$$E_m = \frac{M_m \omega_m^2}{2} q_m^2 + \frac{M_m}{2} \dot{q}_m^2 = \frac{M_m \omega_m^2}{2} q_m^2 + \frac{P_m^2}{2M_m}$$ ενέργεια m τρόπου

q_m γεν. θέση

$\dot{q}_m$ γεν. ταχύτητα

P_m γεν. ορμή

$$\boxed{\hat{H}_{HM,m} = \frac{M_m \omega_m^2}{2} \hat{q}_m^2 + \frac{\hat{P}_m^2}{2M_m}}$$ Χαμιλτονιανή m τρόπου

$$\boxed{E_{m,n_m} = \hbar \omega_m \left(n_m + \frac{1}{2}\right)}$$ Ιδιοενέργειες m τρόπου

$m \in \mathbb{N}^*$ $\qquad n_m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\hat{q}_m = q_m} \qquad \boxed{\hat{P}_m = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_m}} \qquad \boxed{[\hat{q}_m, \hat{P}_m] = i\hbar}$$

Εισάγουμε τους τελεστές

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m \hbar \omega_m}} \left(M_m \omega_m q_m + i \hat{P}_m\right)$$ "καταστροφής"

$$\hat{a}_m^{+} = \frac{1}{\sqrt{2M_m \hbar \omega_m}} \left(M_m \omega_m \hat{q}_m - i \hat{P}_m\right)$$ "δημιουργίας"

Ισχύει η ιδιότητα

$$\boxed{[\hat{a}_m, \hat{a}_m^{+}] = \hat{a}_m \hat{a}_m^{+} - \hat{a}_m^{+} \hat{a}_m = 1}$$

Απόδ.

$$[\hat{a}, \hat{a}^{+}] = \hat{a}\hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{a} = \frac{1}{2M\hbar\omega}(M\omega\hat{q} + i\hat{p})(M\omega\hat{q} - i\hat{p})$$

$$- \frac{1}{2M\hbar\omega}(M\omega\hat{q} - i\hat{p})(M\omega\hat{q} + i\hat{p}) =$$

$$= \frac{1}{2M\hbar\omega}\Big(\cancel{M^2\omega^2\hat{q}^2} + \cancel{\hat{p}^2} - M\omega\hat{q}i\hat{p} + i\hat{p}M\omega\hat{q} - \cancel{M^2\omega^2\hat{q}^2} - \cancel{\hat{p}^2}$$
$$- M\omega\hat{q}i\hat{p} + i\hat{p}M\omega\hat{q}\Big)$$

(β)

$$= \frac{1}{2M\hbar\omega}\left(-2M\omega i\,\hat{q}\hat{p} + 2i\hat{p}M\omega\hat{q}\right) = \frac{1}{\hbar}\left(-i\hat{q}\hat{p} + i\hat{p}\hat{q}\right)$$

$$= \frac{1}{\hbar}(-i)\left(\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}\right) = \frac{-i}{\hbar}[\hat{q},\hat{p}] = \frac{-i}{\hbar}i\hbar = 1 \Rightarrow [\hat{a},\hat{a}^{+}] = 1$$

$$\hat{a}_m^{+} + \hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}\,2M_m\omega_m\hat{q}_m = \sqrt{\frac{2M_m\omega_m}{\hbar}}\,\hat{q}_m \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{q}_m = \sqrt{\frac{\hbar}{2M_m\omega_m}}\left(\hat{a}_m^{+} + \hat{a}_m\right)}$$

$$\hat{a}_m^{+} - \hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}(-2i)\hat{p}_m = (-i)\sqrt{\frac{2}{M_m\hbar\omega_m}}\,\hat{p}_m \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{p}_m = i\sqrt{\frac{M_m\hbar\omega_m}{2}}\left(\hat{a}_m^{+} - \hat{a}_m\right)}$$

APA

$$\hat{H}_{HM,m} = \frac{M_m\omega_m^2}{2}\hat{q}_m^2 + \frac{\hat{p}_m^2}{2M_m} = \frac{\cancel{M_m}\omega_m^{\cancel{2}}}{2}\,\frac{\hbar}{2\cancel{M_m}\cancel{\omega_m}}\left(\hat{a}_m^{+} + \hat{a}_m\right)\left(\hat{a}_m^{+} + \hat{a}_m\right)$$

$$+ \frac{1}{2\cancel{M_m}}(-1)\frac{\cancel{M_m}\hbar\omega_m}{2}\left(\hat{a}_m^{+} - \hat{a}_m\right)\left(\hat{a}_m^{+} - \hat{a}_m\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega_m}{4}\left(\cancel{\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m^{+}} + \hat{a}_m^{+}\hat{a}_m + \hat{a}_m\hat{a}_m^{+} + \cancel{\hat{a}_m\hat{a}_m} - \cancel{\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m^{+}} + \hat{a}_m^{+}\hat{a}_m + \hat{a}_m\hat{a}_m^{+} - \cancel{\hat{a}_m\hat{a}_m}\right)$$

$$\hat{H}_{HM,m} = \frac{\hbar\omega_m}{4}\left(2\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m + 2\hat{a}_m\hat{a}_m^{+}\right) = \frac{\hbar\omega_m}{2}\left(\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m + \hat{a}_m\hat{a}_m^{+}\right)$$

Αλλά $[\hat{a}_m, \hat{a}_m^{+}] = \hat{a}_m\hat{a}_m^{+} - \hat{a}_m^{+}\hat{a}_m = 1 \Rightarrow \hat{a}_m\hat{a}_m^{+} = 1 + \hat{a}_m^{+}\hat{a}_m$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\hat{H}_{HM,m} = \frac{\hbar\omega_m}{2}\left(2\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m + 1\right) \Rightarrow \boxed{\hat{H}_{HM,m} = \hbar\omega_m\left(\hat{a}_m^{+}\hat{a}_m + \frac{1}{2}\right)}$$

όμως $\boxed{E_{m,n_m} = \hbar\omega_m\left(n_m + \frac{1}{2}\right)}$

Αν ονομάσουμε $|n_m\rangle$ την κατάσταση του ΗΜ πεδίου με n_m αριθμό φωτονίων στον ΗΜ τρόπο m

$$\hat{H}_{HM,m}|n_m\rangle = E_{m,n_m}|n_m\rangle$$

$$\hbar\omega_m\left(\hat{a}_m^+\hat{a}_m + \frac{1}{2}\right)|n_m\rangle = \hbar\omega_m\left(n_m + \frac{1}{2}\right)|n_m\rangle$$

$$\hat{a}_m^+\hat{a}_m|n_m\rangle = n_m|n_m\rangle$$

Άρα ο τελεστής $\hat{N}_m = \hat{a}_m^+\hat{a}_m$ μετρά τον αριθμό των φωτονίων στον ΗΜ τρόπο m.

$$[A+B, C] = [A,C] + [B,C]$$

$$[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B$$

$$\hat{H} = \kappa\hat{q}^2 + \lambda\hat{p}^2$$

$$\hat{a} = \mu\hat{q} + \nu\hat{p}$$

$$\hat{a}^+ = \mu\hat{q} - \nu\hat{p}$$

με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων
μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a} \qquad [\hat{H}, \hat{a}^+] = \hbar\omega\hat{a}^+$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - \hat{a}\hat{H}|n\rangle = -\hbar\omega\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - E_n\hat{a}|n\rangle = -\hbar\omega\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\hat{a}|n\rangle$$

$$\downarrow$$

ιδιοκατάσταση με ενέργεια
κατεβασμένη κατά ħω
(ένα φωτόνιο λιγότερο)

$$\hat{a}|n\rangle = \xi|n-1\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^+|n\rangle - \hat{a}^+\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\hat{a}^+|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^+|n\rangle - E_n\hat{a}^+|n\rangle = \hbar\omega\hat{a}^+|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^+|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\hat{a}^+|n\rangle$$

$$\downarrow$$

ιδιοκατάσταση με ενέργεια
ανεβασμένη κατά ħω
(ένα φωτόνιο περισσότερο)

$$\hat{a}^+|n\rangle = \rho|n+1\rangle$$

... πρέξεις

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega \hat{a}$$

$$[\hat{H}, \hat{a}]|n\rangle = -\hbar\omega \hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - \hat{a}\hat{H}|n\rangle = -\hbar\omega \hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - \hat{a}E_n|n\rangle = -\hbar\omega \hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\,\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\,\hat{a}|n\rangle$$

$\downarrow$

Ιδιοκατάσταση με ενέργεια κατεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο λιγότερο)

$$\hat{a}|n\rangle = \xi|n-1\rangle$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^+] = \hbar\omega \hat{a}^+$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^+]|n\rangle = \hbar\omega \hat{a}^+|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^+|n\rangle - \hat{a}^+\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \hat{a}^+|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^+|n\rangle - \hat{a}^+E_n|n\rangle = \hbar\omega \hat{a}^+|n\rangle$$

$$\hat{H}\,\hat{a}^+|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\,\hat{a}^+|n\rangle$$

$\downarrow$

Ιδιοκατάσταση με ενέργεια ανεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο περισσότερο)

$$\hat{a}^+|n\rangle = \rho\,|n+1\rangle$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= \xi|n-1\rangle \\ \langle n|\hat{a}^{+} &= \xi^{*}\langle n-1|\end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle n|a^{+}a|n\rangle = |\xi|^{2}\langle n-1|n-1\rangle \Rightarrow$$

$$n\langle n|n\rangle = |\xi|^{2}\langle n-1|n-1\rangle \Rightarrow |\xi|^{2} = n \Rightarrow \overset{\pi.\chi.}{\xi = \sqrt{n}}$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$[a,a^{+}] = 1 \Rightarrow aa^{+} = 1 + a^{+}a$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{a}^{+}|n\rangle &= \rho\,|n+1\rangle \\ \langle n|a &= \rho^{*}\langle n+1|\end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle n|aa^{+}|n\rangle = |\rho|^{2}\langle n+1|n+1\rangle$$

$$\langle n|\,(1+a^{+}a)\,|n\rangle = |\rho|^{2}\langle n+1|n+1\rangle$$

$$(1+n) = |\rho|^{2} \quad \Rightarrow \pi.\chi.\ \rho = \sqrt{n+1}$$

$$\hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\hat{a}_m^{+} |n_m\rangle = \sqrt{n_m+1}\, |n_m+1\rangle$$

$$\hat{a}_m |n_m\rangle = \sqrt{n_m}\, |n_m-1\rangle$$

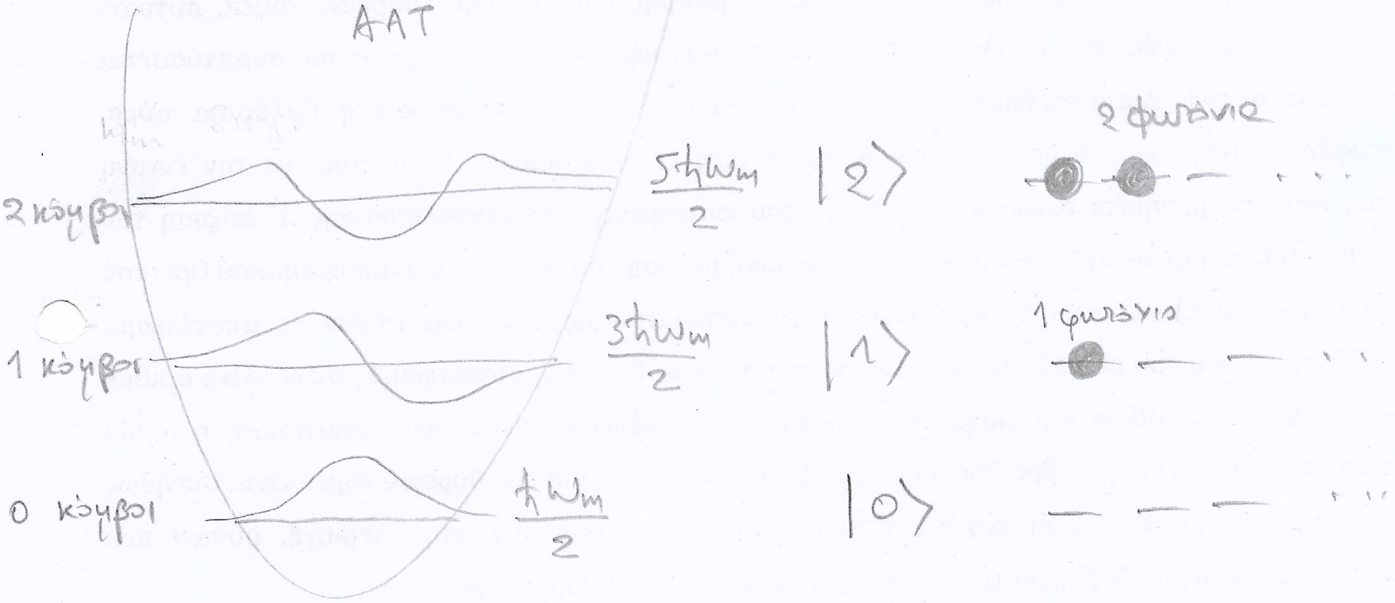
$$\hat{a}_m |0\rangle = 0$$

$$\langle n_m | l_m \rangle = \delta_{nl}$$

Η θεμελιώδης κατάσταση $|0\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί στο κενό κανένα σωματίδιο (φωτόνιο)

Η 1η διεγερμένη κατάσταση $|1\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{3\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί σε 1 σωμάτιο (φωτόνιο)

Η 2η διεγερμένη κατάσταση $|2\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{5\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί σε 2 σωμάτια (φωτόνια)



\# φωτονίων = \# κόμβων της ιδιοσυνάρτησης του ΑΑΤ

Με τη βοήθεια των τελεστών καταστροφής κ δημιουργίας μπορούμε να γράψουμε

$$\hat{E}_x^m(z,t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left(\hat{a}_m^{+} + \hat{a}_m\right)$$

$$\hat{B}_y^m(z,t) = \frac{i}{c}\left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left(\hat{a}_m^{+} - \hat{a}_m\right)$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΜΠΟΖΟΝΙΩΝ

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_\ell] = 0$$

$$[\hat{a}_m^{+}, \hat{a}_\ell^{+}] = 0$$

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_m^{+}] = 1$$