Αποδείξαμε ήδη ότι $\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$. Γνωρίζουμε ότι $\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}$

$\boxed{\text{ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΚΠΟΜΠΩΝ}}$

μη συνεκτική διεργασία

$$\frac{dW_{\epsilon\kappa\pi}^{\alpha\upsilon\theta}}{dW_{\epsilon\kappa\pi}^{\epsilon\xi}} = \frac{A_{21}\cancel{dt}}{B_{21}\rho(\nu,T)\cancel{dt}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{c^3}{8\pi h \nu^3}\left(e^{h\nu/k_BT}-1\right) = e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1>0$$

συνεκτική διεργασία (τα φωτόνια που παράγονται έχουν ίδια φάση)

Άρα, αν θέλουμε περισσότερη συνοχή, θα πρέπει $\nu \downarrow$ $(\lambda\uparrow)$

ή $T\uparrow$

δηλαδή όσο το δυνατόν μικρότερες συχνότητες (μεγαλύτερα μήκη κύματος)

κ όσο το δυνατόν μεγαλύτερες θερμοκρασίες

Αυτός είναι ένας από τους λόγους που οι πρώτες προσπάθειες για κατασκευή συσκευής που παράγει συνεκτική ΗΜ ακτινοβολία επικεντρώθηκαν στην περιοχή των μικροκυμάτων

$\lambda \sim 1cm$ MASER (microwave amplification by stimulated emission of radiation)

$\lambda \sim 500nm$ LASER 1ο MASER 1953

↑

light

σήμερα επικράτησε το LASER ακόμα κ για μη ορατά ΗΜ κύματα π.χ. λέμε

x-LASER αντί για xASER

UV-LASER αντί για UVASER

ακόμα και atom-LASER αντί για AASER (για άτομα που είναι μποζόνια)

Άν π.χ. θέλουμε $\dfrac{dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\epsilon\kappa\pi}}{dW^{\epsilon\xi}_{\epsilon\kappa\pi}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 = 1 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h\nu}{k_B T} = \ln 2 \\ c = \lambda\nu \end{array}\right\} \quad \frac{hc}{\lambda k_B T} = \ln 2 \Rightarrow T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2} \quad \text{ή} \quad T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2}$$

$$\frac{hc}{k_B} \sim 14.404 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K \cdot m}$$

- για έρυθρό φώς (π.χ. $\lambda = 700\,nm$)

$$T = \frac{14.404 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K\,\cancel{m}}}{700 \cdot 10^{-9}\,\cancel{m}\ \ln 2} \simeq 29687\ \mathrm{K}$$

φωτόσφαιρα Ήλιου $\sim 6000\mathrm{K}$

φωτόσφαιρα άστέρων με μάζα 20πλάσια $\sim 30000\mathrm{K}$ ἀπό αὐτή τοῦ Ήλιου

Δείτε π.χ. ένα διάγραμμα Hertzsprung – Russell

Άρα το $\dfrac{dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\epsilon\kappa\pi}}{dW^{\epsilon\xi}_{\epsilon\kappa\pi}} = 1$ σε θερμοδυναμική ισορροπία είναι <u>ἀνέφικτο</u>

⇓

* Αναζήτηση λύσεων εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας

Άναστροφή Πληθυσμού (population inversion) κεφ.5

μέσω άντλήσεως (pumping)

- για μικροκύματα (π.χ. $\lambda = 1\,cm$)

$$T = \frac{14.404 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K\,\cancel{m}}}{10^{-2}\,\cancel{m}\ \ln 2} \simeq 2.078\ \mathrm{K}$$

Άρα το $\dfrac{dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\epsilon\kappa\pi}}{dW^{\epsilon\xi}_{\epsilon\kappa\pi}} = 1$ μπορεί να έπιτευχθεί σε μια <u>πειραματικά έφικτή θερμοκρασία</u>

$\boxed{\text{ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ}}$

$$\frac{dW^{\epsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho}}{dW^{\epsilon\xi}_{\epsilon\kappa\pi}} = \frac{B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt}{B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt} = 1$$ ἀν μιλάμε για σύστημα με ίδια στατιστικά βάρη ($g_1 = g_2$)

$$= \frac{g_2}{g_1}$$ ἀν μιλάμε για σύστημα με διαφορ. στατιστ. βάρη ($g_1 \neq g_2$)

Άλλά σε θερμοδυναμική ισορροπία

$$\left.\begin{array}{l} N_2 << N_1 \ (\ldots) \\ dN^{\epsilon\xi}_{2\to 1} = N_2 \cdot dW^{\epsilon\xi}_{\epsilon\kappa\pi} \\ dN^{\epsilon\xi}_{1\to 2} = N_1 \cdot dW^{\epsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} \end{array}\right\} \Rightarrow dN^{\epsilon\xi}_{2\to 1} << dN^{\epsilon\xi}_{1\to 2}$$

Άρα μέσω τῶν έξαναγκασμένων διεργασιῶν αὐξάνεται ὁ πληθυσμός τῆς στάθμης 2 ⇒ μειώνεται ἡ πυκνότητα ἀκτινοβολίας [ἀφοῦ ὑπερτερεῖ ἡ (έξαναγκασμένη) ἀπορρόφηση]. Στη συνέχεια, ἡ αὐθόρμητη εκπομπή, ἡ ὁποία συνοδεύεται ἀπό μετάβαση τοῦ ηλεκτρ. ἀπό τη στάθμη 2 στη στάθμη 1, ἐνισχύει τη μη συνεκτική ἀκτινοβολία. *

• για ραδιοκύματα FM π.χ. $\nu = 100\,MHz$ $\quad T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2}$

$$T = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,\cancel{J}s\cdot 100\cdot 10^{6}\,\cancel{Hz}\,K}{1.38\cdot 10^{-23}\,J\,\ln 2} \simeq 6.927\cdot 10^{-3}\,K \simeq 7\cdot 10^{-3}\,K$$

• για UV π.χ. με $\lambda = 200\,nm$ $\quad T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2}$

$$T = \frac{14.404\cdot 10^{-3}\,Km}{200\cdot 10^{-9}\,m\,\ln 2} \simeq 103905\,K$$

ΑΣΚΗΣΗ 5 Συλλογή ατόμων H σε θερμοδυναμική ισορροπία

(...) $E_n = -\frac{13.6\,eV}{n^2}$ ιδιοενέργειες $\quad 13.6\,eV = R_y$ Rydberg ενέργεια

(α') $T = 4.2K$ $\quad (\beta')$ $T = 300K$ $\quad \simeq 0.36\,meV$

$k_B \simeq 1.381\cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \simeq 8.617\cdot 10^{-5}\,\frac{eV}{K}$ $\quad k_B T(4.2K) = 0.000361914\,eV$

$k_B T(300K) = 0.025851\,eV \simeq 26\,meV$

Ⓐ $\frac{N_2}{N_1}, \frac{N_3}{N_2}, \frac{N_4}{N_3}, \frac{N_5}{N_4}$

Ⓑ $\frac{dN^{(e)}_{2\to 1}}{dN^{(\varepsilon)}_{1\to 2}}, \ldots$ σύγκριση

$E_1 = -13.6\,eV$

$E_2 = -3.4\,eV$

$E_3 = -1.51\,eV$

Ⓐ $N_j = \frac{N_0}{Z} e^{-\beta E_j}$, $\quad N_i = \frac{N_0}{Z} e^{-\beta E_i}$, $\quad \beta = \frac{1}{k_B T} \Rightarrow \frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{e^{-\beta E_{i+1}}}{e^{-\beta E_i}} = e^{\beta(E_i - E_{i+1})}$

$$E_i - E_{i+1} = -\frac{R_y}{i^2} + \frac{R_y}{(i+1)^2} = R_y\frac{i^2-(i+1)^2}{(i+1)^2 i^2}$$

$$= R_y\frac{(i-i-1)(i+i+1)}{(i+1)^2 i^2} = -R_y\frac{(2i+1)}{i^2(i+1)^2}$$

	4.2K	300K
$E_1 - E_2 = -R_y\frac{3}{4}$	$\beta(E_1-E_2) \simeq -28177$	$\simeq -394.5$
$E_2 - E_3 = -R_y\frac{5}{36}$	$\simeq -5218$	$\simeq -73$
$E_3 - E_4 = -R_y\frac{7}{144}$	$\simeq -1826$	$\simeq -25.57$
$E_4 - E_5 = -R_y\frac{9}{400}$	$\simeq -845.3$	$\simeq -11.83$

2''

• Για ποιό λ $\quad \dfrac{dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\varepsilon\kappa\pi}}{dW^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon\kappa\pi}} = 1$ σε θερμοκρασία δωματίου $T \simeq 300K$;

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{hc}{\lambda k_B \ln 2} \Rightarrow \lambda = \dfrac{hc}{T k_B \ln 2} \\ T = 300K \\ \dfrac{hc}{k_B} \simeq 14.4 \cdot 10^{-3} K \cdot m \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \simeq \frac{14.404 \cdot 10^{-3} \, K m}{3 \cdot 10^{2} K \;\; 0.693} \Rightarrow$$

$$\lambda \simeq 6.928 \cdot 10^{-5} m$$

$$\lambda \simeq 70 \, \mu m \quad \underline{\underline{FIR}}$$

ISO 20473 NIR $0.78 \, \mu m < \lambda < 3 \, \mu m$

MIR $3 \mu m < \lambda < 50 \, \mu m$

FIR $50 \mu m < \lambda < 1000 \, \mu m = 1 mm$

	$4.2K$	$300K$
$\frac{N_2}{N_1}$	e^{-28177} (υπερχείλιση)	$e^{-394.5} \simeq 4.7 \cdot 10^{-172}$
$\frac{N_3}{N_2}$	$e^{-5218} \simeq 7.1 \cdot 10^{-2267}$	$e^{-73} \simeq 1.98 \cdot 10^{-32}$
$\frac{N_4}{N_3}$	$e^{-1826} \simeq 9.5 \cdot 10^{-794}$	$e^{-25.57} \simeq 7.85 \cdot 10^{-12}$
$\frac{N_5}{N_4}$	$e^{-845.3} \simeq 7.78 \cdot 10^{-368}$	$e^{-17.83} \simeq 7.28 \cdot 10^{-6}$

Δηλαδή σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας ο πληθυσμός της επόμενης στάθμης είναι συντριπτικά μικρότερος του πληθυσμού της προηγούμενης στάθμης

(B) $$\frac{dN^{εξ}_{2\to 1}}{dN^{εξ}_{1\to 2}} = \frac{N_2\, dW^{εξ}_{εκπ}}{N_1 \cdot dW^{εξ}_{απορ}} = \frac{N_2\, B_{21}\, \rho(\nu, T)\, dt}{N_1\, B_{12}\, \rho(\nu, T)\, dt} = \frac{N_2}{N_1}$$

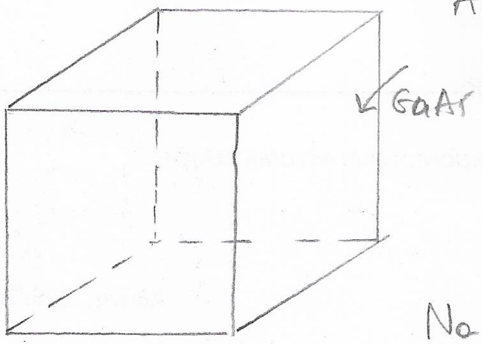
όμοιως

$$\frac{dN^{εξ}_{i+1\to i}}{dN^{εξ}_{i\to i+1}} = \frac{N_{i+1}}{N_i} = .$$

$$e^{23000} \simeq 5.93 \cdot 10^{9988}$$

ΑΣΚΗΣΗ

$Al_xGa_{1-x}As$



Έστω κβαντική τελεία:

$$E_2 = -50 \text{ meV}$$

$$E_1 = -100 \text{ meV}$$

Να βρεθούν τα $\dfrac{N_2}{N_1}$ κ $\dfrac{dN^{εξ}_{2\to1}}{dN^{εξ}_{1\to2}}$ σε $T = 4.2K$ κ $T = 300K$

ΛΥΣΗ

$$T = 4.2K \Rightarrow k_B T \simeq 0.36 \text{ meV} \Rightarrow \beta(E_1 - E_2) = \frac{-50 \text{meV}}{0.36 \text{meV}} = 138.\overline{8} \Rightarrow$$

$$T = 300K \Rightarrow k_B T \simeq 26 \text{ meV} \Rightarrow \beta(E_1 - E_2) = \frac{-50 \text{meV}}{26 \text{ meV}} \simeq -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\beta(E_1 - E_2)} = 4.8 \cdot 10^{-61}$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\beta(E_1 - E_2)} \simeq 0.135$$ μη αμελητέο

$$\frac{dN^{εξ}_{2\to1}}{dN^{εξ}_{1\to2}} = \frac{B_{21}\, \rho(\nu,T)\, dt \cdot N_2}{B_{12}\, \rho(\nu,T)\, dt \cdot N_1} = \frac{N_2}{N_1} = \ldots$$

ΑΣΚΗΣΗ $\rho=\rho_0\dfrac{x^3}{e^x-1}=\dfrac{8\pi h}{c^3}\dfrac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}$ $\qquad x=\dfrac{h\nu}{k_BT}$

Εξετάστε:

(α') $\lim\limits_{\nu\to 0}\rho$ (β') $\lim\limits_{\nu\to\infty}\rho$ (γ') ν πολύ μικρές $\Rightarrow \rho=\rho_{RJ}$

(δ') ν πολύ μεγάλες $\Rightarrow \rho=\rho_W$

(α') $\lim\limits_{\nu\to 0}\rho=\lim\limits_{x\to 0}\rho_0\dfrac{x^3}{e^x-1}=\rho_0\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{e^x}=0$

(β') $\lim\limits_{\nu\to\infty}\rho=\lim\limits_{x\to\infty}\rho_0\dfrac{x^3}{e^x-1}=\rho_0\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}=\rho_0\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{e^x}=\rho_0\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{e^x}=0$

(γ') ν πολύ μικρές $\Rightarrow x$ πολύ μικρό $\quad e^x=1+1\cdot\dfrac{x}{1!}+1\cdot\dfrac{x^2}{2!}+1\dfrac{x^3}{3!}+\dots$

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\dots$$

οπότε $e^x-1\simeq x$ (πρώτης τάξεως προσέγγιση)

Άρα $\rho=\rho_0\dfrac{x^3}{e^x-1}\simeq\rho_0\dfrac{x^3}{x}=\rho_0x^2=\rho_W$

(δ') ν πολύ μεγάλη $\Rightarrow x$ πολύ μεγάλο $\qquad e^x\gg 1$

$$\rho=\rho_0\frac{x^3}{e^x-1}\simeq\rho_0\frac{x^3}{e^x}=\rho_W$$

ΑΣΚΗΣΗ $\rho_W(\nu,T)\neq\rho_{RJ}(\nu,T)$ για μικρές και μεγάλες συχνότητες δηλ. για μικρά και μεγάλα x

$\lim\limits_{x\to\infty}\rho_W=\lim\limits_{x\to\infty}\rho_0\dfrac{x^3}{e^x}=\rho_0\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\rho_{RJ}=\lim\limits_{x\to\infty}\rho_0x^2=\infty$

$\Bigg\}\ \lim\limits_{x\to\infty}\rho_W\neq\lim\limits_{x\to\infty}\rho_{RJ}$

$\lim\limits_{x\to 0}\rho_W=\rho_0\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{e^x}=0 \qquad \lim\limits_{x\to 0}\rho_0x^2=0$

Αλλά σε μικρά x

$$\rho_W=\rho_0\frac{x^3}{e^x}\simeq\rho_0\frac{x^3}{1+x}\neq\rho_{RJ}=\rho_0x^2$$