"

Αυτό θα γίνει στο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ στασίμου ΗΜ κύματος σε κοιλότητα.

πριν από αυτό θυμόμαστε ότι για τρέχοντα κύματα είχαμε

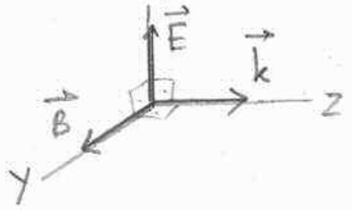


$\vec{E}\times\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{k}$

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)}$$

$$\nabla^2\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta')}$$

ΑΝ



$$\nabla^2\vec{E}_x = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}_x}{\partial t^2} \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{0x}\, e^{i(k_z z-\omega t+\delta)} = \vec{E}_x(z,t)$$

$$\nabla^2\vec{B}_y = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}_y}{\partial t^2} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_{0y}\, e^{i(k_z z-\omega t+\delta')} = \vec{B}_y(z,t)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}} \ \text{ΚΕ1Δ} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}} \ \text{ΚΒ1Δ}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \ (\Delta 1\text{K}) \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}}^{\,0} + \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}}^{\,0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \text{ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \ (\Delta 2\text{K}) \Rightarrow \cancel{\frac{\partial B_x}{\partial x}}^{\,0} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial z}}^{\,0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \quad \text{ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \ (\Delta 3\text{K}) \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{j}\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow +\hat{j}\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\hat{j}\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}} \ \text{ΕΣΕ}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \ (\Delta 4\text{K}) \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{i} \Rightarrow \hat{i}\left(-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = \hat{i}\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}} \ \text{ΕΣΒ} \qquad (4.4)$$

ΤΩΡΑ ΒΑΖΟΥΜΕ ΚΑΤΟΠΤΡΑ

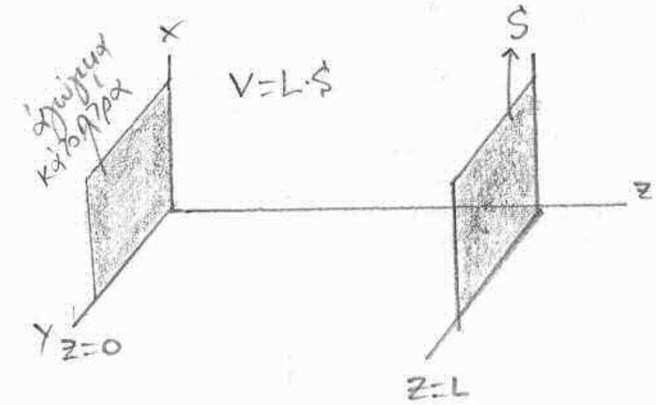
όπότε το προσπίπτον σε κάθε κάτοπτρο κύμα θα συμβάλει με το ανακλώμενο

$\Downarrow$ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

Οι εξισώσεις $\boxed{\text{ΚΕ1Δ}}$ $\boxed{\text{ΚΒ1Δ}}$ κ ΕΣΕ, ΕΣΒ εξακολουθούν να ισχύουν για το γραμμικό συνδυασμό των προσπιπτόντων και ανακλωμένων κυμάτων

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \boxed{\text{ΚΕ1Δ}} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z}=-\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \boxed{\text{ΕΣΕ}}$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \quad \boxed{\text{ΚΒ1Δ}} \qquad \frac{\partial B_y}{\partial z}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \boxed{\text{ΕΣΒ}}$$



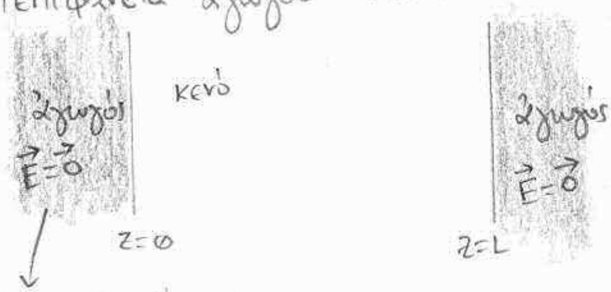
Αναζητούμε λύση με μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών

$$E_x(z,t)=Z(z)\cdot T(t)\cdot \mathcal{N} \quad (\text{ΧΜ})$$

συνοριακές συνθήκες

$$E_x(0,t)=0=E_x(L,t)\ ,\quad \forall t$$

η εφαπτομενική συνιστώσα συνεχής στη διεπιφάνεια αγωγού – κενού



αλλιώς θα είχαμε φορτία σε κίνηση

$\boxed{\text{ΚΕ1Δ}}$ (ΧΜ) $\cancel{\mathcal{N}}T(t)\dfrac{d^2Z}{dz^2}=\dfrac{1}{c^2}Z(z)\dfrac{d^2T}{dt^2}\cancel{\mathcal{N}}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{f(z)}=\underbrace{\frac{1}{T(t)}\frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2}}_{g(t)} \xrightarrow{\text{ΑΡΑ}} \text{σταθερά} \equiv -k^2$$

$\forall z, \forall t$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2 Z(z)=0} \ (\text{Z}) \qquad \boxed{\frac{d^2T}{dt^2}+k^2c^2T(t)=0} \ (\text{T})$$

$$\boxed{\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z = 0} \quad (Z)$$

(γ')

χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -k^2 \Rightarrow \lambda = \pm ik \quad , k \in \mathbb{R}_+$

Άρα, δοκιμάζω λύση της μορφής $\left(A e^{\lambda_1 z} + B e^{\lambda_2 z}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} Z(z) = A e^{ikz} + B e^{-ikz} \quad \text{ZΛΜ} \\ \text{συνοριακές συνθήκες} \quad Z(0) = 0 \quad \text{ΣΣ1} \end{array}\right\} \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} Z(L) = 0 \quad \text{ΣΣ2} \\ Z(z) = A e^{ikz} - A e^{-ikz} = 2iA \sin(kz) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = m\pi \\ \text{για μη μηδενική λύση } k \in \mathbb{R}^*_+ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{m\pi}{L}, \quad m \in \mathbb{N}^*} \quad (k)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Άρα } Z_m(z) = 2iA \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \\ \text{Απαιτώ } Z_m \text{ ορθοκανικές} \quad \int_0^L dz\, Z_m^*(z) Z_\ell(z) = \delta_{m\ell} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^L dz\, |2iA|^2 \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi z}{L}\right) = \delta_{m\ell} \Rightarrow \int_0^\pi \frac{L}{\pi} d\psi\, |2iA|^2 \sin(m\psi) \sin(\ell\psi) = \delta_{m\ell}$$

$$\psi = \frac{\pi z}{L} \quad d\psi = \frac{\pi}{L} dz \qquad \Rightarrow \frac{L}{\pi} \cdot 4|A|^2 \int_0^\pi d\psi \sin(m\psi) \sin(\ell\psi) = \delta_{m\ell}$$

$$\text{Αλλά } \int_0^\pi d\psi \sin(m\psi)\sin(\ell\psi) = \frac{\pi}{2}\delta_{m\ell} \qquad \int_0^\pi d\psi \cos(m\psi)\cdot\cos(\ell\psi) = \frac{\pi}{2}\delta_{m\ell}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{\pi} 4|A|^2 \frac{\pi}{2} \delta_{m\ell} = \delta_{m\ell} \Rightarrow |A|^2 = \frac{1}{2L} \quad \text{π.χ.} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2L}}(-i)$$

Οπότε $\boxed{Z_m(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)}$ (ZΛ)

$$\boxed{\frac{d^2T}{dt^2} + k^2c^2 T = 0} \quad (T)$$

$$\omega^2 = k^2c^2 \quad \omega = kc \overset{(k)}{\Longrightarrow} \boxed{\omega_m = \frac{m\pi c}{L}, \; m \in \mathbb{N}^*} \quad (\omega)$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 + \omega_m^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega_m$, $\omega_m \in \mathbb{R}+$

Άρα, δοκιμάζω λύση τη μορφής $\left(\Gamma e^{\lambda_1 t} + \Delta e^{\lambda_2 t}\right)$

$$\left.\begin{array}{ll} T(t) = \Gamma e^{i\omega_m t} + \Delta e^{-i\omega_m t} & \text{ΤΛΜ} \\ \text{αρχική συνθήκη π.χ. } T(0) = 0 & \text{ΑΣ1} \end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma + \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = -\Gamma \Rightarrow$$

$$T(t) = \Gamma e^{i\omega_m t} - \Gamma e^{-i\omega_m t} = 2i\Gamma \sin(\omega_m t) \Rightarrow T_m(t) = 2i\Gamma \sin\left(\frac{m\pi c}{L} t\right)$$

Απαιτώ T_m ορθοκανονικές $\int_0^{\text{κάτι}} dt\, T_m(t)^* T_\ell(t) = \delta_{m\ell}$

$$\Rightarrow \int_0^{\text{κάτι}} dt\, |2i\Gamma|^2 \sin\left(\frac{m\pi c t}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell\pi c t}{L}\right) = \delta_{m\ell} \Rightarrow 4|\Gamma|^2 \int_0^{\text{κάτι}} dt\, \sin\left(\frac{m\pi c t}{L}\right) \sin\left(\frac{\ell \pi c t}{L}\right) = \delta_{m\ell}$$

$$x = \frac{\pi c t}{L} \quad dx = \frac{\pi c}{L} dt$$

$$\Rightarrow 4|\Gamma|^2 \frac{L}{\pi c} \int_0^{\frac{\pi c}{L}\text{κάτι}} dx\, \sin(mx)\sin(\ell x) = \delta_{m\ell}$$

Άρα βολικό είναι να θέσω $\frac{\pi c}{L}$ κάτι $= \pi \Rightarrow$ κάτι $= \frac{L}{c}$ = time of flight ... through cavity ἄρα λογικό

$$\Rightarrow 4|\Gamma|^2 \frac{L}{\pi c} \cdot \int_0^{\pi} dx\, \sin(mx)\sin(\ell x) = \delta_{m\ell} \Rightarrow$$

$$4|\Gamma|^2 \frac{L}{\cancel{\pi} c} \frac{\cancel{\pi}}{2} \cancel{\delta_{m\ell}} = \cancel{\delta_{m\ell}} \Rightarrow \frac{2|\Gamma|^2 L}{c} = 1 \Rightarrow |\Gamma|^2 = \frac{c}{2L} \Rightarrow |\Gamma| = \sqrt{\frac{c}{2L}}$$

$$\Rightarrow \text{π.χ. } \Gamma = \sqrt{\frac{c}{2L}}\,(-i)$$

Οπότε $\boxed{T_m(t) = \sqrt{\frac{2c}{L}} \cdot \sin\left(\frac{m\pi c}{L} t\right)}$ (ΤΛ)

ΑΡΑ

$$\boxed{E_x(z,t) = \frac{2\sqrt{c}}{L} \mathcal{N} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)} \quad (\Lambda)$$

πρέπει $\left[\frac{2\sqrt{c}}{L}\mathcal{N}\right] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C}$

$$[\mathcal{N}] = \frac{V}{m}\sqrt{m \cdot s}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \boxed{E\Sigma B} \quad \xrightarrow{\Lambda} \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{2\sqrt{c}}{L}\mathcal{N}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\frac{m\pi c}{L}\cos\left(\frac{m\pi c t}{L}\right) \Rightarrow$$

(ε)

$$\int_0^{z'} dz\,\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{2m\pi}{\sqrt{c}\,L^2}\mathcal{N}\cdot\cos\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)\int_0^{z'} dz\,\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \Rightarrow$$

$$B_y(z',t) - B_y(0,t) = -\frac{2m\pi}{\sqrt{c}\,L^2}\mathcal{N}\cos\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)\frac{L}{m\pi}\left[-\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right]_0^{z'}$$

$$= \frac{2\mathcal{N}}{\sqrt{c}\,L}\cdot\cos\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)\left\{\cos\left(\frac{m\pi z'}{L}\right) - \underbrace{\cos 0}_{1}\right\}$$

$$\boxed{B_y(z,t) = \frac{2\mathcal{N}}{\sqrt{c}\,L}\cos\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)\cdot\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)} \quad (\Lambda')$$

$B = \mu_0 H$

$F = BI\ell$

πυκνότητα ενέργειας $\quad U = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{E^2 + c^2B^2\right\}$ (U) $\quad [U] = \frac{J}{m^3}$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

π.χ. $\left[\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\right] = \frac{F}{m}\frac{V^2}{m^2} = \frac{CV}{m^3}$

$$\left[\frac{B^2}{2\mu_0}\right] = \frac{T^2A}{T\,m} = \frac{TA}{m} = \frac{N}{m^2} = \frac{Nm}{m^3}$$

ΑΡΑ (Λ)(Λ')(U) $\Rightarrow$

$$U_m = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\frac{4c\mathcal{N}^2}{L^2}\sin^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\cdot\sin^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right) + \frac{c^2 4\mathcal{N}^2}{cL^2}\cos^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\cos^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$U_m = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{4c\mathcal{N}^2}{L^2}\left\{\sin^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\cdot\sin^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\cos^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)\right\}$$

ΕΝΕΡΓΕΙΑ m-τρόπου $\quad E_m = \int d^3r\, U_m = \int_0^L S\,dz\,\frac{2\varepsilon_0 c\mathcal{N}^2}{L^2}\left\{\sin^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\sin^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)\right\}$

@ κοιλότητα

$$\Rightarrow E_m = \frac{2\varepsilon_0 c\mathcal{N}^2 S}{L^2}\left\{\sin^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)\int_0^L dz\cdot\sin^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)\cdot\int_0^L dz\,\cos^2\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\right\}$$

$$\psi = \frac{\pi z}{L} \quad d\psi = \frac{\pi}{L}dz$$

$$\frac{L}{\pi}\int_0^{\pi} d\psi\cdot\sin^2(m\psi) = \frac{L}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{L}{2} \qquad \frac{L}{\pi}\int_0^{\pi} d\psi\cdot\cos^2(m\psi) = \frac{L}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_m = \frac{\varepsilon_0 c\mathcal{N}^2 S}{L}\left\{\sin^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)\right\} = \frac{\varepsilon_0 c\mathcal{N}^2 S}{L}}$$

κλασικά

$$[E_m] = \left[\frac{\varepsilon_0 c\mathcal{N}^2 S}{L}\right] \Rightarrow CV = \frac{C\,m\,[\mathcal{N}^2]\,m^2}{m\,s\,m\,V} \Rightarrow [\mathcal{N}^2] = \left(\frac{V}{m}\right)^2 ms \Rightarrow [\mathcal{N}] = \frac{V}{m}\cdot\sqrt{ms}$$

Ας δούμε λίγο αλλιώτικα την E_m

$$E_m = \frac{\varepsilon_0 c N^2 S'}{L}\left\{\sin^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right) + \cos^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)\right\}$$

Ας ονομάσουμε $\boxed{q_m(t) = \sin\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)}$ Q $\Rightarrow$ $\boxed{\dot{q}_m(t) = \frac{m\pi c}{L}\cos\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)}$ $\dot{Q}$

γενικευμένη "θέση" γενικευμένη "ταχύτητα"

$$\frac{\varepsilon_0 c N^2 S'}{L}\cdot\cos^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right) = \frac{\varepsilon_0 c N^2 S'}{L}\left(\frac{L}{m\pi c}\right)^2 \dot{q}_m^2 \ \underline{\underline{\text{θέτουμε}}}\ \frac{M_m}{2}\dot{q}_m^2$$

$$\Rightarrow M_m = \frac{2\varepsilon_0 c N^2 S'}{L}\frac{L^2}{m^2\pi^2 c^2} \Rightarrow \boxed{M_m = \frac{2\varepsilon_0 N^2 V}{c\ m^2\pi^2}}\ \boxed{M} \text{ "μάζα"}$$

Τότε

$$\frac{M_m \omega_m^2}{2} q_m^2 = \frac{\varepsilon_0 N^2 V}{c\, m^2\pi^2}\frac{m^2\pi^2 c^2}{L^2} q_m^2 = \frac{\varepsilon_0 c N^2 S'}{L}\cdot\sin^2\left(\frac{m\pi c t}{L}\right)$$

Άρα υπάρχει μια τυπική ομοιότης

$$E_m = \frac{M_m\omega_m^2}{2}q_m^2 + \frac{M_m}{2}\dot{q}_m^2 \qquad (AAT)_m$$

$\Downarrow$ κβαντικά

↓4.16

$$\boxed{\hat{H}_m \quad \text{με } \omega_m = \frac{m\pi c}{L} \quad \text{και ιδιοτιμές } E_{m,n_m} = \hbar\omega_m\left(n_m + \frac{1}{2}\right)} \quad (4.15)$$

Ενώ για όλους τους τρόπους ταλαντώσεως $\hat{H} = \sum_m \hat{H}_m$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

$$\Lambda\ Q \Rightarrow E_x^m(z,t) = \frac{2\sqrt{c}}{L} N\cdot\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\cdot q_m(t) \qquad \Lambda Q$$

$$\Lambda'\ \dot{Q} \Rightarrow B_y^m(z,t) = \frac{2N}{\sqrt{c}}\frac{1}{m\pi c}\cdot\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\cdot\dot{q}_m(t) \qquad \Lambda'\dot{Q}$$

$$\left[\frac{E_x}{B_y}\right] = [c]$$

$$\Lambda Q\ \boxed{M}\ \omega \Rightarrow \boxed{E_x^m(z,t) = \left(\frac{2M_m\omega_m^2}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\cdot q_m(t)} \qquad \Lambda Q$$

$$\Lambda'\dot{Q}\ \boxed{M}\ \omega \Rightarrow \boxed{B_y^m(z,t) = \frac{1}{c}\left(\frac{2M_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2}\cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right)\dot{q}_m(t)} \qquad \Lambda'\dot{Q}$$

Είναι τώρα εύκολο να κβαντωθεί η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το πεδίο, αρκεί να εφαρμοστεί η αντιστοιχία τελεστών

$$\begin{cases} \hat{q}_m = q_m \\ \hat{p}_m = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial q_m} \\ \hat{H}_m = i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t} \end{cases} \qquad 4.17$$

Εισάγουμε τους τελεστές

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}\left(M_m\omega_m\hat{q}_m + i\hat{p}_m\right) \quad \text{"καταστροφής"}$$

$$\hat{a}_m^+ = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}\left(M_m\omega_m\hat{q}_m - i\hat{p}_m\right) \quad \text{"δημιουργίας"} \qquad 4.18$$

$$\left[\hat{a}_m, \hat{a}_m^+\right] = \hat{a}_m\hat{a}_m^+ - \hat{a}_m^+\hat{a}_m = 1 \qquad \left[\hat{q}_m, \hat{p}_m\right] = i\hbar \qquad 4.19$$

μεταθέτες

$$\hat{q}_m = \left(\frac{\hbar}{2M_m\omega_m}\right)^{1/2} \cdot \left(\hat{a}_m^+ + \hat{a}_m\right)$$

$$\hat{p}_m = i\left(\frac{M_m\hbar\omega_m}{2}\right)^{1/2} \cdot \left(\hat{a}_m^+ - \hat{a}_m\right) \qquad 4.20 \quad Φ$$

$$\Longrightarrow \hat{H}_m = \hbar\omega_m\left(\hat{a}_m^+\hat{a}_m + \frac{1}{2}\right) \qquad 4.21$$

Οι τελεστές $\hat{a}_m^+$, $\hat{a}_m$ έχουν τις ιδιότητες

ΣΕ ΟΛΑ n_m

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad 4.22$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^+\right)^n|0\rangle \qquad \hat{a}|0\rangle = 0 \qquad \hat{a}^+\hat{a}\,|n\rangle = n\,|n\rangle$$

$$\hat{H}_m\,|n_m\rangle = \hbar\omega_m\left(n_m + \frac{1}{2}\right)|n_m\rangle \qquad (4.23)$$

Το $|n_m\rangle$ παριστά την κατάσταση του ΗΜ πεδίου με n_m αριθμό φωτονίων.
Την ονομάζουμε κατάσταση φωτονικών αριθμών. Τα $|n_m\rangle$ αποτελούν ένα πλήρες σύστημα βάσεως,

$$\langle n_m|l_m\rangle = \delta_{nl}.$$

ΛQ $\boxed{M}$ $\Rightarrow E_x(z,t) = \frac{2\sqrt{c}}{L} \mathcal{N} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \left(\frac{\hbar}{2M_m\omega_m}\right)^{1/2} \cdot \left(\hat{a}_m^+ + \hat{a}_m\right) \Rightarrow$ (η')

(φ)

$$E_x(z,t) = \left(\frac{4c\mathcal{N}^2 \hbar\, c\, m^2\pi^2 L}{L^2\, 2 \cdot 2\varepsilon_0 \mathcal{N}^2 V\, m\pi c}\right)^{1/2} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \left(\hat{a}_m^+ + \hat{a}_m\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{E_x(z,t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \cdot \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot \left(\hat{a}_m^+ + \hat{a}_m\right)}$$ $\Lambda\alpha'\alpha$ 4.24

$\Lambda\dot{Q}$ $\boxed{M}$ $\Rightarrow B_y(z,t) = \frac{2\mathcal{N}}{\sqrt{c}} \frac{1}{m\pi c} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) i \left(\frac{\hbar\omega_m}{2M_m}\right)^{1/2} \left(\hat{a}_m^+ - \hat{a}_m\right) \Rightarrow$

(φ)

$$B_y(z,t) = \left(\frac{4\mathcal{N}^2 \hbar\, m\pi c\, c\, m^2\pi^2}{c\, m^2\pi^2 c^2\, 2L\, 2\varepsilon_0 \mathcal{N}^2 V}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot i \left(\hat{a}_m^+ - \hat{a}_m\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{B_y(z,t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \frac{1}{c} \cdot \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cdot i \cdot \left(\hat{a}_m^+ - \hat{a}_m\right)}$$ $\Lambda\alpha'\alpha$

ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΠΕΔΙΩΝ

Lagrange functional (α΄)

Ⓐ Ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο	Ⓑ πεδίο Μετατοπίσεως	Ⓖ πεδίο Schrödinger $\psi(\vec{r},t)$
φωτόνια	φωνόνια	ἠλεκτρόνια
BE στατιστική	BE στατιστική	FD στατιστική
μεταθέτες	μεταθέτες	ἀντιμεταθέτες

πεδίο $\phi_j(\vec{r},t) \longleftrightarrow q_j$ γενικευμένη θέση

συναρτησοειδής Lagrangian $L[\phi_j] = \int d^3r\, \mathcal{L}\left(\phi_j, \frac{\partial \phi_j}{\partial t}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}, \vec{r}, t\right) \longleftrightarrow$ Lagrangian $L(q_j, \dot{q}_j, t)$

ἱκανοποιεῖ τὶς ἐξ. Maxwell $\phi_{j=1,2,3}(\vec{r},t) = A_{j=1,2,3}(\vec{r},t)$ διανυσματικό δυναμικό $\phi_4(\vec{r},t) = \phi(\vec{r},t)$ βαθμωτό δυναμικό	$\phi_j(\vec{r},t) = \xi_j(\vec{r},t)$ ἡ μετατόπιση ἀπὸ τὴ θέση ἰσορροπίας $j=1,2,3$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἐξ. κύματος $\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \xi_i = 0$	$\phi_j(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t)$ (μονοσωματιδιακή) $j=1$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἐξ. Schrödinger $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_{sch}\psi$ $\hat{H}_{sch} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$

Ἐφαρμόζοντας τὴν "ἀρχὴ τοῦ Hamilton" $\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0$ καταλήγουμε στὶς ἐξισώσεις Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \frac{\partial \phi_j}{\partial t}} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_j} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}} = 0$$

πεδιακή μηχανική

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

σημειακή μηχανική

ἡ Lagrangian πυκνότητα εἶναι

Ⓐ $\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}\left[\left(\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2 - (\mathrm{curl}\vec{A})^2\right]$

Ⓑ $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\left[\sum_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial t}\right)^2 - \sum_{ij} c^2 \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)^2\right]$

Ⓖ $\mathcal{L} = \psi^*\left(i\hbar\dot{\psi} - \hat{H}_{sch}\psi\right)$

(β')

canonical momentum and Hamilton function

$$\Pi_j := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial t}\right)}$$

πυκνότητα Hamiltonian $h = \sum_j \Pi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial t} - \mathcal{L} = h(\phi_j, \Pi_j, t)$

γενικευμένη ορμή $p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

Hamiltonian $H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = H(q_j, p_j, t)$

(A) $\Pi_j = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\frac{\partial A_j}{\partial t}\right)} = \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_j}{\partial t}\right)$, $j=1,2,3$

$\Pi_4 = 0$ διότι ἡ $\mathcal{L}$ εἶναι ἀνεξάρτητη του $\frac{\partial \phi}{\partial t}$

ἤ $h = 2\pi c^2 \vec{\Pi}^2 + \frac{1}{8\pi}(\text{curl}\vec{A})^2$

(B) $\Pi_j = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial t}\right)} = \rho \frac{\partial \xi_j}{\partial t}$, $j=1,2,3$

$$h = \frac{\Pi^2}{2\rho} + \frac{\rho c^2}{2}\sum_{jk}\left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}\right)^2$$

(Γ) $\Pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}} = \frac{\delta\, \psi^*(i\hbar\dot{\psi} - \hat{H}_{sch}\psi)}{\delta \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*$

$h = \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \psi^*(i\hbar\dot{\psi} - \hat{H}_{sch}\psi)$

$\Rightarrow \boxed{h = \psi^* \hat{H}_{sch}\psi \ \text{ἤ} \ \frac{\Pi}{i\hbar}\hat{H}_{sch}\psi}$

$$\left\{\begin{matrix} \phi_j \to \hat{\phi}_j \\ \Pi_j \to \hat{\Pi}_j \\ H \to \hat{H} \end{matrix}\right\}$$

καί <u>ἀπαιτοῦμε</u> τις ἀκόλουθες σχέσεις μεταθέσεως

$$\left[\hat{\phi}_\ell(\vec{r},t), \hat{\Pi}_j(\vec{r}',t)\right]_\pm = i\hbar\,\delta_{\ell j}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad (1)$$

$$\left[\hat{\phi}_\ell(\vec{r},t), \hat{\phi}_j(\vec{r}',t)\right]_\pm = 0 \quad (2)$$

$$\left[\hat{\Pi}_\ell(\vec{r},t), \hat{\Pi}_j(\vec{r}',t)\right]_\pm = 0 \quad (3)$$

φωτόνια

(A) Τελικά... $\hat{H} = \sum \hbar\omega_k\left(\hat{b}^+_{\lambda\vec{k}}\hat{b}_{\lambda\vec{k}} + \frac{1}{2}\right)$ πόλωση

ὅπου $\left[\hat{b}_{\lambda\vec{k}}, \hat{b}^+_{\lambda'\vec{k}'}\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

$\left[b_{\lambda\vec{k}}, b_{\lambda'\vec{k}'}\right] = 0 = \left[\hat{b}^+_{\lambda\vec{k}}, \hat{b}^+_{\lambda'\vec{k}'}\right]$

φωνόνια

(B) Τελικά... $\hat{H} = \sum \hbar\omega_k\left(\hat{b}^+_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right)$

ὅπου $\left[\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}^+_{\vec{k}'}\right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$

(Γ)

quantization of the fields

$[A,B] \equiv [A,B]_-$

$[A,B]_\pm := AB \pm BA$

$-$ commutator μεταθέτης BOSONS

$+$ anticommutator ἀντιμεταθέτης FERMIONS

$(\psi, \hat{A}\phi) \overset{\text{ορ}}{=} (\hat{A}^+\psi, \phi)$

ἄν $\hat{A} = \alpha \in \mathbb{C}$ τό παραπάνω γράφεται

$(\psi, \alpha\phi) = (\alpha^+\psi, \phi)$

ὅμως $(\psi, \alpha\phi) = (\alpha^*\psi, \phi)$

$\Rightarrow$ δηλαδή για τους μιγαδικούς ἀριθμούς

(θεωρούμενους σάν υποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν γραμμικῶν τελεστῶν) ἡ ἔννοια τοῦ <u>συζυγούς τελεστή</u> ταυτίζεται μέ τήν ἔννοια τοῦ <u>συζυγούς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ</u>.

$+ = *$

ηλεκτρόνια

(Γ)

$$\phi_j(\vec{r},t) = \underset{\text{πεδίο}}{\psi(\vec{r},t)} \longrightarrow \hat{\phi}_j(\vec{r},t) = \underset{\text{πεδιακός τελεστής}}{\hat{\psi}(\vec{r},t)}$$

$$\Pi_j(\vec{r},t) = i\hbar\psi^*(\vec{r},t) \longrightarrow \hat{\Pi}_j(\vec{r},t) = i\hbar\,\hat{\psi}^+(\vec{r},t)$$

και οι σχέσεις μετάθεσης (1), (2), (3) γίνονται:

(1) $\left[\hat{\psi}(\vec{r},t),\, i\hbar\,\hat{\psi}^+(\vec{r}',t)\right]_+ = i\hbar\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') \Rightarrow \left[\hat{\psi}(\vec{r},t),\, \hat{\psi}^+(\vec{r}',t)\right]_+ = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$ $(1)^F$

(2) $\left[\hat{\psi}(\vec{r},t),\, \hat{\psi}(\vec{r}',t)\right]_+ = 0$ $(2)^F$

(3) $\left[i\hbar\,\hat{\psi}^+(\vec{r},t),\, i\hbar\,\hat{\psi}^+(\vec{r}',t)\right]_+ = 0 \Rightarrow \left[\hat{\psi}^+(\vec{r},t),\, \hat{\psi}^+(\vec{r}',t)\right]_+ = 0$ $(3)^F$

η πυκνότητα Hamiltonian είναι $\hat{h} = \hat{\psi}^+(\vec{r},t)\,\hat{\mathcal{H}}_{sch}\,\hat{\psi}(\vec{r},t)$

η Hamiltonian

$$\boxed{\hat{\mathcal{H}} = \int d^3\vec{r}\; \hat{\psi}^+(\vec{r},t)\, \hat{\mathcal{H}}_{sch}\, \hat{\psi}(\vec{r},t)} \quad \boxed{A}$$

non-interacting electron system.

$$\boxed{\hat{\mathcal{H}} = \int d^3\vec{r}\; \hat{\psi}^+(\vec{r},t)\, \hat{\mathcal{H}}_{sch}\, \hat{\psi}(\vec{r},t) + \frac{1}{2}\int d^3\vec{r}\int d^3\vec{r}'\; \hat{\psi}^+(\vec{r},t)\,\hat{\psi}^+(\vec{r}',t)\,V(\vec{r},\vec{r}')\,\hat{\psi}(\vec{r}',t)\,\hat{\psi}(\vec{r},t)} \quad \boxed{B}$$

interacting (Fock) electron system

η ολοκληρωτέα ποσότης στο δεύτερο όρο (όρος αλληλεπίδρασης) γράφεται, συμφώνως προς τις σχέσεις μεταθέσεως $(1)^F$–$(3)^F$ και ως:

$$(+)\; \underline{\hat{\psi}^+(\vec{r},t)\,\hat{\psi}(\vec{r},t)}\; V(\vec{r},\vec{r}')\,\hat{\psi}^+(\vec{r}',t)\,\hat{\psi}(\vec{r}',t)$$

$$= \underline{\hat{\rho}(\vec{r},t)}\; V(\vec{r},\vec{r}')\; \hat{\rho}(\vec{r}',t)$$

Αναπτύσσουμε τους πεδιακούς τελεστές στις ιδιοσυναρτήσεις ϕ_n ($\hat{\mathcal{H}}_{sch}\phi_n = E_n\phi_n$) της μονοσωματιδιακής εξ. Schrödinger.

Έτσι:

$$\boxed{\hat{\psi}(\vec{r},t) = \sum_n \hat{a}_n(t)\,\phi_n(\vec{r})} \quad \boxed{Γ}$$

Αυτές οι ϕ_n αρκεί να αποτελούν πλήρη βάση (π.χ. Bloch ή Wannier συναρτήσεις). Είναι βολικό να επιλέξουμε την κατάλληλη βάση.

Ισχύει: $\left[\hat{a}_n,\, \hat{a}_m^+\right]_+ = \delta_{nm}$

$\boxed{\text{Απλοποίηση συμβολισμού } \hat{a}_n(t) := \hat{a}_n}$

Με τη βοήθεια της $\boxed{Γ}$, η $\boxed{A}$ γράφεται:

$$\boxed{\hat{\mathcal{H}} = \sum_n E_n\,\hat{a}_n^+\,\hat{a}_n} \quad \boxed{Δ}$$

Με τη βοήθεια της $\boxed{Γ}$, η $\boxed{B}$ γράφεται:

$$\boxed{\hat{\mathcal{H}} = \sum_n E_n\,\hat{a}_n^+ a_n + \frac{1}{2}\sum_{n,m,l,k} \hat{a}_n^+\,\hat{a}_m^+\,\hat{a}_l\,\hat{a}_k\,V_{nmlk}} \quad \boxed{E}$$

$$V_{nmlk} = \int d^3\vec{r}\int d^3\vec{r}'\; \phi_n^*(\vec{r})\,\phi_m^*(\vec{r}')\,V(\vec{r},\vec{r}')\,\phi_l(\vec{r}')\,\phi_k(\vec{r})$$

ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟ ΑΤΟΜΟ με ΣΠΙΝΟΡΕΣ

Spinors

άπιγια π.χ. Gasiorowitz (§4.2)

ορισμοί $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{συν}}{\hat S_+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\text{πλην}}{\hat S_-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hat S_+|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ το πετά έξω

$\hat S_+|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$ το ανεβάζει

$\hat S_-|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$ το κατεβάζει

$\hat S_-|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ το πετά έξω

$\hat S_+ + \hat S_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{I}}_{\text{αντι}}$ αντιδιαγώνιος μοναδιαίος

$$\left.\begin{aligned} \hat S_+\hat S_- &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat S_-\hat S_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$\hat S_+\hat S_- + \hat S_-\hat S_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{I}}$ διαγώνιος μοναδιαίος

$\boxed{\hat S_+\hat S_- + \hat S_-\hat S_+ = \mathbb{I}}$ ή $\{\hat S_+, \hat S_-\} = \mathbb{I}$ αγκύλη Poisson *

$$E_2\hat S_+\hat S_- + E_1\hat S_-\hat S_+ = E_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \overset{\cdots}{=\!=} \hat H_{atom}$$

...διότι $\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = E_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \end{pmatrix} = E_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ΑΡΑ $\boxed{\hat H_{atom} = E_2\hat S_+\hat S_- + E_1\hat S_-\hat S_+}$

Αν τώρα θέσουμε $E_1 = 0 \Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$,

τότε $\boxed{\hat H_{atom} = \hbar\Omega\hat S_+\hat S_-}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

στιλέτο (dagger)

$$\hat S_+^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat S_-$$

*αντιμεταθέτης anticommutator $\{A,B\}$ ή $[A,B]_+$

ενώ $[A,B]$ ή $[A,B]_-$ μεταθέτης commutator

Pauli Matrices

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\sigma_z$ και κυκλικά

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{I}}$$

$$\left.\begin{aligned} \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\} &= \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y\sigma_x = 0 \\ \{\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\} &= \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = 0 \\ \{\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x\} &= \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = 0 \end{aligned}\right\}$$ Pauli matrices anticommute

$$(\hat{S}_+ + \hat{S}_-) = \hat{\sigma}_x$$
$$(\hat{S}_+ - \hat{S}_-) = i\hat{\sigma}_z$$

Maxwell equations in terms of total charge and current

differential form   integral form

Θ. Gauss

$$\oint_{S=\partial V} \vec{\Delta}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\Delta}\, dV$$

Θ. Stokes

$$\oint_{\ell=\partial S} \vec{\Delta}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{\Delta}\cdot d\vec{a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \frac{q_{\varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi_{E,S=\partial V} = \oint_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q_{\varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\, dV = 0 \Rightarrow \Phi_{B,S=\partial V} = \oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\wedge\vec{E}\cdot d\vec{a} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} \Rightarrow \underset{\text{ΗΕΔ}}{\mathcal{E}} = \oint_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial\Phi_{B,S}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \oint_{\ell=\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{B}\cdot d\vec{a} = \mu_0 I_{\delta\iota\alpha\pi.S} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a}$$

$$\Rightarrow \oint_{\ell=\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\delta\iota\alpha\pi.S} + \mu_0\varepsilon_0 \underbrace{\frac{\partial\Phi_{E,S}}{\partial t}}_{I_{\mu\varepsilon\tau\alpha\tau o\pi\acute{\iota}\sigma\eta\varsigma}}$$

Maxwell equations in terms of free charge and current

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f \qquad \oint_{S=\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a} = q_{f,\varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \mathcal{E} = \oint_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial\Phi_{B,S}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \oint_{\ell=\partial S} \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{f,\delta\iota\alpha\pi.S} + \frac{\partial\Phi_{D,S}}{\partial t}$$

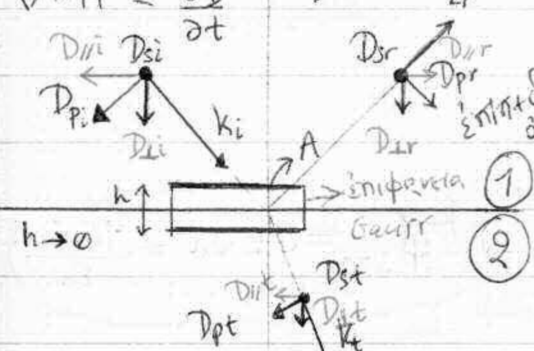
Αν έχω μια διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων και δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία κ ρεύματα

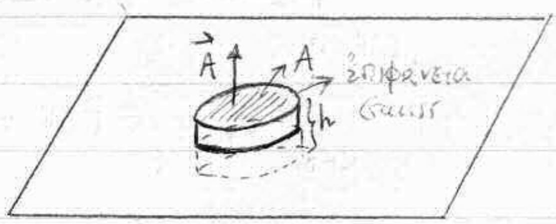
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \qquad \oint_{S=\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{B,S}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \oint_{\ell=\partial S} \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{D,S}$$





θεωρήματα Gauss δηλ. $\oint_{S=\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a} = 0$ κ $\oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$

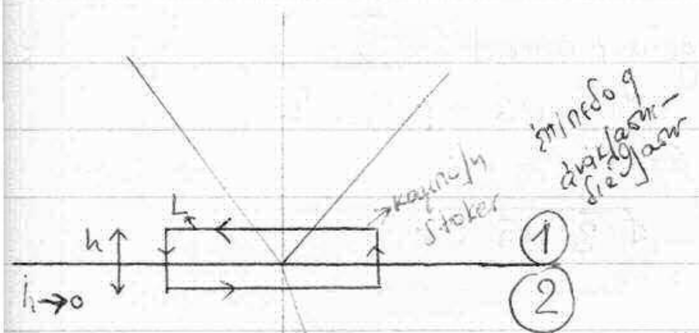
$\vec{D}_\perp$: component of $\vec{D}$ normal to boundary

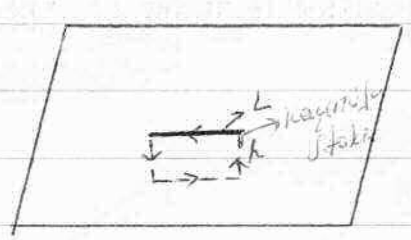
$$\oint_{S=\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow -D_{\perp 1}\cdot A + D_{\perp 2} A = 0 \Rightarrow D_{\perp 1} = D_{\perp 2}$$

Τα πλάγια θεωρούνται αμελητέα διότι $h\to 0$ δηλ $D_\perp$ continuous across boundary

$$\oint_{S=\partial V} \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \ldots \text{ ομοίως } \ldots \Rightarrow B_{\perp 1} = B_{\perp 2}$$

δηλ $B_\perp$ continuous across boundary





θεωρήματα Stokes δηλαδή $\oint_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial\Phi_{B,S}}{\partial t}$ κ $\oint_{\ell=\partial S} \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{D,S}$

$$\oint_{\ell=\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E_{\parallel 1} L - E_{\parallel 2} L \qquad -\frac{\partial\Phi_{B,S}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Lh}{2}B_{s1} + \frac{Lh}{2}B_{s2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

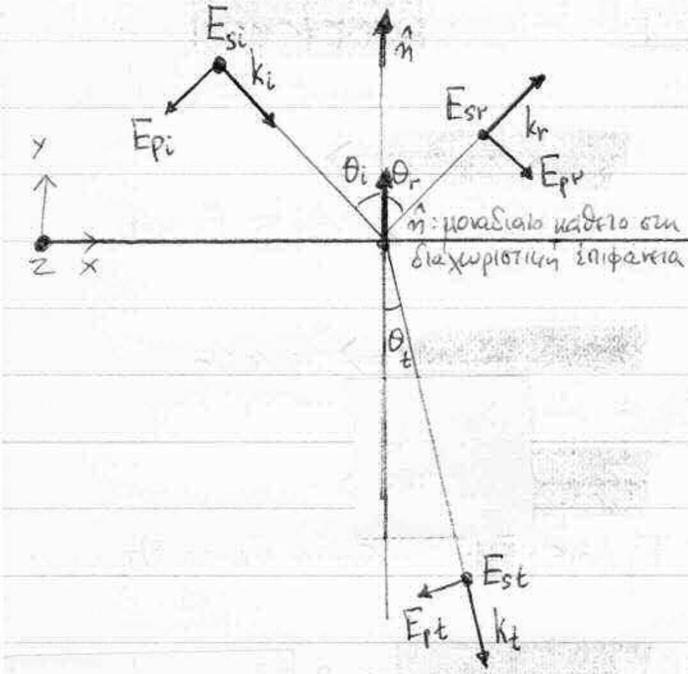
$\vec{E}_\parallel$: component of $\vec{E}$ parallel to the boundary $\Rightarrow E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2}$

δηλ. $E_\parallel$ continuous across boundary

$$\oint_{\ell=\partial S} \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = H_{\parallel 1} L - H_{\parallel 2} L \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{D,S} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Lh}{2}D_{s1} + \frac{Lh}{2}D_{s2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow H_{\parallel 1} = H_{\parallel 2}$$

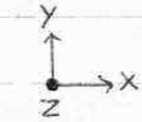
δηλ $H_\parallel$ continuous across boundary πόλωση κατά το E



$\odot \vec{E}$ s πόλωση $(\vec{E} \perp q)$ TE πόλωση

$\swarrow \vec{E}$ p πόλωση $(\vec{E} \in q)$ TM πόλωση

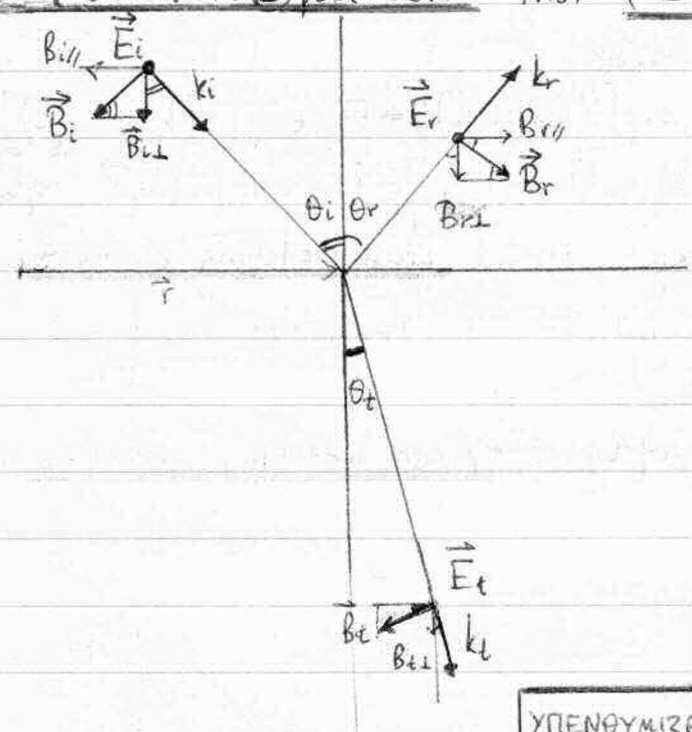
① επίπεδο $\vec{k}_i, \hat{n}$ ή
② επίπεδο πρόσπτωσης ή
επίπεδο q ή
xy επίπεδο



TE polarization

ΥΠΕΝΘΥΜΙΖΕΤΑΙ
$$\boxed{\vec{E} \times \vec{B} \,//\, \vec{k}}$$

TE polarization or (s) polarization first $(\vec{E} \perp q)$.



$D_\perp$ continuous $\Rightarrow$ τίποτε

$B_\perp$ continuous $\Rightarrow$

$$-B_i \sin\theta_i - B_r \sin\theta_r = -B_t \sin\theta_t$$

$E_{//}$ continuous $\Rightarrow$

$$E_r + E_i = E_t$$

$H_{//}$ continuous $\Rightarrow$

$$\frac{B_i \cos\theta_i}{\mu_0\mu_1} - \frac{B_r \cos\theta_r}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_t \cos\theta_t}{\mu_0\mu_2}$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΖΕΤΑΙ
$$\left\{\begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \end{array}\right.$$
εννοείται ότι τα ε, μ είναι σταθερές και όχι τανυστές.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΖΕΤΑΙ

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{E}{B} = c \\ \eta = \dfrac{c_0}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow B = \eta \frac{E}{c_0}$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΖΕΤΑΙ

$$c = \lambda \nu = \frac{2\pi}{k}\nu$$

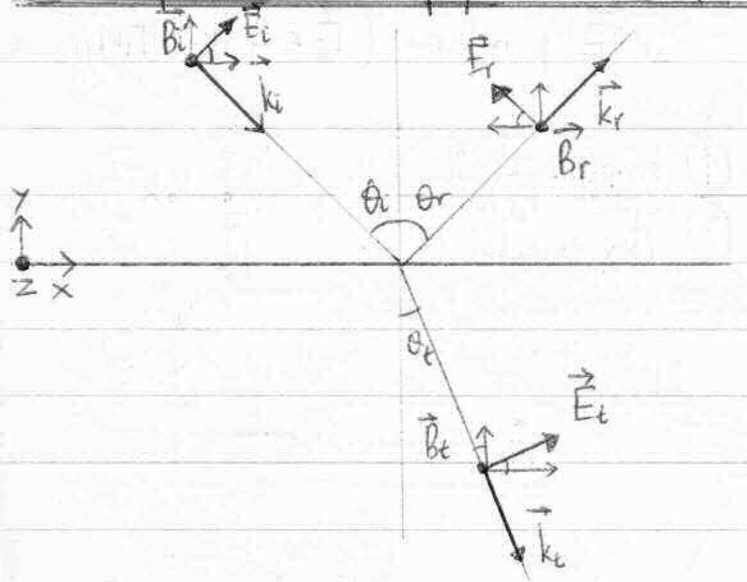
Υπόθεση ν = σταθερό
[Y1] κατά την αλλαγή μέσων
και κατά τη διέλευση από μέσο

$$n_i = \frac{c_0}{c_i} = \frac{2\pi\nu |k_i|}{|k_0| 2\pi\nu} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |\vec{k}_i| = n_i |\vec{k}_0| \\ |\vec{k}_r| = n_r |\vec{k}_0| \\ |\vec{k}_t| = n_t |\vec{k}_0| \\ n_1 = n_i = n_r \\ n_2 = n_t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} |\vec{k}_i| = n_1 |\vec{k}_0| \\ |\vec{k}_r| = n_1 |\vec{k}_0| \\ |\vec{k}_t| = n_2 |\vec{k}_0| \end{array}}$$

• TM polarization or p polarization ($\vec{E} \in q$)

έχει σημασία η επιλογή φοράς



$D_\perp$ continuous $\Rightarrow$

$$E_i \sin\theta_i + E_r \sin\theta_r = E_t \sin\theta_t$$

$B_\perp$ continuous $\Rightarrow$ τίποτα

$E_{\parallel}$ continuous $\Rightarrow$

$$E_i \cos\theta_i - E_r \cos\theta_r = E_t \cos\theta_t$$

$H_{\parallel}$ continuous $\Rightarrow \dfrac{B_i}{\mu_0\mu_1} + \dfrac{B_r}{\mu_0\mu_1} = \dfrac{B_t}{\mu_0\mu_2}$

Αν τα πλάτη είναι σταθερά..

(TE) $E_{\parallel}$ continuous $E_r + E_i = E_t \Rightarrow E_{0r}\exp[i(\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\omega_r t)] + E_{0i}\exp[i(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega_i t)] = E_{0t}\exp[i(\vec{k}_t\cdot\vec{r}-\omega_t t)]$

$\forall t, \forall \vec{r}$ συνδιεπιτάσσονται

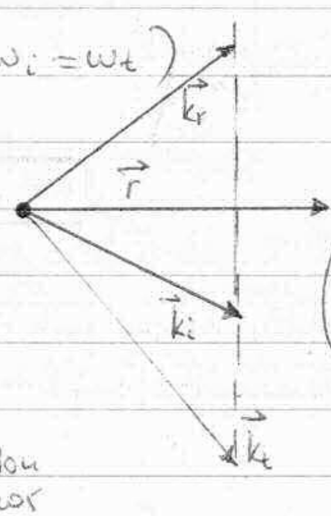
$\Rightarrow \vec{k}_r\cdot\vec{r} - \omega_r t = \vec{k}_i\cdot\vec{r} - \omega_i t = \vec{k}_t\cdot\vec{r} - \omega_t t$ "phase matching condition"

(TM) $H_{\parallel}$ continuous $\dfrac{B_r}{\mu_0\mu_1} + \dfrac{B_i}{\mu_0\mu_1} = \dfrac{B_t}{\mu_0\mu_2} \Rightarrow \ldots$ παρομοίως ... $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{k}_r\cdot\vec{r} - \omega_r t = \vec{k}_i\cdot\vec{r} - \omega_i t = \vec{k}_t\cdot\vec{r} - \omega_t t$ "phase matching condition"

$\boxed{Y1} \Rightarrow \omega_r = \omega_i = \omega_t$ ($\hat{n}\cdot\vec{r} = 0 \Rightarrow \omega_r = \omega_i = \omega_t$)

ΑΡΑ $\boxed{\vec{k}_r\cdot\vec{r} = \vec{k}_i\cdot\vec{r} = \vec{k}_t\cdot\vec{r}}$



$\Downarrow$

$\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t \in q$

ομοεπίπεδα

$\vec{k}_i\cdot\vec{r} = \vec{k}_r\cdot\vec{r} \Rightarrow |\vec{k}_i||\vec{r}|\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_i)$
$= |\vec{k}_r|\cdot|\vec{r}|\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_r) \Rightarrow$

$n_1|\vec{k}_0|\sin\theta_i = n_1|\vec{k}_0|\sin\theta_r \Rightarrow \boxed{\theta_r = \theta_i}$

law of reflection
νόμος ανάκλασης

$\vec{k}_i\cdot\vec{r} = \vec{k}_t\cdot\vec{r} \Rightarrow |\vec{k}_i||\vec{r}|\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_i) = |\vec{k}_t||\vec{r}|\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_t) \Rightarrow n_1|\vec{k}_0|\sin\theta_i = n_2|\vec{k}_0|\sin\theta_t \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{n_1\sin\theta_i = n_2\sin\theta_t}$ law of refraction
νόμος διάθλασης

reflectance (R) κ transmittance (T)

TE

$$E_r + E_i = E_t$$

$$\frac{B_i\cos\theta_i}{\mu_0\mu_1} - \frac{B_r\cos\theta_r}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_t\cos\theta_t}{\mu_0\mu_2}$$

έστω μη μαγνητικά υλικά ($\mu_1=\mu_2=1$)

$$B = n\frac{E}{c_0} \Rightarrow$$

$$E_r + E_i = E_t$$

$$n_1E_i\cos\theta_i - n_1E_r\cos\theta_r = n_2E_t\cos\theta_t \Rightarrow$$

$$n := \frac{n_2}{n_1}$$

$$E_r + E_i = E_t$$

$$E_i\cos\theta_i - E_r\cos\theta_r = nE_t\cos\theta_t \quad \xRightarrow{\theta_i=\theta_r}$$

$$E_i + E_r = E_t$$

$$E_i - E_r = \frac{nE_t\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

$$(+)\quad 2E_i = E_t\left(1+\frac{n\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right)$$

$$\boxed{t_{TE} := \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + n\cos\theta_t} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}}$$

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_i}{n^2}}$$

$n_i\sin\theta_i = n_t\sin\theta_t$ ή $\sin\theta_i = n\sin\theta_t$

$$t_{TE} = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + n\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_i}{n^2}}} \Rightarrow \boxed{t_{TE} = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}}$$

$$(E_t=)\quad E_i + E_r = \frac{(E_i-E_r)\cos\theta_i}{n\cos\theta_t}$$

$$E_r\left(1+\frac{\cos\theta_i}{n\cos\theta_t}\right) = E_i\left(\frac{\cos\theta_i}{n\cos\theta_t}-1\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{r_{TE} := \frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos\theta_i - n\cos\theta_t}{\cos\theta_i + n\cos\theta_t} = \frac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}}$$

ή $$\boxed{r_{TE} = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}}$$

Άρα $\boxed{t_{TE} = r_{TE} + 1}$

TM

$$E_i\cos\theta_i - E_r\cos\theta_r = E_t\cos\theta_t$$

$$\frac{B_i}{\mu_0\mu_1} + \frac{B_r}{\mu_0\mu_1} = \frac{B_t}{\mu_0\mu_2}$$

έστω μη μαγνητικά υλικά ($\mu_1=\mu_2=1$)

$$B = n\frac{E}{c_0} \Rightarrow$$

$$E_i\cos\theta_i - E_r\cos\theta_r = E_t\cos\theta_t$$

$$n_1E_i + n_1E_r = n_2E_t$$

$$n := n_2/n_1 \quad \xRightarrow{\theta_i=\theta_r}$$

$$E_i - E_r = E_t\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

$$E_i + E_r = nE_t \Rightarrow$$

$$(+)\quad 2E_i = E_t\left(n + \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{TM} := \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\cos\theta_i}{n\cos\theta_i + \cos\theta_t} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t}}$$

ή $$t_{TM} = \frac{2\cos\theta_i}{n\cos\theta_i + \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_i}{n^2}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{TM} = \frac{2n\cos\theta_i}{n^2\cos\theta_i + \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}}$$

$$(E_t=)\quad \frac{n\cos\theta_i}{\cos\theta_t}(E_i - E_r) = (E_i + E_r)$$

$$E_i\left(\frac{n\cos\theta_i}{\cos\theta_t} - 1\right) = E_r\left(\frac{n\cos\theta_i}{\cos\theta_t} + 1\right)$$

$$\Rightarrow r_{TM} := \frac{E_r}{E_i} = \frac{n\cos\theta_i - \cos\theta_t}{n\cos\theta_i + \cos\theta_t}$$

ή $$\boxed{r_{TM} = \frac{n_t\cos\theta_i - n_i\cos\theta_t}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t}}$$

ή $$\boxed{r_{TM} = \frac{n^2\cos\theta_i - \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}{n^2\cos\theta_i + \sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}}$$

Άρα $\boxed{r_{TM} - n t_{TM} = -1}$

ή γωνία πολώσεως
ΓΩΝΙΑ Brewster

polarization or Brewster angle

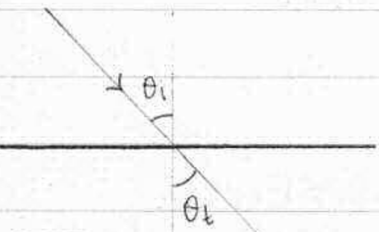
Αν θέλω να μην υπάρχει ανάκλαση TE

$\boxed{r_{TE}=0} \Rightarrow n_i\cos\theta_i = n_t\cos\theta_t$

αλλά $n_i\sin\theta_i = n_t\sin\theta_t$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan\theta_i = \tan\theta_t$
θ_i, θ_t οξείες γωνίες $\Big\} \Rightarrow \boxed{\theta_t=\theta_i \Downarrow n_t=n_i}$

δηλ. δεν υπάρχει αλλαγή μέσου



Τότε $\boxed{t_{TE} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t} = 1}$

Σημείωση: τα $r_{TE}=0$, $t_{TE}=1$
επαληθεύουν την $\boxed{t_{TE}=r_{TE}+1}$

Αν θέλω να μην υπάρχει ανάκλαση TM

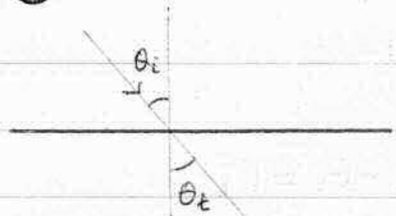
$\boxed{r_{TM}=0} \Rightarrow n_t\cos\theta_i = n_i\cos\theta_t$
$n_t\sin\theta_t = n_i\sin\theta_i$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\cos\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\cos\theta_t}{\sin\theta_i} \Rightarrow 2\sin\theta_i\cos\theta_i = 2\sin\theta_t\cos\theta_t$

$\Rightarrow \sin(2\theta_t) = \sin(2\theta_i) \Rightarrow$

① $2\theta_t = 2\theta_i$ ② $2\theta_t = \pi - 2\theta_i$

① $\boxed{\theta_t=\theta_i \Downarrow n_t=n_i}$

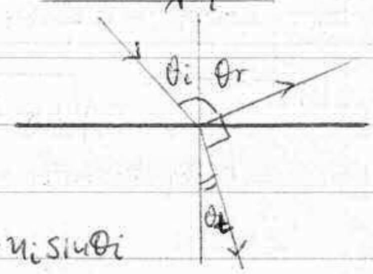


δηλ. δεν υπάρχει αλλαγή μέσου

Τότε $\boxed{t_{TM} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t} = 1}$

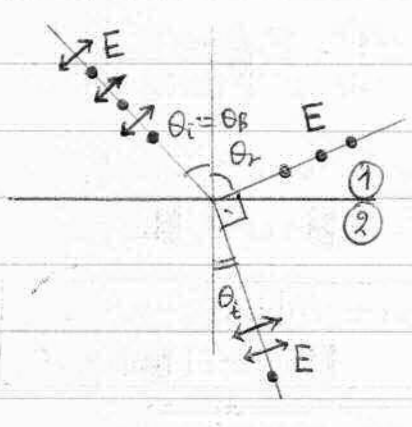
② $\theta_t = \frac{\pi}{2} - \theta_i$ ή $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta_r + \theta_t = \frac{\pi}{2}$
$\Downarrow$

η ανακλωμένη είναι κάθετη στη διαθλωμένη



Σημείωση: τα $r_{TM}=0$, $t_{TM}=\frac{1}{n}$
επαληθεύουν την $\boxed{r_{TM} - n t_{TM} = -1}$
Ομοίως και η επιλογή $r_{TM}=0$, $t_{TM}=1$
την ικανοποιεί γιατί σε εκείνη την περίπτωση
$n = \frac{n_t}{n_i} = 1$.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ



επίσης $n_t\sin\theta_t = n_i\sin\theta_i$

$\Rightarrow n_t\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_i\right) = n_i\sin\theta_i \Rightarrow \frac{n_t}{n_i} = \frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i}$

$\Rightarrow \boxed{n = \frac{n_t}{n_i} = \tan\theta_i}$

γωνία Brewster θ_B

(ή και από $n_t\cos\theta_i = n_i\cos\theta_t \Rightarrow \cdots$)

Τότε $t_{TM} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t} = \frac{2n_i\cos\theta_i}{n_t\cos\theta_i + n_i\sin\theta_i}$

$\Rightarrow t_{TM} = \frac{2}{n+\tan\theta_i} = \frac{2}{2n} \Rightarrow \boxed{t_{TM} = \frac{1}{n}}$

total internal reflection

Ολική εσωτερική ανάκλαση $\boxed{n_i > n_t}$

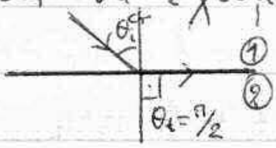
ν. διαθλάσεως $\underline{n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t}$ $\Bigg\}$ $\Rightarrow \sin\theta_i < \sin\theta_t$, $\underline{\text{οξείες γωνίες } \theta_i, \theta_t}$ $\Bigg\}$ $\Rightarrow \theta_i < \theta_t$, $\theta_i \uparrow \Rightarrow \theta_t \uparrow$

$n_i > n_t \Rightarrow n = \frac{n_t}{n_i} < 1$

$\theta_i \uparrow \Rightarrow \sin\theta_i \uparrow \Rightarrow \sin\theta_t \Rightarrow \theta_t$

όταν $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ $\quad \theta_i^{cr} := \theta_i$

και τότε θα έχουμε $n_i \sin\theta_i^{cr} = n_t \cancel{\sin}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\sin\theta_i^{cr} = \frac{n_t}{n_i} = n}$



Τότε

$$t_{TE} = \frac{2 n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} = \frac{2 n_i \cos\theta_i^{cr}}{n_i \cos\theta_i^{cr} + n_t \cos(\pi/2)} = 2$$

$$r_{TE} = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} = \frac{n_i \cos\theta_i^{cr} - n_t \cos(\pi/2)}{n_i \cos\theta_i^{cr} + n_t \cos(\pi/2)} = 1$$

$t_{TE} = r_{TE} + 1$ ισχύει μια και $2 = 1 + 1$

$$t_{TM} = \frac{2 n_i \cos\theta_i}{n_t \cos\theta_i + n_i \cos\theta_t} = \frac{2 n_i \cos\theta_i^{cr}}{n_t \cos\theta_i^{cr} + n_i \cos(\pi/2)} = \frac{2}{n}$$

$$r_{TM} = \frac{n_t \cos\theta_i - n_i \cos\theta_t}{n_t \cos\theta_i + n_i \cos\theta_t} = \frac{n_t \cos\theta_i^{cr} - n_i \cos(\pi/2)}{n_t \cos\theta_i^{cr} + n_i \cos(\pi/2)} = 1$$

$r_{TM} - n\, t_{TM} = -1$ ισχύει μια και $1 - n \cdot \frac{2}{n} = -1$

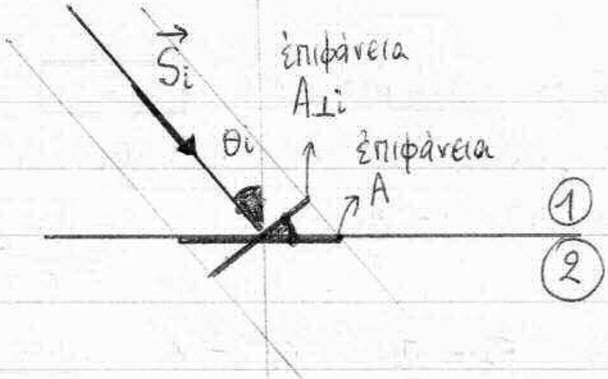
Διάνυσμα Poynting

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ $\qquad [\vec S] = [\vec E][\vec H] = \frac{V}{m}\frac{A}{m} = \frac{V\,C}{m^2 s} = \frac{joule}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$

$$|\vec S| = |\vec E||\vec H| = \frac{|\vec E||\vec B|}{\mu\mu_0} = \frac{|\vec E|^2 n}{\mu\mu_0 c_0} = |\vec E|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}{\mu^2\mu_0^2}} \Rightarrow |\vec S| = |\vec E|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{|\vec E|}{|\vec B|} = c \\ \\ n = \frac{c_0}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow |\vec B| = \frac{|\vec E|\, n}{c_0} \qquad \left.\begin{array}{l} c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \\ \\ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} \end{array}\right\} \Rightarrow n := \frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}{\varepsilon_0\mu_0}} \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$|\vec{S}_i| = |\vec{E}_i|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_i \varepsilon_0}{\mu_i \mu_0}} = |\vec{E}_i|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}}$$



$$|\vec{S}_r| = |\vec{E}_r|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} = |\vec{E}_r|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}}$$

$$|\vec{S}_t| = |\vec{E}_t|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_t \varepsilon_0}{\mu_t \mu_0}} = |\vec{E}_t|^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_2 \mu_0}}$$

$$A_{\perp i} = A \cos\theta_i$$

ομοίως $A_{\perp r} = A \cos\theta_r$

$$A_{\perp t} = A \cos\theta_t$$

$$|\vec{S}_i| = \frac{P_i(A_{\perp i})}{A_{\perp i}} \Rightarrow P_i(A_{\perp i}) = |\vec{S}_i| A_{\perp i} \Rightarrow P_i(A_{\perp i}) = |\vec{S}_i| A \cos\theta_i$$

$$P_r(A_{\perp r}) = |\vec{S}_r| A \cos\theta_r$$

$$P_t(A_{\perp t}) = |\vec{S}_t| A \cos\theta_t$$

$$P_i(A_{\perp i}) = P_r(A_{\perp r}) + P_t(A_{\perp t}) \Rightarrow$$

$$|\vec{S}_i| \cancel{A} \cos\theta_i = |\vec{S}_r| \cancel{A} \cos\theta_r + |\vec{S}_t| \cancel{A} \cos\theta_t \Rightarrow 1 = \frac{|\vec{S}_r|}{|\vec{S}_i|} + \frac{|\vec{S}_t| \cos\theta_t}{|\vec{S}_i| \cos\theta_i} \Rightarrow$$

$$1 = \frac{|\vec{E}_r|^2}{|\vec{E}_i|^2} + \frac{|\vec{E}_t|^2}{|\vec{E}_i|^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \cancel{\varepsilon_0} \mu_1 \cancel{\mu_0}}{\mu_2 \cancel{\mu_0} \varepsilon_1 \cancel{\varepsilon_0}}} \Rightarrow 1 = \frac{|\vec{E}_r|^2}{|\vec{E}_i|^2} + \frac{|\vec{E}_t|^2}{|\vec{E}_i|^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2}}$$

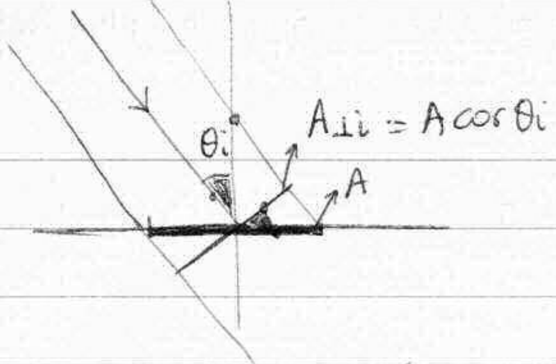
$$\boxed{1 = R + T}$$

Reflectance $R := \dfrac{|\vec{E}_r|^2}{|\vec{E}_i|^2}$

Transmittance $T := \dfrac{|\vec{E}_t|^2}{|\vec{E}_i|^2} \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2}}$

που για $\mu_1 = \mu_2 = 1 \Rightarrow T = \dfrac{|\vec{E}_t|^2}{|\vec{E}_i|^2} \dfrac{n_2}{n_1}$

(μη μαγνητικά υλικά)



$$|\vec{S}_i| = \frac{P_i}{A_{\perp i}}$$

$$\Rightarrow P_i = |\vec{S}_i|\, A_{\perp i} = |\vec{S}_i|\, A\cos\theta_i$$

$$P_i = P_r + P_t \Rightarrow |\vec{S}_i|\,\cancel{A}\cos\theta_i = |\vec{S}_r|\,\cancel{A}\cos\theta_r + |\vec{S}_t|\,\cancel{A}\cos\theta_t$$

$$1 = \frac{|\vec{S}_r|}{|\vec{S}_i|} + \frac{|\vec{S}_t|\cos\theta_t}{|\vec{S}_i|\cos\theta_i}$$

$$\frac{n\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

$$1 = \frac{|\vec{E}_r|^2}{|\vec{E}_i|^2}\cancel{\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0\mu_1\mu_0}{\mu_1\mu_0\varepsilon_1\varepsilon_0}}} + \frac{|\vec{E}_t|^2}{|\vec{E}_i|^2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2\cancel{\varepsilon_0}\mu_1\cancel{\mu_0}}{\mu_2\cancel{\mu_0}\varepsilon_1\cancel{\varepsilon_0}}}\,\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

$$1 = r^2 + t^2\sqrt{\frac{\varepsilon_2\cancel{\mu_1}}{\cancel{\mu_2}\varepsilon_1}}\,\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \Rightarrow 1 = r^2 + t^2\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\,\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

$$1 = r^2 + t^2\underbrace{\eta}_{\frac{n_2}{n_1}}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

$$R = r^2$$
$$T = t^2\eta\,\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$