ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ της αλληλεπιδράσεως
ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ — ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ

Στην ημικλασική προσέγγιση για το ΗΜ πεδίο χρησιμοποιούσαμε τη γλώσσα των ανυσματικών μεγεθών $\vec{E}, \vec{B}$.
Υποθέσαμε το πλάτος του $\vec{E}$ (και του $\vec{B}$) σταθερό:
η απορρόφηση ή η εκπομπή να μην επηρεάζει το πλάτος του πεδίου.
Για να ισχύει κάτι τέτοιο θα πρέπει η ΗΜ ακτινοβολία να είναι πυκνή.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων

Πρέπει να βρεθεί μια έκφραση της Χαμιλτονιανής του ΗΜ πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων αντί της γλώσσας των $\vec{E}, \vec{B}$.

χρειαζόμαστε $\longrightarrow$ $\hat{H}_{HM}$, $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$, $\hat{H}_{\Delta\Sigma - HM}$

ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΣΠΙΝΟΡΕΣ

Σπίνορας (spinor) Σπίνωρ = διάνυσμα στήλη

για ΔΣ έχει 2 συνιστώσες $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

για ΤΣ έχει 3 συνιστώσες $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

ορισμοί

$|\,\rangle = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ απουσία ηλεκτρονίου στο ΔΣ ενέργεια μηδενική

$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$ ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη ενέργεια E_1

$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle$ ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη ενέργεια E_2

$A^\dagger$ ερμιτιανός συζυγής or Hermitian conjugate
conjugate transpose or Hermitian transpose
$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}$ † dagger στιλέτο

$E_2 - E_1 := \hbar\Omega$

$\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{S}_+^\dagger = \hat{S}_-$

$\hat{S}_+|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ καμία δράση $\hat{S}_+|0\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_+|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle$ το ανέβασε $\hat{S}_+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$

$\hat{S}_+|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ το πετά έξω $\hat{S}_+|\uparrow\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ καμία δράση $\hat{S}_-|0\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ το πετά έξω $\hat{S}_-|1\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$ το κατέβασε $\hat{S}_-|2\rangle = |1\rangle$

$\hat{S}_+$ τελεστής αναβιβάσεως raising operator

$\hat{S}_-$ τελεστής καταβιβάσεως lowering operator πίνακες Pauli — και σχέσεις τους με τους $\hat{S}_+, \hat{S}_-$

$$\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

- $[\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y]=2i\hat{\sigma}_z$ καθώς και οι κυκλικές εναλλαγές τῶν

π.χ. $$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}=2i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

- $\hat{\sigma}_x^2=\hat{\sigma}_y^2=\hat{\sigma}_z^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\hat{I}$

- $\{\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y\}=\{\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z\}=\{\hat{\sigma}_z,\hat{\sigma}_x\}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\hat{0}$

Δηλαδή οι πίνακες Pauli αντιμετατίθενται.

π.χ. $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y+\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x=\hat{0}\Rightarrow\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y=-\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x$

$\hat{\sigma}_y\cdot\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_z\cdot\hat{\sigma}_y=\hat{0}\Rightarrow\hat{\sigma}_y\cdot\hat{\sigma}_z=-\hat{\sigma}_z\cdot\hat{\sigma}_y$

$\hat{\sigma}_z\cdot\hat{\sigma}_x+\hat{\sigma}_x\cdot\hat{\sigma}_z=\hat{0}\Rightarrow\hat{\sigma}_z\cdot\hat{\sigma}_x=-\hat{\sigma}_x\cdot\hat{\sigma}_z$

π.χ. $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$

$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$

- $\hat{S}_+\hat{S}_-=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\hat{S}_-\hat{S}_+=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\hat{S}_+\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_+=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\hat{I}$ ή $\{\hat{S}_+,\hat{S}_-\}=\hat{I}$

$\hat{S}_+\hat{S}_--\hat{S}_-\hat{S}_+=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\hat{\sigma}_z$ ή $[\hat{S}_+,\hat{S}_-]=\hat{\sigma}_z$

$\hat{S}_++\hat{S}_-=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\hat{\sigma}_x$

$\hat{S}_+-\hat{S}_-=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}=i\hat{\sigma}_y$

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{S}_+ \hat{S}_- &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_- \hat{S}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{... μόλις τα είπαμε...}$$

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{I}}$$

Μπορούμε να το γράψουμε και στη μορφή $\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{\mathbb{I}}$

$\{A, B\} = AB + BA$ άγκιστρο Poisson ή αντιμεταθέτης
anticommutator

$[A, B] = AB - BA$ μεταθέτης commutator

όταν $\{A, B\} = 0 \Rightarrow AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA$
αντιμεταθετική ιδιότητα
anticommutative property

όταν $[A, B] = 0 \Rightarrow AB - BA = 0 \Rightarrow AB = BA$
μεταθετική ιδιότητα
commutative property

<u>Οι τελεστές καταστροφής - δημιουργίας / καταβιβάσεως - αναβιβάσεως</u>

σχέσεις αντιμεταθέσεως ακολουθούν των φερμιονίων π.χ. τα ηλεκτρόνια
anticommutative relations fermions electrons

σχέσεις μεταθέσεως ακολουθούν των μποζονίων π.χ. τα φωτόνια
commutative relations bosons photons

Ἡ Χαμιλτονιανή τοῦ ΔΣ εἶναι

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+ = E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$$

ἀφοῦ

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ιδιοάνυσμα}} = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{E_2}_{\text{ιδιοτιμή}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ιδιοάνυσμα}}$$

$E_2 = E_1 + \hbar\Omega$

E_1

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ιδιοάνυσμα}} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \end{pmatrix} = \underbrace{E_1}_{\text{ιδιοτιμή}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ιδιοάνυσμα}}$$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+$$

Ἄν θέσουμε $E_1 = 0 \Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$ γίνεται

$E_2 = \hbar\Omega$

E_1 μηδέν

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-$$

Ἄν θέσουμε

E_2

μηδέν

E_1

$E_2 = +\frac{\hbar\Omega}{2}$ $\quad E_1 = -\frac{\hbar\Omega}{2}$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_+ \hat{S}_- - \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_- \hat{S}_+ = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{\sigma}_z$ ἡ μορφή τοῦ $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$ στο ἄρθρο τῶν Jaynes - Cummings

Ὁ τελεστής $\hat{S}_+\hat{S}_-$ μετρᾶ τον ἀριθμό τῶν ἠλεκτρονίων στην ΑΝΩ ΣΤΑΘΜΗ

ἀφοῦ

$$\hat{S}_+\hat{S}_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{S}_+\hat{S}_-|\uparrow\rangle=1|\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \hat{S}_-\hat{S}_+|\downarrow\rangle=0|\downarrow\rangle$$

Ὁ τελεστής $\hat{S}_-\hat{S}_+$ μετρᾶ τον ἀριθμό τῶν ἠλεκτρονίων στην ΚΑΤΩ ΣΤΑΘΜΗ

ἀφοῦ

$$\hat{S}_-\hat{S}_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{S}_-\hat{S}_+|\uparrow\rangle=0|\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \hat{S}_-\hat{S}_+|\downarrow\rangle=1|\downarrow\rangle$$

<u>ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

$$\left(\hat{S}_+\right)^\dagger=\hat{S}_-$$

$$\{\hat{S}_+,\hat{S}_+^\dagger\}=\{\hat{S}_+,\hat{S}_-\}=\hat{S}_+\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_+=\hat{\mathbb{I}}$$

$$\{\hat{S}_-,\hat{S}_-^\dagger\}=\{\hat{S}_-,\hat{S}_+\}=\hat{S}_-\hat{S}_++\hat{S}_+\hat{S}_-=\hat{\mathbb{I}}$$

$$\{\hat{S}_+,\hat{S}_+\}=\hat{S}_+\hat{S}_++\hat{S}_+\hat{S}_+=2\hat{S}_+\hat{S}_+=2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}:=\hat{O}$$

$$\{\hat{S}_-,\hat{S}_-\}=\hat{S}_-\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_-=2\hat{S}_-\hat{S}_-$$

$$=2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\hat{O}$$

Ὁ $\hat{S}_+$ εἶναι <u>τελεστὴς ἀναβιβάσεως</u> (raising operator)
διότι ἀναβιβάζει τὴν ἐνέργεια
δημιουργώντας ἠλεκτρόνια ἐνέργειας $\hbar\Omega$
ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία
<u>τελεστὴς δημιουργίας</u> (creation operator).

Ὁ $\hat{S}_-$ εἶναι <u>τελεστὴς καταβιβάσεως</u> (lowering operator)
διότι καταβιβάζει τὴν ἐνέργεια
καταστρέφοντας ἠλεκτρόνια μὲ ἐνέργεια $\hbar\Omega$
ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία
<u>τελεστὴς καταστροφῆς</u> (annihilation operator)

Ἐπειδὴ τα ἠλεκτρόνια εἶναι φερμιόνια,
ἰσχύει ἡ ἀπαγορευτικὴ ἀρχὴ τοῦ Pauli
δηλ μποροῦμε να ἔχουμε μόνο ἕνα ἠλεκτρόνιο μὲ ἐνέργεια $\hbar\Omega$
(ἀγνοοῦμε το spin σε ὅλο αὐτό το μάθημα)

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΦΕΡΜΙΟΝΙΩΝ π.χ. ἠλεκτρονίων

$\hat{a}_i$ τελεστής καταστροφής φερμιονίου στην κατάσταση i

$\hat{a}_i^{\dagger}$ τελεστής δημιουργίας φερμιονίου στην κατάσταση i

Για τα φερμιόνια ἰσχύουν οἱ σχέσεις ἀντιμεταθέσεως

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}\} = \delta_{ij}$$

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^{\dagger}, \hat{a}_j^{\dagger}\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^{\dagger}, \hat{a}_j^{\dagger}\} = 0 \Rightarrow \{\hat{a}_r^{\dagger}, \hat{a}_r^{\dagger}\} = 0 \Rightarrow 2\,\hat{a}_r^{\dagger}\hat{a}_r^{\dagger} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{a}_r^{\dagger}\hat{a}_r^{\dagger} = 0}}$$

Το ὁποῖο σημαίνει ὅτι <u>δεν</u> μπορούμε να βάλουμε δύο φερμιόνια στην ἴδια κατάσταση, το ὁποῖο εἶναι ἡ ἀπαγορευτική ἀρχή Pauli.

συχνά καλεῖται τελεστής δημιουργίας στη Κβ. Μηχ.
creation operator

<u>Τελεστής ἀναβιβάσεως</u>
<u>raising operator</u>
<u>lowering operator</u>
<u>Τελεστής καταβιβάσεως</u>

} <u>ladder operators</u>
Τελεστές κλίμακας

<u>γραμμική ἄλγεβρα</u>
<u>linear algebra</u>

συχνά καλεῖται τελεστής καταστροφής στη Κβαντ. Μηχ.
annihilation operator

Σε πολλές περιοχές της φυσικής και της χημείας, ἡ χρήση αὐτῶν τῶν τελεστών ἀντὶ κυματοσυναρτήσεων λέγεται <u>δεύτερη κβάντωση</u>
second quantization

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{πάνω} \downarrow \text{κάτω} \qquad \text{αριστερά} \longrightarrow \text{δεξιά} \quad \langle x| = (\alpha^* \ \ \beta^*)$$

ΔΣ

8

στοιχειώδεις διεγέρσεις από τη θεμελιώδη κατάσταση

elementary excitations from ground state

$$|\downarrow\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \langle\downarrow| = \langle 1| = (0 \ \ 1)$$

$$\langle\downarrow|\downarrow\rangle = (0 \ \ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$|\uparrow\rangle = |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \langle\uparrow| = \langle 2| = (1 \ \ 0)$$

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = (1 \ \ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

μετά

$$\hat{a}^{+}_{12} := |\uparrow\rangle\langle\downarrow| = |2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0 \ \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_+$$

$2\times1 \quad 1\times2$

πρώτα

$$\hat{a}_{12} := |\downarrow\rangle\langle\uparrow| = |1\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \ \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_-$$

$2\times1 \quad 1\times2$

Άρα η Χαμιλτονιανή $\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-$ γράφεται

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\,\hat{a}^{+}_{12}\hat{a}_{12} = \hbar\Omega\,|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow| = \hbar\Omega\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$= \hbar\Omega\,|2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2| = \hbar\Omega\,|2\rangle\langle 2|$$

$$= \hbar\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0 \ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \ 0) = \hbar\Omega\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε τις εναλλακτικές γραφές $= \hbar\Omega\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- = \hbar\Omega\,\hat{a}^{+}_{12}\hat{a}_{12} = \hbar\Omega|\uparrow\rangle\langle\uparrow| = \hbar\Omega|2\rangle\langle 2|$$

$$= \hbar\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1 \ \ 0) = \hbar\Omega\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Γενικώς: $\boxed{\hat{a}_{\mu\nu} := |\mu\rangle\langle\nu| \iff \hat{a}^{+}_{\mu\nu} = |\nu\rangle\langle\mu|}$

$$\hat{a}_{12}^{+}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}\underset{1\times 2}{\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$

$$\hat{a}_{12}^{+}|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$

$$\hat{a}_{12}^{+}|0\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$

$$\hat{a}_{12}|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \ldots = |\downarrow\rangle$$

$$\hat{a}_{12}|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \ldots = |0\rangle$$

$$\hat{a}_{12}|0\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|0\rangle = \ldots = |0\rangle$$

Παρομοίως θα γράφαμε

$$\hat{a}_{21} := |2\rangle\langle 1| = \hat{a}_{12}^{+}$$

$$\hat{a}_{21}^{+} := |1\rangle\langle 2| = \hat{a}_{12}$$

ΤΣ

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longrightarrow \langle x| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* & \gamma^* \end{pmatrix}$$

Γενικώς:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}_{\mu\nu} &= |\mu\rangle\langle\nu| \\ \hat{a}^{+}_{\mu\nu} &= |\nu\rangle\langle\mu| \end{aligned}}$$

$$\hat{a}^{+}_{12} := |2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12} := |1\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13} := |3\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13} := |1\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{12}|1\rangle = |2\rangle\langle 1|1\rangle = |2\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}|2\rangle = |1\rangle\langle 2|2\rangle = |1\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13}|1\rangle = |3\rangle\langle 1|1\rangle = |3\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}|3\rangle = |1\rangle\langle 3|3\rangle = |1\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13}|3\rangle = |3\rangle\langle 1|3\rangle = |0\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}^{\dagger}|3\rangle = |2\rangle\langle 1|3\rangle = |2\rangle \cdot 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}|3\rangle = |1\rangle\langle 2|3\rangle = |1\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}^{\dagger}|2\rangle = |3\rangle\langle 1|2\rangle = |3\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}|2\rangle = |1\rangle\langle 3|2\rangle = |1\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_{TI} = \hbar\Omega_{12}\,\hat{a}_{12}^{\dagger}\,\hat{a}_{12} + \hbar\Omega_{13}\,\hat{a}_{13}^{\dagger}\,\hat{a}_{13}$$

$$= \hbar\Omega_{12}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} + \hbar\Omega_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$= \hbar\Omega_{12}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \hbar\Omega_{13}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\hbar\Omega_{13}&0&0\\0&\hbar\Omega_{12}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_{TI} = \hbar\Omega_{12}|2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2| + \hbar\Omega_{13}|3\rangle\langle 1|1\rangle\langle 3|$$

$$= \hbar\Omega_{12}|2\rangle\langle 2| + \hbar\Omega_{13}|3\rangle\langle 3|$$

$$\hat{a}_{23} = |2\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(1\;0\;0) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{a}_{23}|3\rangle = |2\rangle$$

$$\hat{a}_{23}^{\dagger} = |3\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(0\;1\;0) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{a}_{23}^{\dagger}|2\rangle = |3\rangle$$

$$\hat{a}_{21} = |2\rangle\langle 1| = \hat{a}_{12}^{\dagger} \qquad \hat{a}_{31} = |3\rangle\langle 1| = \hat{a}_{13}^{\dagger}$$

$$\hat{a}_{21}^{\dagger} = |1\rangle\langle 2| = \hat{a}_{12} \qquad \hat{a}_{31}^{\dagger} = |1\rangle\langle 3| = \hat{a}_{13}$$

$$\hat{a}_{32} = |3\rangle\langle 2| = \hat{a}_{23}^{\dagger}$$

$$\hat{a}_{32}^{\dagger} = |2\rangle\langle 3| = \hat{a}_{23}$$