

5.8 Μορφή του TEM₀₀ και των TEM_{p'q'} ανώτερης τάξεως σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη και σε κυλινδρική κοιλότητα.

Συχνά στην ονοματολογία χρησιμοποιούνται αντί των δεικτών p, q οι δείκτες p', q' οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

Σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα οι δείκτες στο TEM_{p'q'} σημαίνουν:

$p' = 0$ αριθμός κόμβων κατά μήκος του άξονα x .

$q' = 0$ αριθμός κόμβων κατά μήκος του άξονα y .

Επί παραδείγματι, TEM₀₂ σημαίνει κανέναν κόμβο κατά μήκος του άξονα x και δύο κόμβους κατά μήκος του άξονα y . Η ένταση ΗΜ ακτινοβολίας του TEM_{p'q'} τρόπου σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι [39]

$$I_{p'q'}(x, y) = I_0 \left[H_{p'} \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) e^{-\frac{x^2}{w^2}} \right]^2 \left[H_{q'} \left(\frac{\sqrt{2}y}{w} \right) e^{-\frac{y^2}{w^2}} \right]^2 \quad (5.84)$$

Αριστερά στον Πίνακα 5.2 φαίνονται τα πολυώνυμα Hermite $H_n(x)$ που εμπλέκονται στην Εξ. 5.84, ενώ w είναι το FWHM μέγεθος της κηλίδας (spot size) του θεμελιώδους τρόπου TEM₀₀. Η μορφή των TEM που προκύπτει από την Εξ. 5.84 παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.12, αριστερά. Οι τρόποι ανώτερης τάξεως έχουν μεγαλύτερη χωρική έκταση. Οπότε, με χρήση μιας οπής (aperture) που παρεμβάλλεται στην έξοδο του laser μπορούμε να κόψουμε εκείνους τους τρόπους που έχουν μεγαλύτερη από την επιθυμητή έκταση. Γενικώς, η συνολική μορφή της εντάσεως ακτινοβολίας οφείλεται στην υπέρθεση όλων των τρόπων της κοιλότητας, παρόλο που συχνά είναι επιθυμητό να λειτουργούμε μόνο στον θεμελιώδη τρόπο.

Σε κυλινδρική κοιλότητα οι δείκτες στο TEM_{p'q'} σημαίνουν:

$p' = 0$ αριθμός κόμβων ακτινικά.

$q' = 0$ αριθμός κόμβων κατά μήκος μισής περιφέρειας, δηλαδή γωνιακά σε γωνία π .

Επί παραδείγματι, TEM₀₂ σημαίνει κανέναν κόμβο ακτινικά και δύο κατά μήκος μισής περιφέρειας, δηλαδή γωνιακά σε γωνία π . Η ένταση ΗΜ ακτινοβολίας του TEM_{p'q'} τρόπου σε πολικές συντεταγμένες (r, φ) είναι [39]

$$I_{p'q'}(\rho, \varphi) = I_0 \rho^{q'} \left[L_{p'}^{q'}(\rho) \right]^2 \cos^2(q'\varphi) e^{-\rho} \quad (5.85)$$

όπου $\rho = 2r^2/w^2$, w είναι το FWHM μέγεθος κηλίδας του θεμελιώδους τρόπου TEM₀₀ ο οποίος συμπίπτει με τον TEM₀₀ της ορθογώνιας παραλληλεπίπεδης κοιλότητας.

τητας και $L_p^{q'}$ είναι το συσχετισμένο πολυώνυμο Laguerre τάξεως p' και δείκτη q' . Δεξιά στον Πίνακα 5.2 εμφανίζονται τα πολυώνυμα Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n), \quad (5.86)$$

από τα οποία κατασκευάζονται τα γενικευμένα ή συσχετισμένα πολυώνυμα Laguerre (generalized Laguerre polynomials or associated Laguerre polynomials) $L_n^a(x)$ που εμπλέκονται στην Εξ. 5.85. Τα πολυώνυμα Laguerre είναι η ειδική περίπτωση για $a = 0$ των γενικευμένων ή συσχετισμένων πολυωνύμων Laguerre. Δηλαδή

$$L_n^0(x) = L_n(x). \quad (5.87)$$

$$L_n^a(x) = \frac{x^{-a} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+a}). \quad (5.88)$$

Η μορφή των TEM που προκύπτει από την Εξ. 5.85 παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.12, δεξιά.

Συνοπτικά, η μορφή της εντάσεως ΗΜ ακτινοβολίας I των εγκαρσίων τρόπων TEM $_{p'q'}$ σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη (αριστερά) και σε κυλινδρική (δεξιά) κοιλότητα παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.12. Στον Πίνακα 5.2 ταξινομούνται τα πρώτα πολυώνυμα Hermite που σχετίζονται με την ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα (αριστερά) και τα πρώτα πολυώνυμα Laguerre που σχετίζονται με την κυλινδρική κοιλότητα (δεξιά).

πολυώνυμο Hermite	πολυώνυμο Laguerre
$H_0(x) = 1$	$L_0(x) = 1$
$H_1(x) = 2x$	$L_1(x) = -x + 1$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$	$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$	$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$	$L_4(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$
...	...

Πίνακας 5.2: Τα πρώτα πολυώνυμα Hermite που σχετίζονται με την ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα και τα πρώτα πολυώνυμα Laguerre που σχετίζονται με την κυλινδρική κοιλότητα.

TEM₀₀ και TEM_{p'q'} άνωτέρως τάξεως

σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδα ή σε κυλινδρική κοιλότητα

Συχνά στην άνομολογία χρησιμοποιούνται, αντί των δεξιών p, q, οι δεξίτες p', q', οι οποίοι δρύνονται ως

ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΗ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ p' = # κόμβων κατά μήκος του άξονα x
q' = # κόμβων κατά μήκος του άξονα y

n. x. TEM₀₂

Έκταση ακτινοβολίας $I_{p'q'}(x, y) = I_0 \left[H_{p'}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) e^{-\frac{x^2}{w^2}} \right]^2 \cdot \left[H_{q'}\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) e^{-\frac{y^2}{w^2}} \right]^2$

H_n(x) πολώνωμα Hermite

w = το FWHM μέγεθος της κηλίδας του TEM₀₀ (spot size)

Οι τρόποι άνωτέρως τάξεως έχουν μεγαλύτερη έκταση.

Όπως, με χρήση όπης (aperture) που παρεμβάλλεται στην έξοδο του laser μπορούμε να κόψουμε εκείνους τους τρόπους που έχουν έκταση μεγαλύτερη της επιθυμητής.

Γενικώς, η συνολική γοργή της $I = \sum_{p'q'} I_{p'q'}$

σε όσα p', q' επιτρέψουμε με την aperture

πολώνωμα Hermite

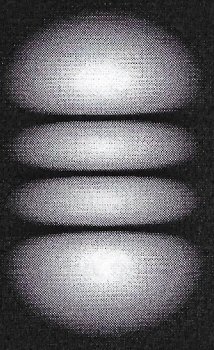
H₀(x) = 1

H₁(x) = 2x

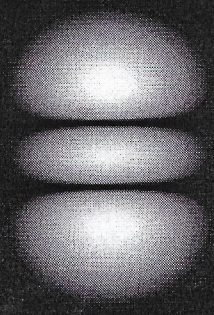
H₂(x) = 4x² - 2

H₃(x) = 8x³ - 12x

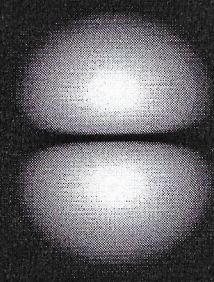
⋮



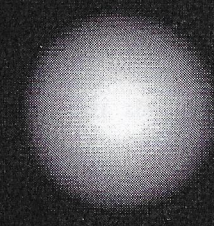
30



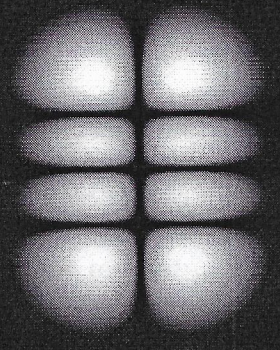
20



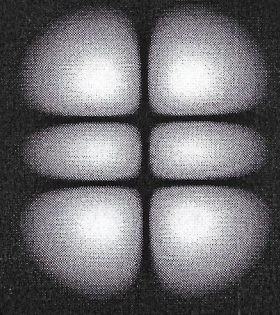
10



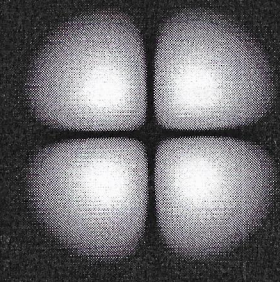
00



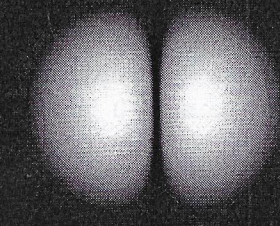
31



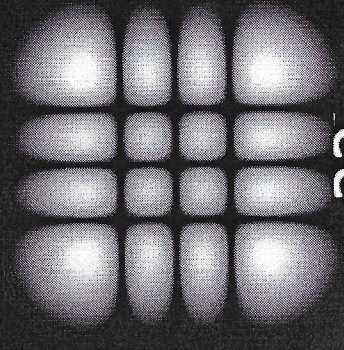
21



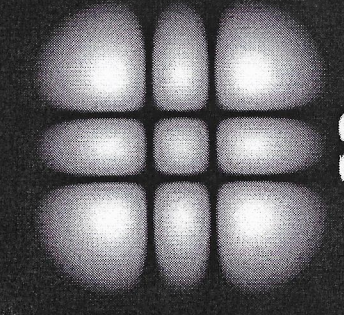
11



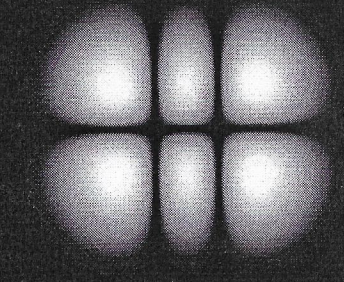
01



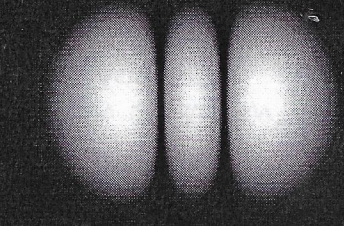
33



22



12



02

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ

$p' = \#$ κόμβων ακτινικά

$q' = \#$ κόμβων κατά γωνία μήκος περιφέρειας
δηλ. γωνιακό, σε γωνία π .

π.χ. TEM_{00} ...

$$I_{p'q'}(\rho, \varphi) = I_0 \rho^{q'} [L_{p'}^{q'}(\rho)]^2 \cos^2(q'\varphi) e^{-\rho}$$

$$\rho = \frac{2r^2}{w^2}$$

$w =$ το FWHM μεγέθους κηλίδας του TEM_{00}
(spot size)

$\equiv w$ (ορθογ. παραλ. κοιλότητα)

$L_{p'}^{q'}$ συσχετισμένα πολυώνυμα Laguerre τάξεως p' και δείκτη q'

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad \text{πολυώνυμα Laguerre}$$

$$L_n^0(x) = L_n(x)$$

$$L_n^a(x) = \frac{x^{-a} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+a})$$

πολυώνυμα Laguerre

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = -x + 1$$

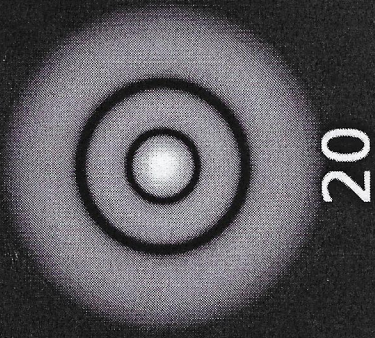
$$L_2(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 4x + 2)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6} (-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$$

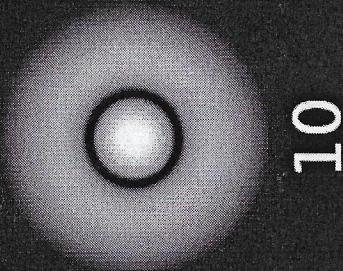
...



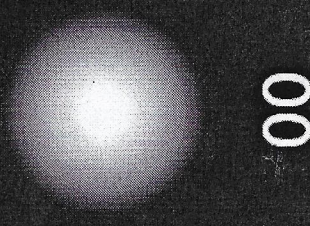
30



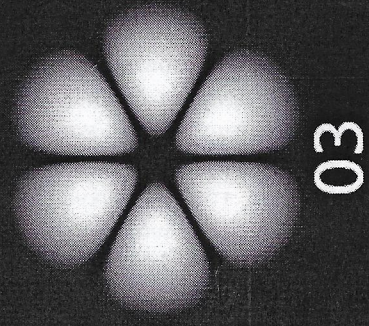
20



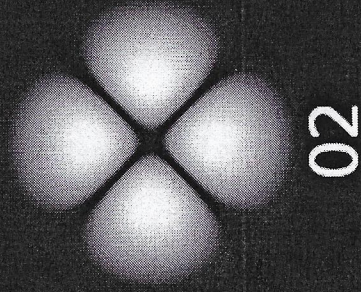
10



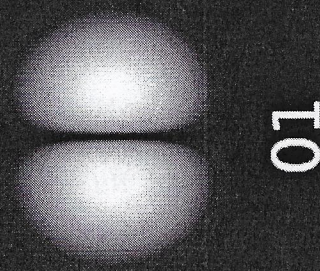
00



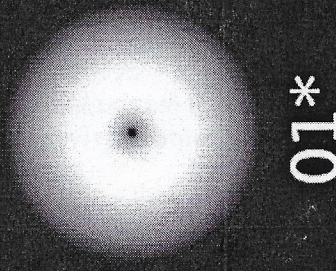
03



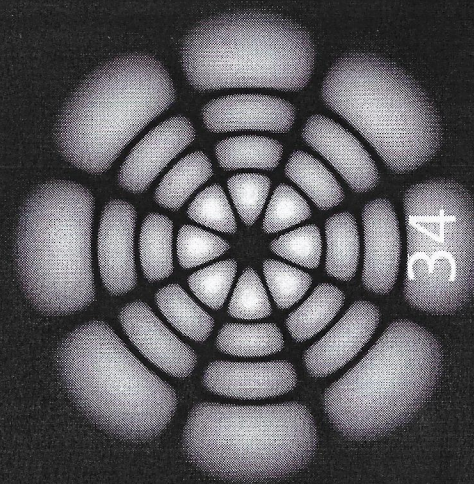
02



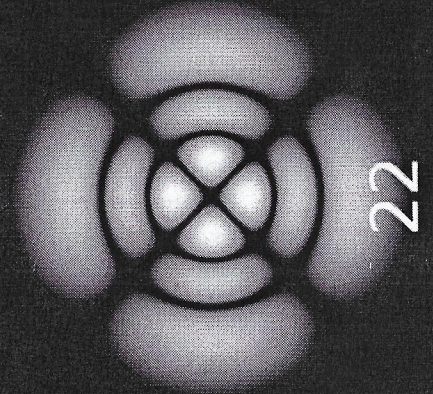
01



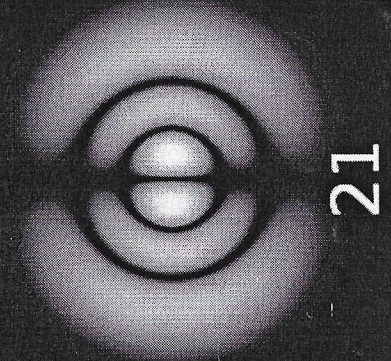
01*



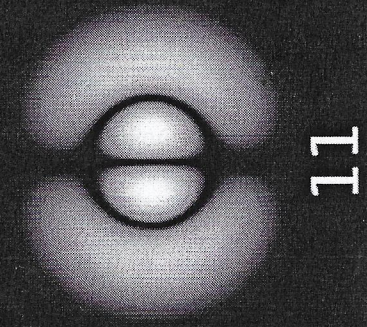
34



22



21



11