

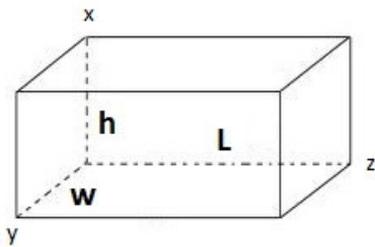
Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε κοιλότητα (standing electromagnetic waves in a cavity).

Διαμήκεις και Εγκάρσιοι Τρόποι (Longitudinal and Transverse modes).

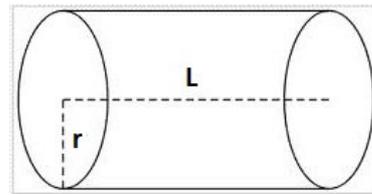
Διαμήκεις τρόποι: τους είδαμε ήδη λύνοντας βασικά ένα μονοδιάστατο (1Δ) πρόβλημα, βάζοντας κάτοπτρα στις θέσεις $z = 0$ και $z = L$ και θεωρώντας ότι εφαπτομενική συνιστώσα του \mathbf{E} μηδενίζεται στα κάτοπτρα (όπως και η κάθετη συνιστώσα του \mathbf{B}). Βρήκαμε ότι:

$$k_m = \frac{m\pi}{L}, \quad \omega_m = \frac{m\pi c}{L}, \quad v_m = \frac{c}{2L}, \quad L = m \frac{\lambda_m}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{άρα } \Delta v_{(m)} = \frac{1}{2L} c$$

L = μήκος (length), η απόσταση μεταξύ των κατόπτρων. Η τελευταία σχέση δίνει την συχνοτική απόσταση μεταξύ διαδοχικών διαμηκών τρόπων και ο δείκτης m βρίσκεται εντός παρενθέσεως, να μας θυμίζει απλώς ότι έχουμε το δείκτη m για τα κατά μήκος (L). $m' = m - 1$ = αριθμός δεσμών (node = κόμβος, δεσμός) στον άξονα z , δηλαδή ο αριθμός m αντιστοιχεί στο 1Δ κατά μήκος (L) πρόβλημα. Μια κοιλότητα είναι όμως τριδιάστατη (3Δ), π.χ. σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου ή κυλίνδρου (Εικόνα).



Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.



Κύλινδρος.

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο: Συνήθως $L \gg h, w$, όπου h = ύψος (height) και w = πλάτος (width). Θα μπορούσαμε να λύσουμε και τα 1Δ προβλήματα:

καθ' ύψος (h) με $p = 1, 2, 3, \dots$ και $p' = p - 1$ = αριθμός κόμβων (nodes) στον άξονα x , ή κατά πλάτος (w) με $q = 1, 2, 3, \dots$ και $q' = q - 1$ = αριθμός κόμβων (nodes) στον άξονα y .

Εγκάρσιοι τρόποι: προκύπτουν κατά τη λύση του τριδιαστάτου προβλήματος και εξαρτώνται από τη γεωμετρία της κοιλότητας π.χ. ορθογώνια παραλληλεπίπεδη ή κυλινδρική κοιλότητα.

Ηλεκτρομαγνητικοί τρόποι σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα.
The electromagnetic modes of a rectangular parallelepiped cavity.

Να εισαχθεί μια κανονική απόδειξη στο μέλλον. Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε μία άδεια ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα με τελείως αγωγίμα τοιχώματα και ακμές ύψους h (height), πλάτους w (width) και μήκους L (length) κατά μήκους των αξόνων x , y και z , αντιστοίχως. Επιπλέον ας υποθέσουμε ότι η κοιλότητα βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$ με μία κορυφή στην αρχή του O . Τότε, Από τις εξισώσεις Maxwell, κατά τα γνωστά, προκύπτει η κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Παρόμοια εξίσωση προκύπτει και για τη μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} . Στα τελείως αγωγίμα τοιχώματα θα πρέπει οι εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E}_{\parallel} και οι κάθετες συνιστώσες της μαγνητικής επαγωγής \mathbf{B}_{\perp} να μηδενίζονται. Τα επίπεδα κύματα ανοιχτού χώρου (free space plane waves) δεν ικανοποιούν αυτές τις συνοριακές συνθήκες. Μπορούμε όμως να αναζητήσουμε λύσεις της μορφής:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_r(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t),$$

όπου $\mathbf{E}_r(\mathbf{r})$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση θέσεως, ανεξάρτητη του χρόνου. Δηλαδή χωρίσαμε τη χρονική μεταβλητή από τις χωρικές. Οπότε ικανοποιείται η εξίσωση:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_r + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_r = 0.$$

Η λύση προκύπτει με τη μέθοδο του χωρισμού και των χωρικών μεταβλητών και είναι [1,5]:

$$E_x = E_{x0} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \exp(-i\omega t)$$

$$E_y = E_{y0} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \exp(-i\omega t)$$

$$E_z = E_{z0} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \exp(-i\omega t)$$

Οι συνιστώσες της μαγνητικής επαγωγής προκύπτουν π.χ. από την εξίσωση $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$:

$$B_x = i\omega (E_{y0} k_z - E_{z0} k_y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) \exp(-i\omega t)$$

$$B_y = i\omega (E_{z0} k_x - E_{x0} k_z) \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \exp(-i\omega t)$$

$$B_z = i\omega (E_{x0} k_y - E_{y0} k_x) \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \exp(-i\omega t)$$

Εδώ $k_x = \frac{n_x \pi}{a_x} = \frac{p\pi}{h}$, $k_y = \frac{n_y \pi}{a_y} = \frac{q\pi}{w}$, $k_z = \frac{n_z \pi}{a_z} = \frac{m\pi}{L}$, όπου οι $n_x = p$, $n_y = q$, $n_z = m$ είναι

ανεξάρτητοι μη αρνητικοί ακέραιοι (**αριθμοί τρόπων, mode numbers**) οι οποίοι υπόκεινται μόνο

Οι ΗΜ τρόποι με $p \neq 0$ ή $q \neq 0$ λέγονται εγκάρσιοι τρόποι (transverse modes). Η συχνοτική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών εγκαρσίων τρόπων π.χ. μεταβάλλοντας μόνο το p με συγκεκριμένα q και m είναι λοιπόν:

$$\Delta\nu_{(p)} \approx \frac{c}{4m} \frac{L}{a^2} (2p+1).$$

Προχειρότερες σημειώσεις παρακάτω...

Κάποια γενική ονοματολογία τρόπων.

TE (Εγκάρσιοι Ηλεκτρικοί, Transverse Electric): χωρίς ηλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση διαδόσεως.

TM (Εγκάρσιοι Μαγνητικοί, Transverse Magnetic): χωρίς μαγνητικό πεδίο στη διεύθυνση διαδόσεως.

TEM (Εγκάρσιοι ΗλεκτροΜαγνητικοί Transverse ElectroMagnetic): χωρίς ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στη διεύθυνση διαδόσεως.

Κοιλότητα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (rectangular parallelepiped cavity): δύο δείκτες για τους τρόπους π.χ. $TEM_{p'q'}$:

p' αριθμός δεσμών (nodes) κατά μήκος του άξονα x

q' αριθμός δεσμών (nodes) κατά μήκος του άξονα y

Κοιλότητα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (cylindrical cavity):

δύο δείκτες για τους τρόπους π.χ. $TEM_{p'q'}$:

p' αριθμός δεσμών (nodes) ακτινικά

q' αριθμός δεσμών (nodes) κατά μήκος ημίσειας περιφέρειας δηλ. γωνιακά.

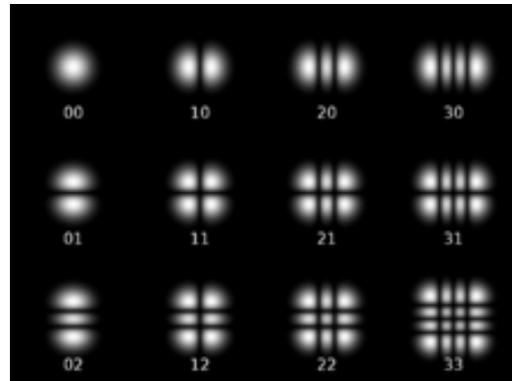
Ορθογώνια Παραλληλεπίπεδη Κοιλότητα

Εδώ οι δείκτες δηλώνουν τον αριθμό των κόμβων π.χ. TEM₀₂ σημαίνει κανένας κόμβος κατά μήκος του άξονα x και δύο κόμβοι κατά μήκος του άξονα y . Η μαθηματική έκφραση της εντάσεως της ΗΜ ακτινοβολίας σε καρτεσιανές συντεταγμένες εμφανίζεται στην αριστερή στήλη, ενώ αποδίδεται γραφικώς στην δεξιά. w είναι το FWHM μέγεθος της κηλίδας (spot size) του θεμελιώδους τρόπου TEM₀₀. Εδώ εμπλέκονται τα πολυώνυμα Hermite, $H_n(x)$. Τρόποι ανωτέρας τάξεως έχουν μεγαλύτερη χωρική έκταση. Οπότε με χρήση μιας οπής (aperture) που παρεμβάλλεται στην έξοδο του laser μπορούμε να κόψουμε εκείνους τους τρόπους που έχουν μεγαλύτερη από την επιθυμητή έκταση. Γενικώς, η συνολική μορφή της εντάσεως ακτινοβολίας οφείλεται στην υπέρθεση όλων των τρόπων της κοιλότητας, παρόλο που συχνά είναι επιθυμητό να λειτουργούμε μόνο στον θεμελιώδη τρόπο.

$$I_{mn}(x, y) = I_0 \left[H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{w^2} \right) \right]^2 \left[H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w} \right) \exp \left(-\frac{y^2}{w^2} \right) \right]^2$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2}$$

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \\ H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120 \\ H_7(x) &= 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x \\ H_8(x) &= 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680 \end{aligned}$$



Κυλινδρική κοιλότητα

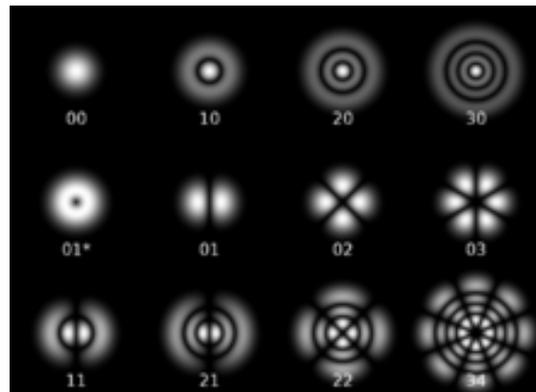
Παρακάτω οι δείκτες δηλώνουν τον αριθμό των κόμβων π.χ. TEM₀₂ σημαίνει κανένας κόμβος ακτινικά και δύο κατά μήκος ημίσειας περιφέρειας δηλαδή σε γωνία π . Η μαθηματική έκφραση της εντάσεως της ΗΜ ακτινοβολίας σε πολικές συντεταγμένες (r, φ) εμφανίζεται στην αριστερή στήλη, ενώ αποδίδεται γραφικώς στην δεξιά. Εδώ εμπλέκονται τα συσχετισμένα πολυώνυμα Laguerre, $L_n^{(\alpha)}(x)$ τα οποία σχετίζονται με τα πολυώνυμα Laguerre $L_n(x)$. $\rho = 2r^2/w^2$. w είναι το FWHM μέγεθος κηλίδας (spot size) του θεμελιώδους τρόπου TEM₀₀ ο οποίος συμπίπτει με τον TEM₀₀ της ορθογώνιας παραλληλεπίπεδης κοιλότητας.

$$I_{pl}(\rho, \varphi) = I_0 \rho^l \left[L_p^{(l)}(\rho) \right]^2 \cos^2(l\varphi) e^{-\rho}$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha})$$

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$$

n	$L_n(x)$
0	1
1	$-x + 1$
2	$\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$
3	$\frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
4	$\frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$
5	$\frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$
6	$\frac{1}{720}(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720)$



Αναφορές

- [1] W. Zimmermann Jr, arXiv 1207.0792, “The Classical Electromagnetic Modes of a Rectangular Resonant Cavity”.
- [2] Andrzej Wolski, University of Liverpool, and the Cockcroft Institute, UK, “Theory of Electromagnetic Fields”.
- [3] W. K. H. Panofsky and M. Phillips, Classical Electricity and Magnetism (Addison-Wesley, 1955).
- [4] J. R. Reitz and F. J. Milford, Foundations of Electromagnetic Theory (Addison-Wesley, 1960).
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, Electrodynamics of Continuous Media, 2nd Ed. (Pergamon, 1984).

Εικόνες από:

- [6] http://www.optique-ingenieur.org/en/courses/OPI_ang_M01_C03/co/Contenu_02.html
- [7] <http://laser.physics.sunysb.edu/~alex/tmodes/webreport.html>
- [8] http://en.wikipedia.org/wiki/Transverse_mode