ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ και LASERS

4 κεφάλαια (συνήθως) 1 κεφάλαιο

ΚΕΦ.1 Εισαγωγή στη κβαντική φύση του φωτός

* μέλαν σώμα και συναφείς έννοιες

* $\rho(\nu, T)\, d\nu$ — ν: συχνότητα, T: θερμοκρασία $\quad [\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\, Hz} \quad [\rho(\nu,T)\,d\nu] = \frac{J}{m^3}$

  πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος, σε θερμοδυναμική ισορροπία

* νόμοι Rayleigh-Jeans, Wien, Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος

  Rayleigh-Jeans: κλασικός θεωρία; Wien: ταίριασμα με πείραμα σε υψηλές συχνότητες; Planck: κβαντικός θεωρία

* νόμος Stefan–Boltzmann
  - $\to$ 1η διατύπωση $\mathcal{E}(T)$ πυκνότητα ενέργειας $\quad [\mathcal{E}(T)] = \frac{J}{m^3}$
  - $\to$ 2η διατύπωση I ένταση ακτινοβολίας $\quad [I] = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2}$

* εξ. Maxwell, συνοριακές συνθήκες σε διεπιφάνεια, ..., πεδία σε κοιλότητες

* $g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{d(\#\text{ κανονικών τρόπων ΗΜ πεδίου})}{d(\text{συχνότητα})}$

* $g(\nu)$ & κλασική φυσική (θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας) $\to$ ν. Rayleigh-Jeans

* $g(\nu)$ & κάποιες κβαντικές υποθέσεις $\to$ ν. Planck

* νόμος μετατοπίσεως Wien $\lambda_0 T = \text{σταθερά}$ ή $\frac{\nu_0}{T} = \text{σταθερά}$

* φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

(ΚΕΦ.2) Μηχανισμοί αλληλεπιδράσεως | ΗΜ ακτινοβολίας – ΔΣ

ΗΜ = ηλεκτρομαγνητικός
ΔΣ = δισταθμικό σύστημα (two-level system)
ΜΣ = μονοσταθμικό σύστημα
ΤΣ = τριοσταθμικό σύστημα
ΠΣ = πολυσταθμικό σύστημα
ΔΣ π.χ. 2 στάθμες ενός ατόμου, μορίου, κβαντικής τελείας (quantum dot) ή αλλιώς νανοσωματιδίου (nanoparticle)

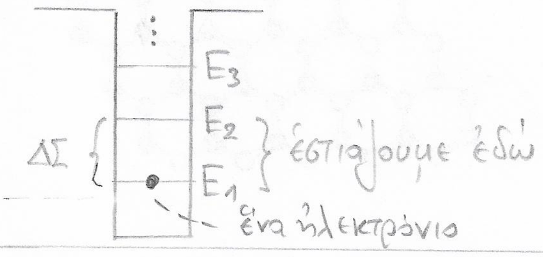
(Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση
(Stimulated) Absorption

Αυθόρμητη Εκπομπή — ΔΕΝ ΟΦΕΙΛΕΤΑΙ ΣΤΟ ρ
Spontaneous Emission

Εξαναγκασμένη Εκπομπή — ΟΦΕΙΛΕΤΑΙ ΣΤΟ ρ
Stimulated Emission

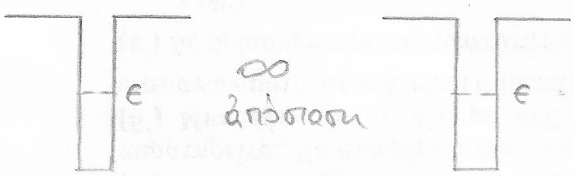
LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

σχηματικά

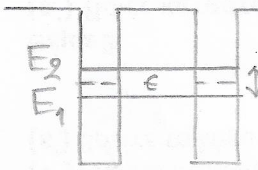


~ σε όλο το μάθημα αγνοούμε το spin του ηλεκτρονίου ...

πώς φτιάχνουμε ΔΣ από ΜΣ ...



ΕΞΗΓΗΣΗ ΑΡΓΟΤΕΡΑ



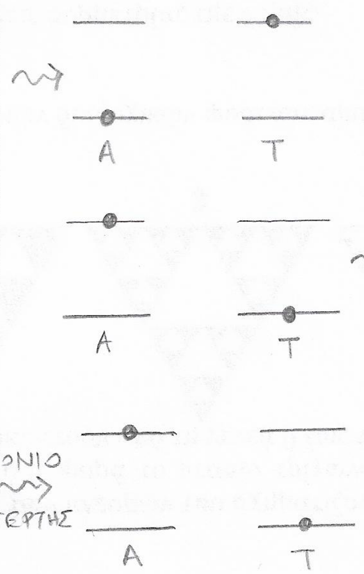
$E_2 - E_1 \simeq t = \langle \phi_A | \hat{H} | \phi_\Delta \rangle$

t: η αλληλεπίδραση μεταξύ των φρεάτων
t: transfer integral
ολοκλήρωμα μεταβιβάσεως

$$dW^{\varepsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = B_{12}\, \rho(\nu,T)\, dt$$ Εξαναγκασμένη Απορρόφηση

$$dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\varepsilon\kappa\pi} = A_{21}\, dt$$ Αυθόρμητη Εκπομπή

$$dW^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon\kappa\pi} = B_{21}\, \rho(\nu,T)\, dt$$ Εξαναγκασμένη Εκπομπή



(εξ.) απορ.

αυθ. εκπ.

εξ. εκπ.

ΔΥΟ ΦΩΤΟΝΙΑ · ΚΛΩΝΟΙ
ίδια ενέργεια, ορμή (κατεύθυνση), φάση, πόλωση

$E_\varphi = h\nu$

$P_\varphi = \dfrac{E_\varphi}{c}$

ιδιότητες που έχει το LASER:
- ίδια ενέργεια ⇒ μονοχρωματικότητα monochromaticity
- ίδια ορμή ⇒ κατευθυντικότητα directionality
- ίδια φάση ⇒ συνοχή coherence (συμφωνία)
- ίδια πόλωση* ⇒ πολωμένο φως polarization

ΚΕφ.3 Ἡμικλασική ἀντιμετώπιση τῆς ἀλληλεπιδράσεως | ΗΜ ἀκτινοβολίας – ΔΣ

→ ΗΜ πεδίο: κλασικά

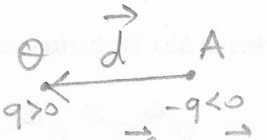
→ ΔΣ: κβαντικά

$$\hat{H} = \underbrace{\hat{H}_0}_{\text{χωρίς ΗΜ πεδίο}} + U_\varepsilon(\vec{r},t)$$

* ἀδιατάρακτο ΔΣ: χωρίς ΗΜ πεδίο
  διαταραγμένο ΔΣ: ἐντός ΗΜ πεδίου

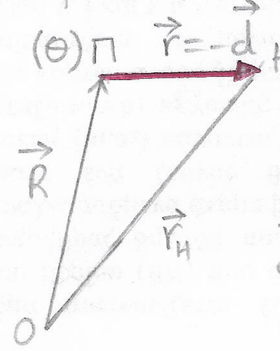
χρονικά ἐξαρτημένη θεωρία διαταραχῶν

* Διπολική Ροπή. Προσέγγιση Διπόλου



$\vec{d} = \vec{A\Theta}$

$\vec{p} := q\vec{d}$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} = q\vec{d} \\ \vec{d} = \vec{A\Theta} \\ q = e > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p} := q\vec{d} = e(-\vec{r}) \Rightarrow \vec{p} = -e\vec{r}$$

$U_\varepsilon = -\vec{p}\cdot\vec{\varepsilon}$ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ $U_\varepsilon(\vec{r},t)$

~ σε όλο το μάθημα ἀγνοοῦμε το spin
ἄρα και την ἀλληλεπίδραση
$U_B = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ σελίδα 3'

$\lambda >> a_0$

μῆκος κύματος — ἀκτίνα Bohr

(π.χ. ΔΣ = ἄτομο)

ὀπτικά μήκη κύματος

$\lambda \sim 500\ nm \qquad a_0 \simeq 0.529\ \text{Å} \sim 0.5\cdot 10^{-1}\ nm$

$$\frac{\lambda}{a_0} \simeq \frac{500\ nm}{0.5\ 10^{-1}\ nm} = 10^4$$

ὁμογενής = ...
ἰσότροπος = ...

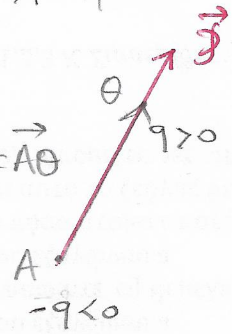
~ το ἠλεκτρικό πεδίο ἔχει μόνο χρονική ἐξάρτηση...
ἀλλά είναι χωρικά ὁμογενές

* χρονική ἐξέλιξη ΔΣ Συχνότητα Rabi
* RWA (Rotating Wave Approximation)
* Ἐπιτρεπόμενες και Ἀπαγορευμένες Ὀπτικές Μεταβάσεις
  ἐντός τῆς Προσεγγίσεως Διπόλου
  π.χ. στό ἄτομο Υδρογόνου

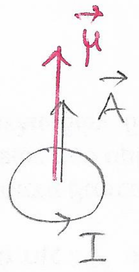
Υπενθύμιση Αναλογιών

$\vec{\mathcal{E}}$ (Ηλεκτρικό Πεδίο) | $\vec{B}$ (Μαγνητικό Πεδίο)

$\vec{d}=\vec{A\Theta}$



$\vec{p}=q\vec{d}$



$\vec{\mu}=I\vec{A}$

$\vec{p}=q\vec{d}$ ηλεκτρική διπολική ροπή | $\vec{\mu}=I\vec{A}$ μαγνητική διπολική ροπή

ή $\vec{\mu}=\frac{q}{2m}(\vec{L}+g\vec{S})$

$U_{\mathcal{E}}=-\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}$ δυναμική ενέργεια $U_B=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$

$\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{\mathcal{E}}$ (μηχανική) ροπή $\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B}$

$[\vec{p}]=Cm$ | $[\vec{\mu}]=Am^2$

$[U_{\mathcal{E}}]=Cm\frac{V}{m}=CV=J$ | $[U_B]=Am^2T=N\cdot m=J$

$F=BIl$
$N=TAm$

$[\vec{\tau}]=C\cdot m\cdot\frac{N}{C}=Nm$ | $[\vec{\tau}]=Am^2\cdot T=N\cdot m$

το αφήνουμε έτσι | το αφήνουμε έτσι

ΚΕΦ.4 Κβαντική αντιμετώπιση της αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας – ΔΣ

→ ΗΜ πεδίο: κβαντικά

→ ΔΣ: κβαντικά

φωτόνιο (μποζόνιο) καλόβολο
ηλεκτρόνιο (φερμιόνιο) ακατάδεκτο

ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΟΥΜΕ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΑ;

* Χαμιλτονιανή ΗΜ πεδίου με τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονίων (μποζονίων) $\hat{H}_{HM,m}$

* Χαμιλτονιανή ΔΣ με σπίνορες/ με τελεστές καταστροφής κ δημιουργίας ηλεκτρονίων (φερμιονίων) $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$

---

* Σχέσεις μεταθέσεως μποζονίων commutation relations
* Σχέσεις αντιμεταθέσεως φερμιονίων anticommutation relations

ΜΕΤΑΘΕΤΗΣ COMMUTATOR $[A,B] = AB - BA$ όταν $[A,B] = 0 \Rightarrow AB = BA$

ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ commutative property

ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΗΣ ANTICOMMUTATOR $\{A,B\} = AB + BA$ όταν $\{A,B\} = 0 \Rightarrow AB = -BA$

ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ anticommutative property

---

* Χαμιλτονιανή Αλληλεπιδράσεως ΗΜ πεδίου – ΔΣ $U_{\Sigma,m}$ $\hat{H}_{AF,m}$ (ατομική φυσική)

* Χαμιλτονιανή Rabi

$$\hat{H}_{R,m} = \underbrace{\hbar\omega_m \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m}_{\text{ΗΜ πεδίο}} + \underbrace{\hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-}_{\Delta\Sigma} + \underbrace{\hbar g_m(\hat{S}_+ + \hat{S}_-)(\hat{a}_m^{\dagger} + \hat{a}_m)}_{\text{ΗΜ πεδίο} - \Delta\Sigma}$$

ιδιοκαταστάσεις χωρίς αλληλεπίδραση ΗΜ πεδίου – ΔΣ $|\uparrow, n_m\rangle$ $|\downarrow, n_m\rangle$

* Χαμιλτονιανή Jaynes–Cummings

$$\hat{H}_{JC,m} = \hbar\omega_m \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m + \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- + \hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m + \hat{S}_-\hat{a}_m^{\dagger})$$

* Μέσες (αναμενόμενες) τιμές μεγεθών για την $\hat{H}_{JC,m}$ $\langle \hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m\rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$, $\langle \hat{S}_+\hat{a}_m\rangle$, $\langle \hat{S}_-\hat{a}_m^{\dagger}\rangle$

* Απορρόφηση φωτονίου
* Εκπομπή φωτονίου

} ταλαντώσεις

\# φωτονίων στην κοιλότητα

\# ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη

ΜΠΟΖΟΝΙΑ

στιλέτο (dagger)

$\hat{a}_m^+$ τελεστής δημιουργίας φωτονίου του ΗΜ τρόπου με κυκλική συχνότητα ω_m
creation operator

$\hat{a}_m$ τελεστής καταστροφής φωτονίου »
annihilation operator

Ταυτοχρόνως, ο $\hat{a}_m^+$ μπορεί να ονομαστεί τελεστής αναβιβάσεως
raising operator
διότι αναβιβάζει την ενέργεια κατά $\hbar\omega_m$

ο $\hat{a}_m$ μπορεί να ονομαστεί τελεστής καταβιβάσεως
lowering operator
διότι καταβιβάζει την ενέργεια κατά $\hbar\omega_m$

$\hat{a}_m^+, \hat{a}_m$ τελεστές κλίμακας ladder operators

Οι $\hat{a}_m^+, \hat{a}_m$ ακολουθούν σχέσεις μεταθέσεως μποζονίων $[\,,\,]$

ΦΕΡΜΙΟΝΙΑ

$\hat{S}_+$ τελεστής αναβιβάσεως ηλεκτρονίου $\hat{S}_+\left|\begin{smallmatrix}\circ\\ \bullet\end{smallmatrix}\right\rangle = \left|\begin{smallmatrix}\bullet\\ \circ\end{smallmatrix}\right\rangle$

$\hat{S}_-$ τελεστής καταβιβάσεως ηλεκτρονίου $\hat{S}_-\left|\begin{smallmatrix}\bullet\\ \circ\end{smallmatrix}\right\rangle = \left|\begin{smallmatrix}\circ\\ \bullet\end{smallmatrix}\right\rangle$

Ταυτοχρόνως, ο $\hat{S}_+$ θα μπορούσε να ονομαστεί τελεστής δημιουργίας ηλεκτρονίου στην άνω στάθμη ΚΑΙ καταστροφής ηλεκτρονίου στην κάτω στάθμη

ο $\hat{S}_-$ θα μπορούσε να ονομαστεί τελεστής καταστροφής ηλεκτρονίου στην άνω στάθμη ΚΑΙ δημιουργίας ηλεκτρονίου στην κάτω στάθμη

οι $\hat{S}_+, \hat{S}_-$ ακολουθούν σχέσεις αντιμεταθέσεως φερμιονίων $\{\,,\,\}$

εναλλακτικός συμβολισμός $\hat{a}_i^+, \hat{a}_i$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΜΠΟΖΟΝΙΩΝ

boson commutation relations

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_\ell] = 0$$

$$[\hat{a}_m^+, \hat{a}_\ell^+] = 0$$

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_m^+] = 1$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΦΕΡΜΙΟΝΙΩΝ

fermion anticommutation relations

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^+\} = \delta_{ij}$$

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^+\} = 0$$

ΚΕΦ.5 LASERS

Laser He-Ne

$\frac{dN_1}{dt}, \frac{dN_2}{dt}, \frac{d\rho}{dt}$

Εξισώσεις ρυθμών για τους πληθυσμούς (N_1, N_2) των σταθμών που συμμετέχουν στην εκπομπή συνεκτικής ΗΜ ακτινοβολίας και για την πυκνότητα ακτινοβολίας ρ εντός κοιλότητας LASER

Διαμήκεις και Εγκάρσιοι τρόποι ΗΜ πεδίου

Πληθυσμοί σταθμών (N_1, N_2) και πυκνότητα ΗΜ ακτινοβολίας (ρ) στη στάσιμη κατάσταση.

→ Τι είναι

Άντληση. Κρίσιμη Άντληση.

Αναστροφή πληθυσμού.

Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ρυθμών για τα N_1, N_2, ρ.

↑ matlab

Άλλα είδη LASER...

ΚΕΦ.6 Πίνακας Πυκνότητας

Καθαρή κατάσταση και μικτή κατάσταση

Καθαρή κατάσταση → το σύστημα περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση

Μικτή κατάσταση → δεν υπάρχει μια καλά ορισμένη κυματοσυνάρτηση για το σύστημα
π.χ. το σύστημα είναι συζευγμένο με μια δεξαμενή με την οποία μπορεί να ανταλλάσσει θερμότητα, σωματίδια κλπ

Πίνακας Πυκνότητας — Τελεστής πυκνότητας

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| \qquad |\Psi\rangle = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix} \qquad |\Psi\rangle = \sum_k c_k(t)\,|\Phi_k\rangle$$

π.χ. Πίνακας πυκνότητας ή τελεστής πυκνότητας
σε καθαρή κατάσταση
διστάθμικού συστήματος

$$\rho = \begin{bmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{bmatrix}$$

Η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας: εξ. Liouville–von Neumann

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \qquad \hat{H} = \hat{H}_0 + U_E(\vec{r}, t)$$

Η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας με μηχανισμούς αποδιεγέρσεως

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{i\hbar}{2}\{\hat{\Gamma}, \hat{\rho}\}$$

$$\hat{\Gamma}|\Phi_k\rangle = \gamma_k |\Phi_k\rangle$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + U_E(\vec{r}, t) - \frac{i\hbar}{2}\hat{\Gamma}$$

ΚΕΦ. 7 ΔΙΑΦΟΡΑ

Τεχνικές απομονώσεως TEM_{00} ή $TEM_{p'q'}$ ανωτέρας τάξεως

Εξισώσεις Fresnel. Γωνία Brewster (η γωνία για την οποία ∄ ανάκλαση p πόλωσης)

διεπιφάνεια πολώσεις s, p $\quad t, r \quad \ldots$

$$T + R = 1$$

διελευσιμότητα $\quad$ ανακλαστικότητα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΚΑΘΕ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ → έως +1 βαθμό

προς λύση

→ επαφή με το μάθημα

∃ 1 τουλάχιστον λάθος

πόσοι-ες από 30 έτος

πόσοι-ες αριστερόχειρες

πόσοι-ες είναι από την κατεύθυνση Α

Β

Γ

Δ

Ε

Οι διάφορες στατιστικές που αναφέρονται παρακάτω θα αναλυθούν στο μάθημα της Στατιστικής Φυσικής.

μ θερμοδυναμικός ορισμός $\delta Q = dU + \delta W$

$\delta W = p dV - \sum_i \mu_i dN_i$

κατάσταση i με ενέργεια E_i $\quad N$ = ο αριθμός των σωματιδίων $\quad \beta := \frac{1}{k_B T}$

$\overline{n}_i$ = ο μέσος αριθμός σωματιδίων στην κατάσταση i με ενέργεια E_i $\quad \mu$ = χημικό δυναμικό

Συνήθως $\#i \gg N$

• Η στατιστική Maxwell-Boltzmann (MB) αφορά κλασικά σωματίδια, για τα οποία θεωρούμε πως δεν υπάρχουν κβαντισμένα ενεργειακά επίπεδα, π.χ. οι δομικοί λίθοι του κλασικού ιδανικού αερίου.

$$\boxed{\overline{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}}} = e^{-\beta E_i} e^{\beta\mu} \quad \text{MB}$$

Επειδή $\boxed{\sum_i \overline{n}_i = N} \Rightarrow \sum_i e^{-\beta E_i} e^{\beta\mu} = N \Rightarrow \boxed{e^{\beta\mu} = \frac{N}{\sum_i e^{-\beta E_i}}}$ $\Bigg\}\ \overline{n}_i = \frac{N e^{-\beta E_i}}{\sum_i e^{-\beta E_i}}$

$\boxed{N}$ η σχέση αυτή καθορίζει το μ

• Η στατιστική Fermi-Dirac (FD) αφορά κβαντικά σωματίδια, τα οποία υπακούουν στην απαγορευτική αρχή Pauli ότι μόνο ένα σωματίδιο μπορεί να καταλάβει μία κβαντική κατάσταση. ΑΚΑΤΑΔΕΚΤΑ ΣΝΟΜΠ

Τα σωματίδια αυτά λέγονται φερμιόνια (fermions) και έχουν ιδιοστροφορμή (σπιν) s ημιφυσικό («ημιακέραιο») πολλαπλάσιο $(1/2, 3/2, 5/2, \ldots)$ της ποσότητας $\hbar$.

Τέτοια είναι π.χ. τα ηλεκτρόνια, πρωτόνια, νετρόνια.

Για τη στατιστική FD ισχύει:

$$\boxed{\overline{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}+1}} \quad \text{FD}$$

• Η στατιστική Bose-Einstein (BE) αφορά κβαντικά σωματίδια, με την ιδιότητα ότι μια κβαντική κατάσταση μπορεί να καταλαμβάνεται από οσαδήποτε σωματίδια. ΚΑΤΑΔΕΚΤΙΚΑ ΚΑΛΟΒΟΛΑ

Τα σωματίδια αυτά λέγονται μποζόνια (bosons) και έχουν ιδιοστροφορμή (σπιν) s φυσικό («ακέραιο») πολλαπλάσιο $(0, 1, 2, \ldots)$ της ποσότητας $\hbar$.

Τέτοια είναι π.χ. τα φωτόνια, τα άτομα ${}^4_2He$, οι πυρήνες των ατόμων ${}^4_2He$.

Για τη στατιστική BE ισχύει:

$$\boxed{\overline{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}-1}} \quad \text{BE}$$

Σε σύστημα FD ή BE με σταθερό N, η σχέση $\boxed{\sum_i \bar{n}_i = N}$ καθορίζει το μ.

Συνοπτικώς, λοιπόν, μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)} \begin{matrix} +1 & \text{FD} \\ -1 & \text{BE} \\ \text{ή } \emptyset & \text{MB} \end{matrix}}}$$

και η σχέση

$$\boxed{\sum_i \bar{n}_i = N}$$ καθορίζει το μ

- Οι στατιστικές FD και BE συγκλίνουν στη στατιστική MB:

FD, BE $\xrightarrow[T\uparrow]{n\downarrow}$ MB

- όταν η συγκέντρωση των σωματιδίων n είναι μικρή σε σχέση με τη λεγόμενη κβαντική συγκέντρωση $n\downarrow$

$$n < n_Q \qquad n_Q = \left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

σε θερμοκρασία δωματίου (T=300K), για τα πρωτόνια $n_Q \approx 1000\ nm^{-3}$, ενώ, για τα ηλεκτρόνια $n_Q \approx 0.015\ nm^{-3}$.

- σε υψηλές θερμοκρασίες $T\uparrow$

Διότι:

- όριο χαμηλής συγκεντρώσεως ⟹ N πολύ μικρός ⟹ $\bar{n}_i \ll 1,\ \forall i$ ⟹

$$e^{\beta(E_i-\mu)} \gg 1,\ \forall i$$

- όριο υψηλής θερμοκρασίας ⟹ $\beta = \frac{1}{k_B T}$ μικρό

⇓

πολλές στάθμες υψηλής ενέργειας (και $E_i > \mu$) είναι κατειλημμένες δηλαδή η κατανομή απλώνει ενεργειακώς με μικρές πιθανότητες καταλήψεως ⟹

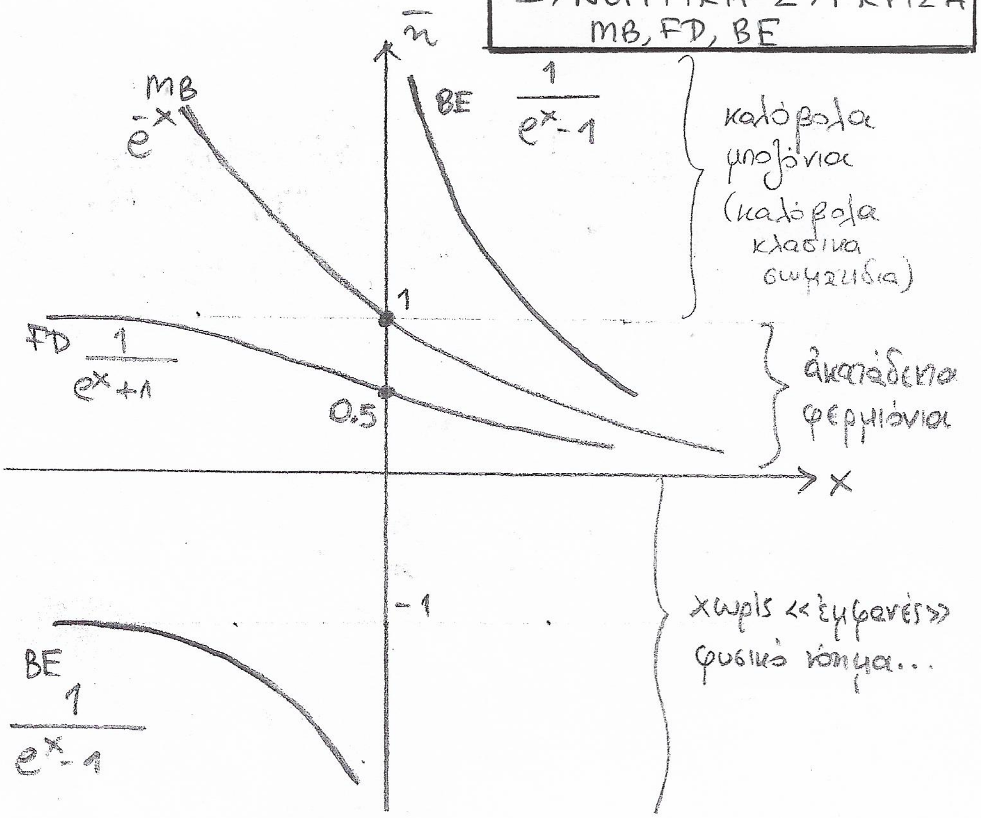
$$\bar{n}_i \ll 1,\ \forall i \Rightarrow$$

$$e^{\beta(E_i-\mu)} \gg 1,\ \forall i$$

Στις περιπτώσεις αυτές

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)} \pm 1} \simeq \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}}$$ δηλαδή οι FD και BE συγκλίνουν στη MB.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ MB, FD, BE

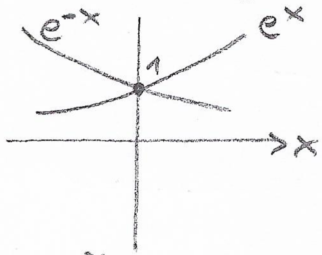


$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)} \begin{array}{l} \pm 1 \\ \text{ή } 0 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{FD} \\ \text{BE} \\ \text{MB} \end{array}$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} \begin{array}{l} \pm 1 \\ \text{ή } 0 \end{array}}$$

$$x := \beta(E-\mu)$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{x} \begin{array}{l} \pm 1 \\ \text{ή } 0 \end{array}}$$



MB $\quad \bar{n} = \frac{1}{e^x} = e^{-x} > 0, \forall x \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

FD $\quad \bar{n} = \frac{1}{e^x+1} > 0, \forall x \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x+1} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x+1} = 1$

BE $\quad \bar{n} = \frac{1}{e^x-1}$

$\underset{\sim\sim}{x>0} \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow \bar{n} > 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0$

$\underset{\sim\sim}{x<0} \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0 \Rightarrow \bar{n} < 0$!

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x-1} = -1$

χωρίς «εμφανές» φυσικό νόημα...

(ΑΣΚΗΣΗ) (6)

$$\boxed{n_Q = \left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}}$$ κβαντική συγκέντρωση

$$\left(\frac{\cancel{kg}\cdot s^2}{\cancel{kg}\, m\, s^2 m}\right)^{3/2} = \frac{1}{m^3}$$

• πρωτόνια $m \simeq 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg$ σε $T = 300K$

$$n_Q \approx \left(\frac{1.67\cdot 10^{-27}\,kg\; 1.38\cdot 10^{-23}\,J\; 300\cancel{K}}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-68}\,J^2 s^2\;\cancel{K}}\right)^{3/2} \simeq 1154\,(10^{18})^{3/2}\frac{1}{m^3} \approx 10^3\cdot 10^{27}\frac{1}{m^3} = 10^{30}\,m^{-3}$$

$$n_Q \approx 10^{30}\frac{1}{m^3} = 10^{30}\frac{1}{10^{30}\,Å^3} = 10^{30}\frac{1}{10^{27}\,nm^3} = 1\,\frac{1}{Å^3} = 1000\,\frac{1}{nm^3} = 10^{30}\frac{1}{10^6\,cm^3} = 10^{24}\frac{1}{cm^3}$$

• ηλεκτρόνια $m \simeq 9.1\cdot 10^{-31}\,kg$ σε $T = 300K$

$$n_Q \approx \left(\frac{9.1\cdot 10^{-31}\,kg\; 1.38\cdot 10^{-23}\,J\; 300K}{2\pi\cdot 1\cdot 10^{-68}\,J^2 s^2\; K}\right)^{3/2} \simeq 14682\,(10^{14})^{3/2}\frac{1}{m^3} \simeq 15\cdot 10^3\cdot 10^{21}\frac{1}{m^3}$$

$$n_Q \approx 15\cdot 10^{24}\frac{1}{m^3} = 15\;10^{24}\frac{1}{10^{30}\,Å^3} = 15\;10^{24}\frac{1}{10^{27}\,nm^3} = 15\cdot 10^{-6}\frac{1}{Å^3} = 15\cdot 10^{-3}\frac{1}{nm^3}$$

$$= 15\cdot 10^{24}\frac{1}{10^6\,cm^3} = 15\cdot 10^{18}\frac{1}{cm^3}$$

Συνοψίζοντας: πρωτόνια σε 300K $\quad n_Q \simeq 10^{30}\frac{1}{m^3} = 10^{24}\frac{1}{cm^3} = 10^3\frac{1}{nm^3} = 1\,\frac{1}{Å^3}$

ηλεκτρόνια σε 300K $\quad n_Q \simeq 15\cdot 10^{24}\frac{1}{m^3} = 15\cdot 10^{18}\frac{1}{cm^3} = 15\cdot 10^{-3}\frac{1}{nm^3} = 15\cdot 10^{-6}\frac{1}{Å^3}$

Cu πυκνότητα $\rho \simeq 9\,\frac{g}{cm^3} = 9000\,\frac{kg}{m^3}$ $\qquad AB \simeq 63.5$

σε 63.5g έχουμε $6.022\cdot 10^{23}$ άτομα

9 g $\quad \frac{9}{63.5}\cdot 6.022\cdot 10^{23}$ άτομα $\longrightarrow 1\,cm^3$

Κάθε άτομο Cu έχει 1 «ελεύθερο» ηλεκτρόνιο

$$n_{ηλεκτρ} \simeq \frac{9}{63.5}\,6.022\cdot 10^{23}\frac{1}{cm^3} \approx 0.85\cdot 10^{23}\frac{1}{cm^3} \gg 15\cdot 10^{18}\frac{1}{cm^3} = n_Q$$

Άρα τα ηλεκτρόνια του Cu δεν μπορούν να περιγραφτούν κλασικώς.

ΜΠΟΖΟΝΙΑ	Αδρόνια		ΦΕΡΜΙΟΝΙΑ
φωτόνιο γ	μεσόνια	βαρυόνια	λεπτόνια ($e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$)
γκλουόνιο g	π.χ. π μεσόνιο	π.χ. πρωτόνιο	κουάρκς (u, d, c, s, t, b)
μποζόνια W^+, W^-, Z^0	K μεσόνιο	νετρόνιο	
βαρυτόνιο G	...	...	
μποζόνιο Higgs H	φτιάχνονται από κουάρκς		

ΘΕΜΑ ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Τα μποζόνια μετατίθονται

$[A,B] = AB - BA$ ΜΕΤΑΘΕΤΗΣ commutator

όταν $[A,B]=0 \Rightarrow AB = BA$

μεταθετική ιδιότης

commutative property

οι τελεστές, οι οποίοι περιγράφουν καταστροφή και δημιουργία μποζονίων ακολουθούν σχέσεις μεταθέσεων

Τα φερμιόνια αντιμετατίθονται

$\{A,B\} = AB + BA$ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΗΣ anticommutator

όταν $\{A,B\}=0 \Rightarrow AB = -BA$

αντιμεταθετική ιδιότης

anticommutative property

οι τελεστές, οι οποίοι περιγράφουν καταστροφή και δημιουργία φερμιονίων ακολουθούν σχέσεις αντιμεταθέσεων