Είχαμε βρεί για $\Delta=0$

ΑΣΚΗΣΗ 1

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt2} e^{i\frac{\Omega_R t}{2}} + \frac{c_2}{\sqrt2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{c_1}{\sqrt2} e^{i\frac{\Omega_R t}{2}} - \frac{c_2}{\sqrt2} e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}} \end{bmatrix}$$

άς βάλουμε αρχικές συνθήκες $C_1(0)=\frac{1}{\sqrt2}e^{i\theta}$ κ $C_2(0)=\frac{1}{\sqrt2}e^{i\varphi} \Rightarrow$

$$|C_1(0)|^2=\frac12=|C_2(0)|^2$$

- $\frac{1}{\sqrt2}e^{i\theta}=\frac{c_1}{\sqrt2}+\frac{c_2}{\sqrt2} \Rightarrow c_1+c_2=e^{i\theta}$
- $\frac{1}{\sqrt2}e^{i\varphi}=\frac{c_1}{\sqrt2}-\frac{c_2}{\sqrt2} \Rightarrow c_1-c_2=e^{i\varphi}$

$\oplus\ 2c_1=e^{i\theta}+e^{i\varphi}$

$\ominus\ 2c_2=e^{i\theta}-e^{i\varphi}$

$$c_1=\frac{e^{i\theta}+e^{i\varphi}}{2} \qquad c_2=\frac{e^{i\theta}-e^{i\varphi}}{2}$$

- $C_1(t)=\frac{e^{i\theta}+e^{i\varphi}}{2\sqrt2}e^{i\frac{\Omega_R t}{2}}+\frac{e^{i\theta}-e^{i\varphi}}{2\sqrt2}e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}$
- $C_2(t)=\frac{e^{i\theta}+e^{i\varphi}}{2\sqrt2}e^{i\frac{\Omega_R t}{2}}-\frac{e^{i\theta}-e^{i\varphi}}{2\sqrt2}e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}$

$\Rightarrow$

- $2\sqrt2\,C_1(t)=\underline{e^{i\theta}e^{i\frac{\Omega_R t}{2}}}+\underline{e^{i\varphi}e^{i\frac{\Omega_R t}{2}}}+\underline{e^{i\theta}e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}}-\underline{e^{i\varphi}e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}}$
- $2\sqrt2\,C_2(t)=\underline{e^{i\theta}e^{i\frac{\Omega_R t}{2}}}+\underline{e^{i\varphi}e^{i\frac{\Omega_R t}{2}}}-\underline{e^{i\theta}e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}}+\underline{e^{i\varphi}e^{-i\frac{\Omega_R t}{2}}}$

$\Rightarrow$

- $2\sqrt2\,C_1(t)=e^{i\theta}\,2\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)+e^{i\varphi}\,2i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$
- $2\sqrt2\,C_2(t)=e^{i\theta}\,2i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)+e^{i\varphi}\,2\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$

$\Rightarrow$

- $8|C_1(t)|^2=4\cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)+4\sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)+e^{i\theta}2\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)e^{-i\varphi}2(-i)\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$
$\qquad e^{i\varphi}2i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)2e^{-i\theta}\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \Rightarrow$

$$2|C_1(t)|^2=\cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)-ie^{i\theta}e^{-i\varphi}\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)+ie^{i\varphi}e^{-i\theta}\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$$\frac12\sin(\Omega_R t)\,i\left\{e^{i(\varphi-\theta)}-e^{-i(\varphi-\theta)}\right\}=\frac{i}{2}\sin(\Omega_R t)\,2i\sin\psi=-\sin(\Omega_R t)\sin\psi$$

$\psi:=\varphi-\theta$

$\cos\psi \quad i\sin\psi$

$-\cos\psi+i\sin\psi$

$$=\sin(\Omega_R t)\cdot\sin(\theta-\varphi)$$

$$\boxed{|C_1(t)|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi)}$$ γενικώς, ∃ ταλάντωση

ἀν ὅμως $\theta=\varphi \Rightarrow |C_1(t)|^2 = \frac{1}{2}$ κ ∄ ταλάντωση $\quad 2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

Ἀν θέλω $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$$\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi) = -\sin(\Omega_R t) \Rightarrow$$

$$\sin(\theta-\varphi) = -1 \Rightarrow \theta-\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

- $8|C_2(t)|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + e^{i\theta} 2i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \cdot e^{-i\varphi} 2\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$

$$e^{i\varphi} 2\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \cdot e^{-i\theta} 2(-i)\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \Rightarrow$$

$$2|C_2(t)|^2 = 1 + \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\, i\left\{e^{i\theta}e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}e^{-i\theta}\right\}$$

$$e^{i(\theta-\varphi)} - e^{-i(\theta-\varphi)}$$

$$\psi := \theta - \varphi$$

$$e^{i\psi} - e^{-i\psi}$$

$$\cos\psi \quad i\sin\psi$$

$$-\cos\psi + i\sin\psi$$

$$2|C_2(t)|^2 = 1 + \frac{1}{\cancel{2}}\sin(\Omega_R t)\, i\, \cancel{2} i\sin\psi$$

$$\boxed{|C_2(t)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi)}$$ γενικώς, ∃ ταλάντωση

ἀν ὅμως $\theta=\varphi \Rightarrow |C_2(t)|^2 = \frac{1}{2}$ κ ∄ ταλάντωση

Ἀν θέλω $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$$\sin(\Omega_R t)\sin(\theta-\varphi) = -\sin(\Omega_R t) \Rightarrow$$

$$\sin(\theta-\varphi) = -1 \Rightarrow \theta-\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

ΔΣ $\Delta = 0$ ἀρχικές συνθῆκες $C_1(0)=1$, $C_2(0)=0$ δηλ

ἀποσυντονισμός $\Delta := \omega - \Omega$

$$P_1(t) = |C_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t)$$

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t)$$

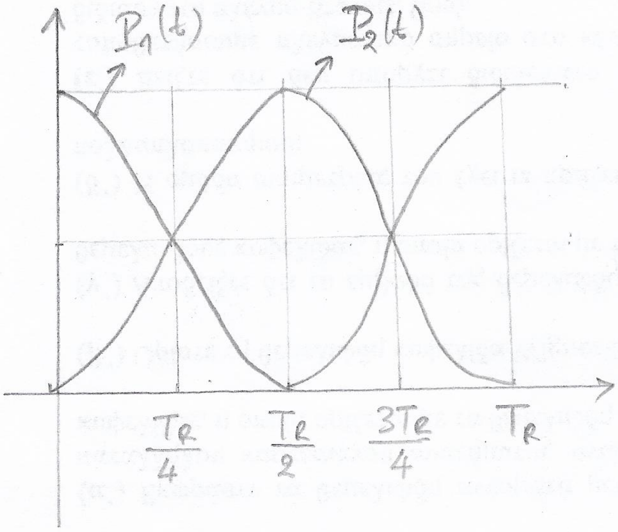
$\Omega_R := \frac{\wp E_0}{\hbar}$ $(\wp > 0)$

συχνότητα Rabi βρίσκεται θετική

$\Omega_R := \frac{-\wp E_0}{\hbar}$ $(\wp < 0)$

Ω_R: ἐκφράζει την ταχύτητα διαταραχής

Δ: ἐκφράζει την ἀπόσταση τῶν ω (ΗΜ πεδίο) κ Ω (ΔΣ)



περίοδος (period) $T_R = \frac{2\pi}{\Omega_R}$

$A_R = 1$ μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως (maximum transfer percentage)

$\langle P_1(t)\rangle = \langle |C_1(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2}$ μέση πιθανότητα παρουσίας στη στάθμη 1

$\langle P_2(t)\rangle = \langle |C_2(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2}$ μέση πιθανότητα παρουσίας στη στάθμη 2

μέγιστος ρυθμός μεταβιβάσεως (maximum transfer rate) $\boxed{\frac{A_R}{T_R} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\Omega_R}} = \frac{\Omega_R}{2\pi}}$

$t_{2mean} :=$ ὁ χρόνος, ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ὥστε ἡ $P_2(t)$ να πιάσει 1η φορά τὴν $\langle P_2(t)\rangle$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t_{2mean}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\Omega_R t_{2mean}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega_R t_{2mean} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t_{2mean} = \frac{\pi}{2\Omega_R}}$$

μέσος ρυθμός μεταβιβάσεως (mean transfer rate)

$$k := \frac{\langle |C_2(t)|^2 \rangle}{t_{2mean}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2\Omega_R}} = \frac{\Omega_R}{\pi} \Rightarrow \boxed{k = 2\,\frac{A_R}{T_R}}$$

• ΛΥΣΗ για $\Delta \neq 0$ μηδέ για $\xi<0$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & +\frac{\Omega_R}{2} \\ +\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{2,1} = \pm \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2} = \pm\lambda$$

$\lambda > 0$

$$\vec{U}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix} \qquad a = \frac{\frac{\Delta}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}}$$

οι πράξεις υπάρχουν στο βιβλίο

$$\vec{U}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}} \\ \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}} \end{bmatrix} \qquad a' = \frac{\frac{\Delta}{2} - \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}{\frac{\Omega_R}{2}}$$

Γενική λύση

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(t) e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t) e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{2} c_k \vec{U}_k e^{-i\lambda_k t} = c_1 \vec{U}_1 e^{-i\lambda_1 t} + c_2 \vec{U}_2 e^{-i\lambda_2 t}$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix} e^{-i\lambda_1 t} + c_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}} \\ \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}} \end{bmatrix} e^{-i\lambda_2 t}$$

Έστωσαν Αρχικές Συνθήκες $C_1(0)=1 \quad C_2(0)=0$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{1+a'^2}} \\ \frac{c_1 a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{c_2 a'}{\sqrt{1+a'^2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \qquad c_1 = \frac{a'\sqrt{1+a^2}}{a'-a} \qquad c_2 = -\frac{a\sqrt{1+a'^2}}{a'-a}$$

Άρα...

$$\begin{bmatrix} C_1(t) e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t) e^{i\frac{\Delta}{2}t} \end{bmatrix} = \frac{a'\sqrt{1+a^2}}{a'-a} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix} e^{-i\lambda_1 t} - \frac{a\sqrt{1+a'^2}}{a'-a} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}} \\ \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}} \end{bmatrix} e^{-i\lambda_2 t}$$

B.

$$C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} = \frac{a'}{a'-a}e^{-i\lambda_1 t} - \frac{a}{a'-a}e^{-i\lambda_2 t}$$

$$C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} = \frac{aa'}{a'-a}e^{-i\lambda_1 t} - \frac{aa'}{a'-a}e^{-i\lambda_2 t}$$

$$\frac{a'}{a'-a} = \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}-\Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}} = \gamma_1 \qquad \frac{aa'}{a'-a} = \frac{\Omega_R}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}} = \gamma_3$$

$$\frac{a}{a'-a} = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}+\Delta}{2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}} = -\gamma_2$$

$$C_1(t)e^{-i\frac{\Delta}{2}t} = \gamma_1 e^{-i\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{-i\lambda_2 t} \Rightarrow C_1(t) = \left(\gamma_1 e^{-i\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{-i\lambda_2 t}\right)e^{i\frac{\Delta}{2}t}$$

$$C_2(t)e^{i\frac{\Delta}{2}t} = \gamma_3\left(e^{-i\lambda_1 t} - e^{-i\lambda_2 t}\right) \Rightarrow C_2(t) = \gamma_3\left(e^{-i\lambda_1 t} - e^{-i\lambda_2 t}\right)e^{-i\frac{\Delta}{2}t}$$

$$|C_1(t)|^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_2 e^{i(\lambda_1-\lambda_2)t} + \gamma_1\gamma_2 e^{i(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

$$|C_2(t)|^2 = \gamma_3^2\left[1+1-e^{i(\lambda_1-\lambda_2)t} - e^{i(\lambda_2-\lambda_1)t}\right]$$

$$\lambda_1-\lambda_2 = -\lambda-\lambda = -2\lambda \qquad \lambda_2-\lambda_1 = 2\lambda$$

$$|C_1(t)|^2 = \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_1\gamma_2 e^{-i2\lambda t} + \gamma_1\gamma_2 e^{i2\lambda t} = \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_1\gamma_2\, 2\cos(2\lambda t)$$

$$|C_2(t)|^2 = \gamma_3^2\left[2 - e^{-i2\lambda t} - e^{i2\lambda t}\right] = \gamma_3^2\left[2-2\cos(2\lambda t)\right]$$

$$|C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{4(\Omega_R^2+\Delta^2)}\cdot 2\left(1-\cos(2\lambda t)\right) = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}\,2\sin^2(\lambda t) = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}\cdot\sin^2(\lambda t)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}$$

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2 = \frac{\Omega_R^2+2\Delta^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}, \quad 2\gamma_1\gamma_2 = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \Rightarrow \gamma_1^2+\gamma_2^2+2\gamma_1\gamma_2 = 1 \qquad 2\gamma_3^2 = 2\gamma_1\gamma_2$$

$$\gamma_3^2 = \gamma_1\gamma_2$$

$$|C_1(t)|^2 = 1 - 2\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_1\gamma_2\cos(2\lambda t) = 1 + 2\gamma_1\gamma_2\left[\cos(2\lambda t)-1\right]$$

$$|c_1(t)|^2 = 1 + \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot (-2)\sin^2(\lambda t)$$

$$|c_1(t)|^2 = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \cdot \sin^2(\lambda t)$$ όπως αναμενόταν

διότι $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$

Συνοπτικώς:

$$\boxed{|c_1(t)|^2 = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \cdot \sin^2(\lambda t)}$$

$$\boxed{|c_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \cdot \sin^2(\lambda t)}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}$$

ή

$$|c_1(t)|^2 = 1 - \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} + \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot \cos(2\lambda t)$$

$$\boxed{|c_1(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2+2\Delta^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} + \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot \cos(2\lambda t) = P_1(t)}$$

$$\boxed{|c_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} - \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot \cos(2\lambda t) = P_2(t)}$$

περίοδος ταλαντώσεων

$$\boxed{T_R = \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}} = \frac{1}{\nu_R}}$$

ΝΑ ΔΙΟΡΘΩΘΕΙ
Κ ΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ
~~σφάλμα~~
δοσ
~~ταλαντώσεων~~

$$\boxed{\alpha_R = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$

μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεων
(maximum transfer percentage)

$\Delta\uparrow \Rightarrow \alpha_R\downarrow$ και $\nu_R\uparrow$ $(T_R\downarrow)$

$\Delta = 0 \Rightarrow \alpha_R = 1$ και $T_R = \frac{2\pi}{\Omega_R}$

$$\langle P_1(t)\rangle = \langle |C_1(t)|^2\rangle = \frac{\Omega_R^2 + 2\Delta^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}$$ μέση πιθανότητα παρουσίας στη στάθμη 1

$$\langle P_2(t)\rangle = \langle |C_2(t)|^2\rangle = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}$$ μέση πιθανότητα παρουσίας στη στάθμη 2

μέγιστος ρυθμός μεταβιβάσεως
(maximum transfer rate)

$$\boxed{\frac{A_R}{T_R} = \frac{\Omega_R^2\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{(\Omega_R^2+\Delta^2)\,2\pi} = \frac{\Omega_R^2}{2\pi\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}}$$

t_{2mean} := ο χρόνος, ο οποίος απαιτείται ώστε η $P_2(t)$ να πιάσει τη φορά την $\langle P_2(t)\rangle$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} - \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}\cdot\cos(2\lambda t_{2mean}) = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}$$

$$\Rightarrow \cos(2\lambda t_{2mean}) = 0 \Rightarrow 2\lambda t_{2mean} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t_{2mean} = \frac{\pi}{4\lambda}}$$

μέσος ρυθμός μεταβιβάσεως
(mean transfer rate)

$$\boxed{k := \frac{\langle |C_2(t)|^2\rangle}{t_{2mean}} = \frac{\Omega_R^2\, 4\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)\,\pi\, 2} = \frac{\Omega_R^2}{\pi\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 2\frac{A_R}{T_R}}$$

Ε

* όταν $|\Delta| \uparrow$ (δηλ απομακρυνόμαστε από το συντονισμό) $\Rightarrow$ $A_R \searrow$

$T_R \searrow$

δηλ το φαινόμενο γίνεται πιο μικρό και πιο γρήγορο

* όταν $\Omega_R << |\Delta|$ (μικρή διαταραχή σε σχέση με την απόλυτη τιμή του αποσυντονισμού)

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \sin^2\left(\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2} t\right)$$

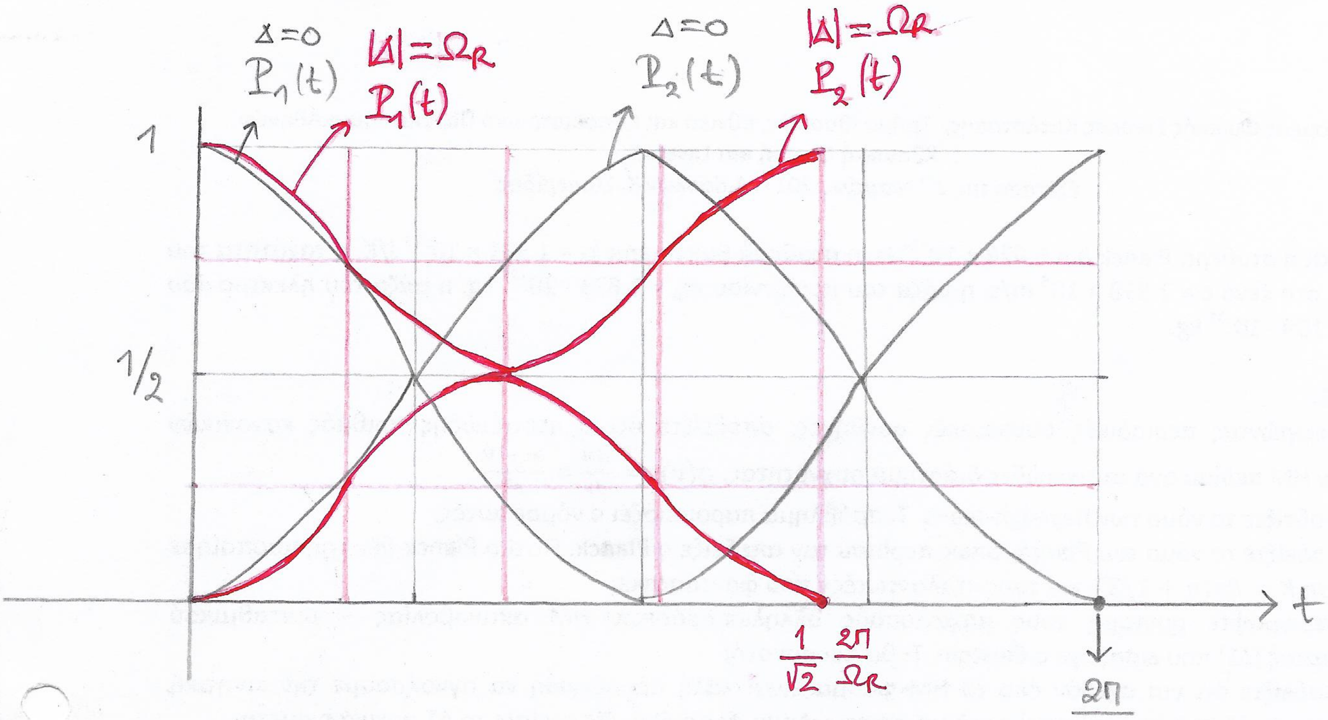
$$\approx \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2} \sin^2\left(\frac{|\Delta|}{2} t\right)$$

ή $$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} - \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot \cos\left(\cancel{2}\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{\cancel{2}} t\right)$$

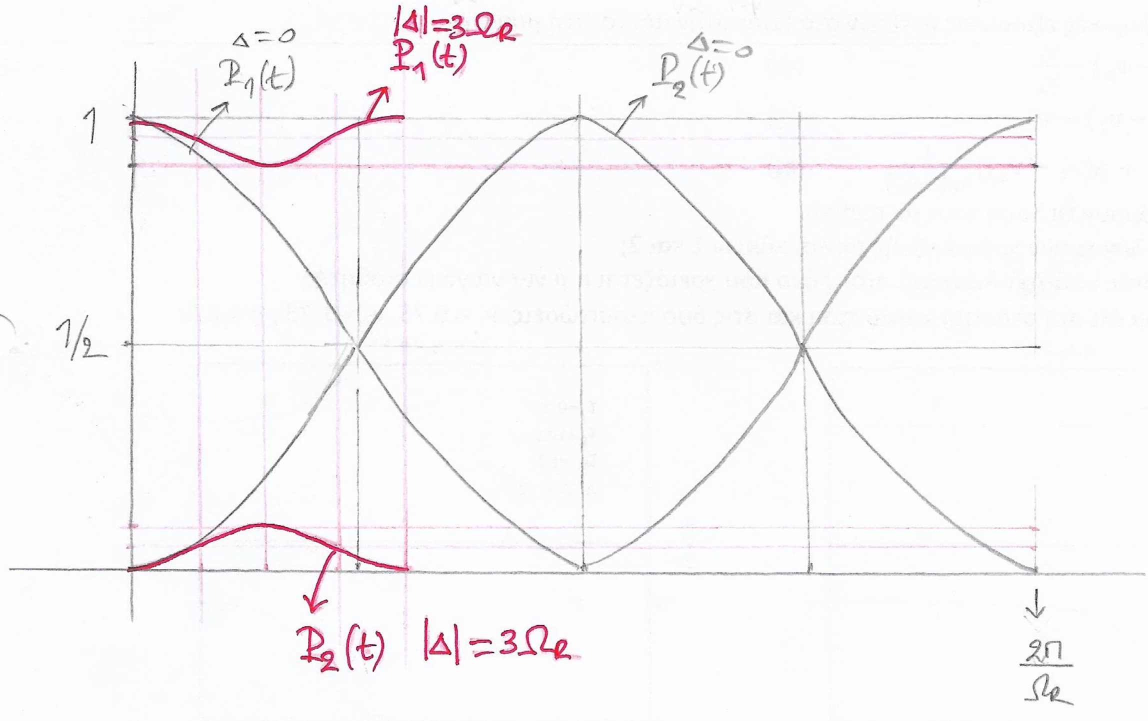
$$\approx \frac{\Omega_R^2}{2\Delta^2} - \frac{\Omega_R^2}{2\Delta^2} \cos(|\Delta| \cdot t)$$

$$\Rightarrow T_R \approx \frac{2\pi}{|\Delta|} \qquad A_R \approx \frac{\Omega_R^2}{\Delta^2}$$

$$\lim_{\Omega_R \to 0} T_R = \frac{2\pi}{|\Delta|} \qquad \lim_{\Omega_R \to 0} A_R = 0$$



ἀν π.χ. $|\Delta| = \Omega_R \Rightarrow \mathcal{A}_R = \frac{1}{2}$ ، $T_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\pi}{\Omega_R} \simeq 0.707\frac{2\pi}{\Omega_R}$



ἀν π.χ. $|\Delta| = 3\Omega_R \Rightarrow \mathcal{A}_R = \frac{1}{10}$ ، $T_R = \frac{2\pi}{\sqrt{10}\,\Omega_R} \simeq 0.316\frac{2\pi}{\Omega_R}$

ΑΣΚΗΣΗ

Να λυθεί το πρόβλημα $\Delta=0$ και αρχική συνθήκη

$$C_1(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}=C_2(0)$$

$$\Rightarrow |C_1(0)|^2=\frac{1}{2}=|C_2(0)|^2$$

Δηλ. το ηλεκτρόνιο βρίσκεται εξ ίσου στις δύο στάθμες τη χρονική στιγμή 0

ΛΥΣΗ

Είχαμε βρεί για $\Delta=0$

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \end{bmatrix}$$

με αρχική συνθήκη $C_1(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}=C_2(0) \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{c_1}{\sqrt{2}}+\frac{c_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1=c_1+c_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{c_1}{\sqrt{2}}-\frac{c_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1=c_1-c_2$$

$$2=2c_1 \Rightarrow c_1=1$$

$$c_2=0$$

Άρα

$$C_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} \Rightarrow |C_1(t)|^2=\frac{1}{2}=\text{σταθερό}$$

$$C_2(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} \Rightarrow |C_2(t)|^2=\frac{1}{2}=\text{σταθερό}$$

Δηλαδή δεν υπάρχει ταλάντωση φορτίου...

ΑΣΚΗΣΗ

Να λυθεί το πρόβλημα $\Delta=0$ με αρχική συνθήκη $C_1(0)=0$, $C_2(0)=1$

δηλ. το ηλεκτρόνιο βρίσκεται αρχικώς στην ΑΝΩ ΣΤΑΘΜΗ

ΛΥΣΗ

Είχαμε βρεί για $\Delta=0$

$$C_1(t) = \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t}$$

$$C_2(t) = \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t}$$

με αρχική συνθήκη $C_1(0)=0, \ C_2(0)=1 \Rightarrow$

$$0 = \frac{c_1+c_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow c_2 = -c_1 := -c$$

$$1 = \frac{c_1-c_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} = c+c \Rightarrow 2c=\sqrt{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Άρα $$C_1(t) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} - \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} = i\sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$$

$$C_2(t) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} = \frac{1}{2}2\cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) = \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$$

$$\hat H = \hat H_0 + U_{\mathcal E}(\vec r,t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec r,t)}{\partial t} = \hat H\, \Psi(\vec r,t)$$

αρχ. συν. $\Psi(\vec r,0) = \Phi(\vec r)$ = γνωστή

$$\Phi(\vec r) = \sum_k f_k \Phi_k(\vec r)$$

$$\Psi(\vec r,t) = \sum_k C_k e^{-i\Omega_k t}\Phi_k(\vec r)$$

$$\hat H_0 \Phi_k(\vec r) = E_k \Phi_k(\vec r)$$

$$E_k = \hbar\Omega_k$$

$$\Downarrow$$

$$\dot C_{k'}(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_k C_k(t)\, e^{i(\Omega_{k'}-\Omega_k)t}\, U_{\mathcal E k'k}(t)$$

όπου $U_{\mathcal E k'k}(t) = \int d^3r\, \Phi^*_{k'}(\vec r)\, U_{\mathcal E}(\vec r,t)\, \Phi_k(\vec r) = \langle \Phi_{k'} | U_{\mathcal E}(\vec r,t) | \Phi_k \rangle$

$$U_{\mathcal E k'k}(t) = \begin{cases} \wp \mathcal E_0 \cos\omega t, & k \neq k' \\ 0, & k = k' \end{cases}$$

$\wp = \wp_{z12} = -e z_{12} = -e z_{21} = \wp_{z21}$ για $\Phi_k(\vec r)$ πραγματικές

$\vec{\mathcal E}(t) = \mathcal E_0 \hat z \cos\omega t$ μετά από προσέγγιση δίπολου $|\vec r| \sim a_0 \ll \lambda$ για οπτικό μήκος κύματος

συχνοτική απόσταση ΗΜ πεδίου – ΔΣ

$\Delta := \omega - \Omega$

detuning

αποσυντονισμός

@ΔΣ

$$\Omega := \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

RWA

γρήγοροι — διώξαμε όρους $e^{\pm i(\omega+\Omega)t}$

αργοί — κρατήσαμε όρους $e^{\pm i(\omega-\Omega)t}$

$\Omega_R = \frac{\wp \mathcal E_0}{\hbar}$ συχνότητα Rabi

ισχύς διαταραχής

$$\Downarrow$$

$$\dot C_1(t) = \frac{i}{2}\Omega_R e^{i\Delta t} C_2(t)$$

$$\dot C_2(t) = \frac{i}{2}\Omega_R e^{-i\Delta t} C_1(t)$$

χρονικώς εξαρτώμενοι συντελεστές

(Μ)
$$\begin{cases} C_1(t) = \mathcal C_1(t)\, e^{i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t) = \mathcal C_2(t)\, e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathcal C}_1(t) \\ \dot{\mathcal C}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2} \\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal C_1(t) \\ \mathcal C_2(t) \end{bmatrix}$$

χρονικώς ανεξάρτητοι συντελεστές

$$\dot{\vec x}(t) = \tilde A\, \vec x(t)$$

ΔΛΜ $\vec x(t) = \vec u\, e^{\tilde\lambda t}$

$$\tilde A \vec u = \tilde\lambda \vec u$$

ή $A\vec u = \lambda \vec u$ $\quad \tilde A = -iA$, $\tilde\lambda = -i\lambda$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}$$

γενική λύση $\vec x(t) = \sum_k c_k \vec u_k e^{-i\lambda_k t}$

$A\vec{u} = \lambda \vec{u}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2}-\lambda & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det = 0 \Rightarrow \lambda_{2,1} = \pm \frac{\sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}}{2}$$

$\lambda_{2,1} = \pm \frac{\Omega_R}{2}$ στην περίπτωση συντονισμού ($\Delta = 0$)

Θα χρησιμοποιήσουμε αρχικές συνθήκες $C_1(0) = 1,\ C_2(0) = 0$ $\left(\overline{\bullet}^{\,t=0}\right)$

$$\Downarrow$$

$$C_1(0) = 1,\ C_2(0) = 0$$

ΛΥΣΗ για $\Delta = 0$

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -\frac{\Omega_R}{2}$$

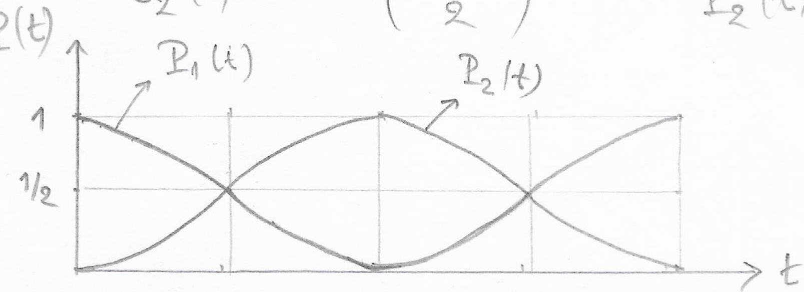
$$\vec{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = \frac{\Omega_R}{2}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{2} c_k \vec{v}_k e^{-i\lambda_k t} = \frac{c_1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{+i\frac{\Omega_R}{2}t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t}$$

αρχ. συν.
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{c_1 - c_2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow C_1(t) = \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \qquad \Rightarrow P_1(t) = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t)$$

$$C_2(t) = i \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \qquad P_2(t) = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t)$$



$T = \frac{2\pi}{\Omega_R}$ περίοδος

$A = 1$ πλάτος

● ΛΥΣΗ για $\Delta \neq 0$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} \\[2ex] \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2} := -\lambda < 0$$

$$a = \frac{\dfrac{\Delta}{2} + \dfrac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}{\dfrac{\Omega_R}{2}}$$

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+a'^2}} \\[2ex] \dfrac{a'}{\sqrt{1+a'^2}} \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = +\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2} := \lambda > 0$$

$$a' = \frac{\dfrac{\Delta}{2} - \dfrac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}{\dfrac{\Omega_R}{2}}$$

© ΒΙΒΛΙΟ

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$P_1(t) = |C_1(t)|^2 = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \sin^2(\lambda t) \qquad \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \sin^2(\lambda t) \qquad \sin^2 x = 1 - \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

$$P_1(t) = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\lambda t)}{2}\right) = \frac{\Omega_R^2 + 2\Delta^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} + \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cos(2\lambda t)$$

$$P_2(t) = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\lambda t)}{2}\right) = \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} - \frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)} \cdot \cos(2\lambda t)$$

ΝΑ ΔΙΟΡΘΩΘΕΙ ~~πλάτος~~ 4 ΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ SOS

$$A = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}$$

μέγιστο ποσοστό μεταβίβασης
maximum transfer percentage

για $\Delta = 0 \Rightarrow A = 1$

περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{2\pi}{2\dfrac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_R}$$

όπως αναμένεται

maximum transfer rate

$$:=\frac{A}{T}=\frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}\,\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2\pi}=\frac{\Omega_R^2}{2\pi\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}$$

ορισμός

t_{2mean} —

ο απαιτούμενος χρόνος

για να πιάσει τη μέση τιμή

$$|C_2(t)|^2=\frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}\sin^2(\lambda t)=$$

$$=\frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}-\frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}\cdot\cos(2\lambda t)\Rightarrow$$

$$\frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}=\frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}-\frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}\cdot\cos(2\lambda t_{2mean})$$

$$\langle|C_2(t)|^2\rangle=\frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}$$

$$\Rightarrow \cos(2\lambda t_{2mean})=0\Rightarrow 2\lambda t_{2mean}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow t_{2mean}=\frac{\pi}{4\lambda}=\frac{2\pi}{4\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$

mean transfer rate

$$k:=\frac{\langle|C_2(t)|^2\rangle}{t_{2mean}}=\frac{\Omega_R^2}{2(\Omega_R^2+\Delta^2)}\,\frac{4\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2\pi}=\frac{\Omega_R^2}{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}\cdot\pi}$$

$$\frac{k}{\frac{A}{T}}=2\Rightarrow k=2\frac{A}{T}$$

ίδιο με 3'

$$P_1(t) = |C_1(t)|^2 = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}\sin^2(\lambda t) \qquad \lambda = \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}$$

$$P_2(t) = |C_2(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}\sin^2(\lambda t)$$

$$\sin^2(\lambda t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\lambda t)}{2} \qquad A = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}$$

$$\langle |C_1(t)|^2 \rangle = 1 - \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}\,\frac{1}{2} \qquad T = \frac{2\pi}{2\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$

$$\langle |C_2(t)|^2 \rangle = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\langle |C_1(t)|^2 \rangle + \langle |C_2(t)|^2 \rangle = 1$$

αν $\Delta = 0 \Rightarrow \langle |C_1(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} = \langle |C_2(t)|^2 \rangle$

αλλά για $\Delta \neq 0$ οι πιθανότητες δεν είναι ίσες

π.χ. με $\Delta = \sqrt{3}\,\Omega_R$

$$\langle |C_1(t)|^2 \rangle = 1 - \frac{\cancel{\Omega_R^2}}{4\cancel{\Omega_R^2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

$$\langle |C_2(t)|^2 \rangle = \frac{\cancel{\Omega_R^2}}{4\cancel{\Omega_R^2}}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

pure maximum transfer rate $:= \frac{A}{T} = \frac{\Omega_R^2}{(\Omega_R^2+\Delta^2)}\,\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2\pi} = \frac{\Omega_R^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}$

$t_{2mean} \overset{\text{ορισμός}}{\Rightarrow} \frac{\cancel{\Omega_R^2}}{\cancel{\Omega_R^2+\Delta^2}}\,\frac{1}{2} = \frac{\cancel{\Omega_R^2}}{\cancel{\Omega_R^2+\Delta^2}}\sin^2(\lambda t_{2mean}) \Rightarrow \sin^2(\lambda t_{2mean}) = \frac{1}{2}$

$$\sin(\lambda t_{2mean}) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lambda t_{2mean} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}\cdot t_{2mean} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_{2mean} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$

pure mean transfer rate

ίδιο με 3'

$$k := \frac{\langle |c_2(t)|^2 \rangle}{t_{2mean}} = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2+\Delta^2} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{\pi} = \frac{\Omega_R^2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}$$

$$k = 2\frac{A}{T}$$