Στοιχειώδης Αριθμός Κανονικών Τρόπων ΗΜ πεδίου (dN) ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας ($d\nu$)

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$$

$$[g(\nu)] = \frac{1}{Hz} = s$$

$$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \qquad \left[\frac{g(\nu)}{V}\right] = \frac{1}{m^3\,Hz} = \frac{s}{m^3}$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{g(\nu)}{V}\cdot\overline{E} \qquad [\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$$

$\overline{E}$: μέση ενέργεια κανονικού τρόπου

κλασικά $\overline{E} = \overline{E(T)} = \frac{M}{2}k_B T$

$M = \#$ βαθμών ελευθερίας

Θεώρημα Ισοκατανομής ενέργειας

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{M}{2}k_B T \xrightarrow[M=2]{\text{για}} \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot k_B T}$$ ν. Rayleigh-Jeans

παλαιο-κβαντικά $\overline{E} = \overline{E(\nu,T)} = \dfrac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT} - 1}$

προϋποθέσεις

- $E_n = nh\nu$ ενέργεια "ταλαντωτή", $n = 0, 1, 2, \ldots$
- $\overline{E(\nu,T)} = \sum_n E_n \cdot P_n$

(όπως είπαμε) μέσος αριθμός σωματιδίων στην κατάσταση n με ενέργεια E_n

$$\overline{n_{E_n}} = \frac{N e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} \Longleftarrow P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}, \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

στατιστική (Maxwell-) Boltzmann (MB)

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT} - 1}}$$ ν. Planck

ΑΣΚΗΣΗ-

Σημείωση: Αν αντί του $E_n = nh\nu$ βάλουμε $E_n = h\nu(n+\frac{1}{2})$ όπως γνωρίζουμε σήμερα για τον κβαντικό ΑΑΤ ΔΕΝ προκύπτει ο νόμος του Planck!

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ

ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ – ΥΛΗΣ (ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)

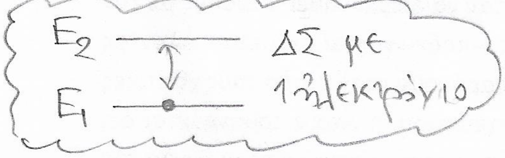
ΔΣ

LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Ἐξαναγκασμένη Ἐκπομπή

ἢ Διεγερμένη

1916 – 1917 A. Einstein "θεωρητικά θεμέλια του LASER"



ἐπαν- ἐξαγωγή τοῦ ν. Planck για την ἀκτινοβολία μέλανος σώματος

Αὐτή τη φορά ἡ ἀπόδειξη στηρίζεται στους 3 μηχανισμούς ἢ διεργασίες ἀλληλεπιδράσεων ΗΜ ἀκτινοβολίας – ΔΣ ΚΑΙ στη στατιστική (Maxwell) – Boltzmann για την κατάληψη των σταθμών του ΔΣ ἀπό το ἠλεκτρόνιο.

(Stimulated) Absorption (Ἐξαναγκασμένη) Ἀπορρόφηση

Spontaneous Emission Αὐθόρμητη Ἐκπομπή

} "παλαιότερα γνωστοί"

Stimulated Emission Ἐξαναγκασμένη Ἐκπομπή ← εἰσήχθη ἀπό τον A. Einstein

Συντελεστές Einstein

ὀφείλεται στο $\rho(\nu, T)$ ⟷ Ἐξαναγκασμένο B_{ij}

ΔΕΝ ὀφείλεται στο $\rho(\nu, T)$ ⟷ Αὐθόρμητο A_{ij}

i ἀρχική στάθμη τοῦ ἠλεκτρονίου

j τελική στάθμη τοῦ ἠλεκτρονίου

πιθανότητα να συμβεῖ ἡ διεργασία

$$dW^{\varepsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = B_{12}\,\rho(\nu, T)\,dt$$

$$dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\varepsilon\kappa\pi} = A_{21}\,dt$$

$$dW^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon\kappa\pi} = B_{21}\,\rho(\nu, T)\,dt$$

ΕΡΩΤΗΣΗ γιατί MB κ όχι FD;
(μᾶλλον δεν ὑπῆρχε τότε FD, σε ὑψηλές T FD → MB, ἔχουμε 1 ἠλεκτρόνιο στο ΔΣ)

1905 A. Einstein ἐξήγησε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ὑποθέτοντας ὅτι ∃ κβάντα φωτός με ἐνέργεια $h\nu$

1926 μᾶλλον ἀπό τον Gilbert Newton Lewis «φωτόνιο» = κβάντο φωτός

1950 – 1960 κατασκευάστηκαν τα πρῶτα MASER κ LASER

microwaves

ΣΗΜΕΡΑ...

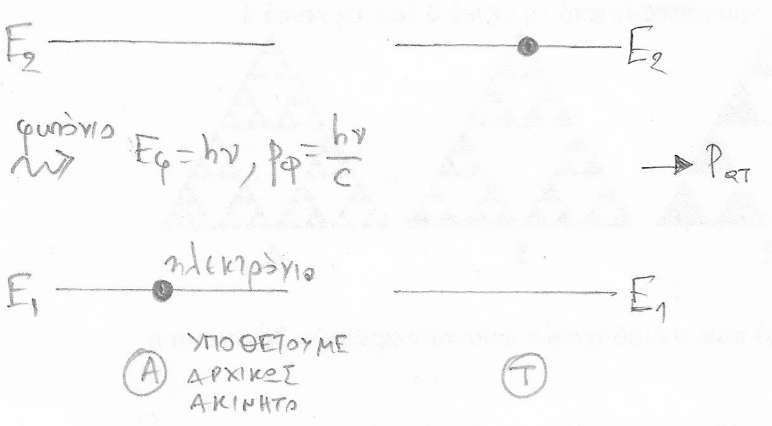
1964 Charles Townes, Nikolay Basov, Aleksandr Prokhorov Νόμπελ Φυσικής

(ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (ή διεγερμένη)) ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ
(STIMULATED) ABSORPTION

εδώ
ΔΣ = δύο στάθμες
ενός ατόμου

1

$$dW^{εξ}_{απορ} = B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt$$



Διατήρηση Ενέργειας

$$E_1 + h\nu = E_2 + \cancel{\frac{p_{ατ}^2}{2m_{ατ}}}$$ υποθέτουμε αμελητέα

$$\Rightarrow h\nu \simeq E_2 - E_1$$

Διατήρηση Ορμής

$$p_φ = p_{ατ} \Rightarrow \frac{h\nu}{c} = p_{ατ} \Rightarrow p_{ατ} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$c = \lambda\nu \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Ας ελέγξουμε αν πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου $\frac{p_{ατ}^2}{2m_{ατ}}$ μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου $E_φ$.

$$\Lambda := \frac{\frac{p_{ατ}^2}{2m_{ατ}}}{E_φ} = \frac{h^{\cancel{2}}\,\cancel{\lambda}}{\lambda^{2}\,2m_{ατ}\,\cancel{h}c} = \frac{h}{2m_{ατ}\lambda c}$$

Για να μεγαλώσει το Λ θα πρέπει η $m_{ατ}$ να μικρύνει.
Ας πάρουμε λοιπόν το μικρότερο δυνατό άτομο, το άτομο του Υδρογόνου.

$$\left.\begin{aligned} m_e &\simeq 9.109\ 10^{-31}\,kg \\ m_p &\simeq 1.673\ 10^{-27}\,kg \\ m_{ατ} &\simeq m_p + m_e \end{aligned}\right\} \quad m_{ατ} \simeq 1.673\ 10^{-27}\,kg$$

↑ υπάρχει κι ένα μικρό έλλειμμα μάζας, διότι η ενέργεια συνδέσεως του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου στο άτομο.

Ας πάρουμε ένα τυπικό πράσινο φωτόνιο με $\lambda \simeq 500\,nm$

$$\Lambda = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\ \cancel{J}s}{2\cdot 1.673\cdot 10^{-27}\ \cancel{kg}\ 500\cdot 10^{-9}\ \cancel{m}\ 3\cdot 10^{8}\ \frac{\cancel{m}}{s}} \simeq 1.320\cdot 10^{-9}$$

Οπότε, πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου.

Για ποιό μήκος κύματος λ, στο άτομο τοῦ ὑδρογόνου, θα μποροῦσε ὁ λόγος Λ να γίνει ἴσος με τη μονάδα;

$$\Lambda = \frac{h}{2\lambda c\, m_{aT}} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{h}{2 c\, m_{aT}} = \frac{6.626\ 10^{-34}\ Jss}{2 \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m\ 1.673 \cdot 10^{-27}\, kg}$$

$$\Rightarrow \lambda \simeq 0.660 \cdot 10^{-15}\, m = 0.660\ fm$$

Αὐτο εἶναι ἕνα ἐξαιρετικά λιλιπούτειο μῆκος κύματος

π.χ. ἀκτίνες γ $\lambda_\gamma \lesssim 10\ pm = 10 \cdot 10^{-12}\, m = \underline{10^{-11}\, m}$

ἐνῶ ἐδῶ βρήκαμε $\underline{0.660 \cdot 10^{-15}\, m = 0.660\ fm}$

Διάμετρος πυρήνα Ὑδρογόνου 1.75 fm

Οὐράνιο 15 fm

Ἄρα, ἡ ὑπόθεσή μας, να θεωρήσουμε ἀμελητέα την κινητική ἐνέργεια τοῦ ἀτόμου μετά την ἀπορρόφηση τοῦ φωτονίου

$$\frac{p_{aT}^2}{2 m_{aT}}$$

σε σχέση με

την ἐνέργεια τοῦ ἀπορροφούμενου φωτονίου E_φ

εἶναι σωστή

σχεδόν σε ὅλο το ΗΜ φάσμα.

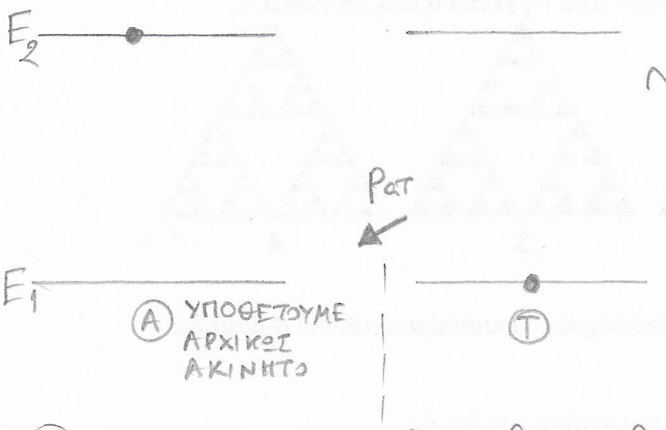
ΑΥΘΟΡΜΗΤΗ ΕΚΠΟΜΠΗ
SPONTANEOUS EMISSION

energy level lifetime (τ_2 ή τ)

χρόνος ζωής της στάθμης 2

(το ηλεκτρόνιο από τη στάθμη 2 εφησυχάζει στη στάθμη 1)

$$dW^{αυθ}_{εκπ} = A_{21} \cdot dt$$



$E_φ = hν$

$p_φ = \frac{hν}{c}$

$$1 := A_{21} \cdot \tau_2 \text{ ή } A_{21} \cdot \tau$$

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{A_{21}}$$

απλοϊκός ορισμός...

Το άτομο θα κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση με το φωτόνιο

Διατήρηση Ενέργειας $E_2 = E_1 + E_φ + \overbrace{\frac{p_{ατ}^2}{2m_{ατ}}}^{\text{αμελητέα}} \Rightarrow hν \simeq E_2 - E_1$

Διατήρηση Ορμής $0 = p_{ατ} + p_φ \Rightarrow p_{ατ} = -p_φ$

Τα φωτόνια εκπέμπονται σε τυχαία κατεύθυνση δηλαδή χωρίς κατευθυντικότητα (without directionality)

με τυχαία φάση, δηλαδή χωρίς συνοχή (incoherence)

συνοχή (coherence) ή συμφωνία, συμφασικότητα

= σταθερή σχέση μεταξύ των φάσεων των κυμάτων (ίδιας περίπου συχνότητας) ή όχι

coherent — incoherent

συνεκτικός — μη συνεκτικός

↓

π.χ. laser

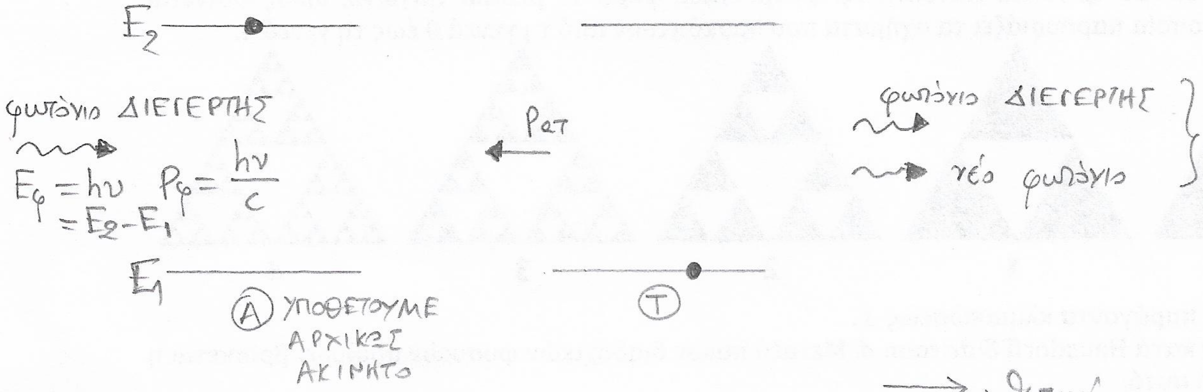
π.χ. φωτεινή πηγή πυρακτώσεως incandescent light source ή LED Light Emitting Diode

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (ή διεγερμένη) ΕΚΠΟΜΠΗ
STIMULATED EMISSION

A. Einstein
"Zur Quantentheorie der Strahlung"
1916, 1917

4

$$dW^{εξ}_{εκπ} = B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt$$



"ΚΛΩΝΟΙ"
δύο φωτόνια με ίδια
- ενέργεια
- ορμή (κατεύθυνση)
- φάση
- πόλωση

ίδια ενέργεια ⇒ μονοχρωματικότητα (monochromaticity)

ίδια ορμή (κατεύθυνση) ⇒ κατευθυντικότητα (directionality)

* ίδια φάση ⇒ συνοχή (coherence)

ίδια πόλωση ⇒ πολωμένο φως (polarized light) *

* υπάρχουν και οι άλλοι μηχανισμοί στο παιχνίδι...

→ Τα περί φάσεως κ πολώσεως ∄ στο άρθρο του Einstein

→ Τα φωτόνια είναι μποζόνια και άρα μπορούν να έχουν ίδια ενέργεια, ορμή (κατεύθυνση), φάση, πόλωση

→ χρειάζεται η υπόθεση ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ ενέργειας $E_φ = E_2 - E_1 = h\nu$ δεν παθαίνει τίποτε κατά τη διάρκεια της εξαναγκασμένης εκπομπής

→ θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ καθορίζει τη φάση, την πόλωση κ την διεύθυνση του νέου εκπεμπόμενου φωτονίου όπως σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης καθορίζει τη φάση, την πόλωση κ την διεύθυνση της εξαναγκασμένης ταλαντώσεως

Διατήρηση Ενέργειας $E_2 + \cancel{E_\varphi} = E_1 + \cancel{E_\varphi} + E_\varphi' + \cancel{\frac{P_{ατ}^2}{2M_{ατ}}}$ αμελητέο

$$\Rightarrow E_\varphi' = E_2 - E_1 = E_\varphi \Rightarrow$$

τα φωτόνια έχουν ίδια ενέργεια → μονοχρωματικότητα

Διατήρηση Ορμής $\cancel{P_\varphi} = \cancel{P_\varphi} + P_\varphi' + P_{ατ} \Rightarrow P_\varphi' = -P_{ατ}$

έχουμε ήδη υποθέσει πως το νέο φωτόνιο θα κινηθεί στην κατεύθυνση του φωτονίου ΔΙΕΓΕΡΤΗ

$\Rightarrow P_\varphi' > 0$ (θετική αλγεβρική τιμή) ίδια κατεύθυνση

(μέτρο) $P_\varphi' = \frac{E_\varphi'}{c} = \frac{E_\varphi}{c} = P_\varphi$ ίδιο μέτρο

$\Rightarrow$ τα φωτόνια έχουν ίδια ορμή

ΕΞΑΓΩΓΗ του νόμου Planck
από τους μηχανισμούς αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας – ΔΣ
και τη στατιστική (Maxwell) – Boltzmann.

Σχέση συντελεστών Einstein A και B

Μελετάμε την αλληλεπίδραση συλλογής ΔΣ – ΗΜ ακτινοβολίας σε θερμοδυναμική ισορροπία.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
(Maxwell) – Boltzmann

① χωρίς διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$N_i = N_{ολ} \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$$

N_i: πληθυσμός ΔΣ με ηλεκτρόνιο στη στάθμη i

$N_{ολ}$: ολικός πληθυσμός ΔΣ

p_i: πιθανότητα στα ΔΣ το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη στάθμη i

② με διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$N_i = N_{ολ} \frac{g_i e^{-\beta E_i}}{Z}$$

g_i στατιστικό βάρος της E_i

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$$

συνάρτηση επιμερισμού
partition function

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i}$$

Θερμοδυναμική ισορροπία $\Rightarrow$ σε χρόνο dt $dN_{1\to2} = dN_{2\to1} \Rightarrow$

$$N_1\, dW_{1\to2} = N_2\, dW_{2\to1} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{N_{ολ}} e^{-\beta E_1} g_1}{\cancel{Z}} \cdot dW^{εξ}_{απορ} = \frac{\cancel{N_{ολ}} \cdot e^{-\beta E_2} g_2}{\cancel{Z}} \left(dW^{εξ}_{εκπ} + dW^{εκπ}_{αυθ} \right) \Rightarrow$$

$$g_1 e^{-\beta E_1} B_{12}\, \rho(\nu,T)\, \cancel{dt} = e^{-\beta E_2} g_2 \left(B_{21}\, \rho(\nu,T)\, \cancel{dt} + A_{21}\, \cancel{dt} \right) \Rightarrow$$

$$g_1 e^{-\beta E_1} B_{12}\, \rho(\nu,T) - e^{-\beta E_2} g_2 B_{21}\, \rho(\nu,T) = e^{-\beta E_2} g_2 A_{21} \Rightarrow$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{g_2 A_{21} e^{-\beta E_2}}{g_1 B_{12} e^{-\beta E_1} - g_2 B_{21} e^{-\beta E_2}} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} e^{\beta(E_2 - E_1)} - 1}$$

Όμως,

$$\lim_{T\to\infty} \rho(\nu,T) = \infty$$

π.χ. από το πείραμα

Αν γνωρίζουμε την πειραματική συμπεριφορά, την οποία εξηγεί ο νόμος Planck

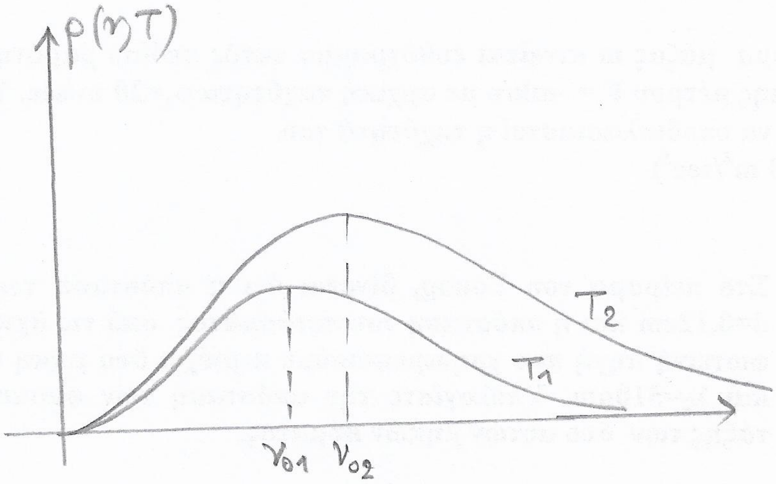
$$\boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT} - 1}}$$

$$\frac{\rho(\nu,T_2)}{\rho(\nu,T_1)} = \frac{\overbrace{e^{\frac{h\nu}{k_BT_1}} - 1}^{\text{θετικό}}}{\underbrace{e^{\frac{h\nu}{k_BT_2}} - 1}_{\text{θετικό}}} > 1$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_BT_1}} - 1 > e^{\frac{h\nu}{k_BT_2}} - 1 \Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_BT_1}} > e^{\frac{h\nu}{k_BT_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T_1} > \frac{1}{T_2} \Leftrightarrow T_2 > T_1$$

δηλαδή μεγαλύτερη θερμοκρασία οδηγεί σε μεγαλύτερο $\rho(\nu,T)$, $\forall \nu$.



Ακόμα, από το νόμο μετατοπίσεως Wien στη μορφή

$$\left.\begin{aligned} \nu_0 &= (\sigma\tau\alpha\vartheta)\cdot T \\ \nu_0 &\simeq 58.789 \frac{GHz}{K} \cdot T \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{T\uparrow \Rightarrow \nu_0 \uparrow\}$$ όπως δείχνουμε και στο σχήμα

$T \to \infty \Rightarrow \beta \to 0$

$$\rho \to \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} - 1} = \infty$$

Άρα, $\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} = 1 \Rightarrow \boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}}$

Αν $g_2 = g_1$ ή χωρίς στατιστικά βάρη $\Rightarrow B_{12} = B_{21} := B$

$A_{21} := A$

$$\left.\begin{aligned} \rho(\nu,T) &= \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} \cdot e^{\beta(E_2-E_1)} - 1} \\ \rho(\nu,T) &= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \end{aligned}\right\} \text{σύγκριση} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}} \qquad \boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}} \qquad \boxed{h\nu = E_2 - E_1}$$