

?Ας εξετάσουμε αρχικώς ενέργειες  $E < 0$  ("δέσμιες καταστάσεις")

Χωριή Περιοχές ⊙ I κ ⊙ III       $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) = E \psi(x) \Leftrightarrow \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0$  ↑άρνητική

$0 > \frac{2mE}{\hbar^2}$  θέτουμε  $-q^2$  κί έστω  $q > 0$ . "Άρα,  $\psi''(x) - q^2 \psi(x) = 0$

ΔΛΜ = Δοκιμάσουμε λύσεις τής μορφής       $\psi(x) = A e^{-qx} + B e^{qx}$   
 $\psi'(x) = -Aq e^{-qx} + Bq e^{qx}$   
 $\psi''(x) = Aq^2 e^{-qx} + Bq^2 e^{qx}$

$(Aq^2 e^{-qx} + Bq^2 e^{qx}) - q^2 (A e^{-qx} + B e^{qx}) = 0 \Rightarrow 0 = 0$  ισχύει

Δηλαδή αυτό το είδος οι λύσεις είναι ικανοποιητικές.

?Επειδή οι  $\psi(x)$  πρέπει να είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες

$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_{III}(x) = A e^{-qx}$        $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_I(x) = B e^{qx}$

$$\Psi_I(x) = B e^{qx} \Rightarrow \Psi_I'(x) = Bq e^{qx} \quad \textcircled{I}$$

$$\Psi_{III}(x) = A e^{-qx} \Rightarrow \Psi_{III}'(x) = -Aq e^{-qx} \quad \textcircled{III}$$

χωρίς περιοχή II

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(x) - U_b \Psi(x) = E \Psi(x)$$

$$\Psi''(x) + \left( \frac{2m}{\hbar^2} (E + U_b) \right) \Psi(x) = 0$$

δείκτη ή άρνητική

$$\text{εάν } E < -U_b \Leftrightarrow E + U_b < 0 \quad \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$0 > \frac{2m}{\hbar^2} (E + U_b) \text{ δίδουμε } -Q^2 \text{ κι έσω } Q > 0 \Rightarrow \Psi''(x) - Q^2 \Psi(x) = 0$$

$$\Delta \Lambda M \quad \left. \begin{aligned} \Psi(x) &= \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx} \\ \Psi'(x) &= -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx} \\ \Psi''(x) &= \Gamma Q^2 e^{-Qx} + \Delta Q^2 e^{Qx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Gamma Q^2 e^{-Qx} + \Delta Q^2 e^{Qx} \\ -Q^2 (\Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}) \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Γράφει

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{II}(x) &= \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx} \\ \Psi_{II}'(x) &= -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx} \end{aligned} \right\} \quad \textcircled{II} \textcircled{K}$$

$$\text{εάν } E > -U_b \Leftrightarrow E + U_b > 0 \quad \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$0 < \frac{2m}{\hbar^2} (E + U_b) \text{ δίδουμε } k^2 \text{ κι έσω } k > 0 \Rightarrow \Psi''(x) + k^2 \Psi(x) = 0$$

$$\Delta \Lambda M \quad \left. \begin{aligned} \Psi(x) &= \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx} \\ \Psi'(x) &= ik\Gamma e^{ikx} - ik\Delta e^{-ikx} \\ \Psi''(x) &= -k^2\Gamma e^{ikx} - k^2\Delta e^{-ikx} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -k^2\Gamma e^{ikx} - k^2\Delta e^{-ikx} \\ +k^2(\Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}) \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Γράφει

$$\eta \Delta \Lambda M \quad \left. \begin{aligned} \Psi(x) &= \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx \\ \Psi'(x) &= -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx \\ \Psi''(x) &= -\Gamma k^2 \cos kx - \Delta k^2 \sin kx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -\Gamma k^2 \cos kx - \Delta k^2 \sin kx \\ +k^2(\Gamma \cos kx + \Delta \sin kx) \end{aligned} \right\} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Γράφει

Αν εκλέξουμε

$$\left. \begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx} \\ \psi'_{II}(x) &= \Gamma ik e^{ikx} - \Delta ik e^{-ikx} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \textcircled{II} \\ \textcircled{II_1} \end{matrix}$$

ή αν εκλέξουμε

$$\left. \begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx \\ \psi'_{II}(x) &= -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \textcircled{II} \\ \textcircled{II_2} \end{matrix}$$

δηλαδή για τη χωρική περιοχή  $\textcircled{II}$  έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις  $\textcircled{II_1}$  ή  $\textcircled{II_2}$  για τη μεσαία ενεργειακή περιοχή  $\textcircled{II}_k$  για την κατώτερη ενεργειακή περιοχή

Κατά τα γνωστά, για να βρούμε τη σωστή λύση, θα πρέπει να ταιριάζουμε τις κυματοσυναρτήσεις κ τις παραγώγους τους στα όρια των περιοχών δηλαδή σε  $x = \pm L/2$ .

• Ως προσπαθήσουμε να ταιριάζουμε τις  $\textcircled{I}$ ,  $\textcircled{II}_k$ ,  $\textcircled{III}$

$$\left. \begin{aligned} \psi_I(-L/2) &= B e^{-qL/2} \\ \psi_{II}(-L/2) &= \Gamma e^{qL/2} + \Delta e^{-qL/2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B e^{-qL/2} = \Gamma e^{qL/2} + \Delta e^{-qL/2}$$

$$\left. \begin{aligned} \psi'_I(-L/2) &= B q e^{-qL/2} \\ \psi'_{II}(-L/2) &= -\Gamma q e^{qL/2} + \Delta q e^{-qL/2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B q e^{-qL/2} = -\Gamma q e^{qL/2} + \Delta q e^{-qL/2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{B q e^{-qL/2}}{B e^{-qL/2}} &= \frac{-\Gamma q e^{qL/2} + \Delta q e^{-qL/2}}{\Gamma e^{qL/2} + \Delta e^{-qL/2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Gamma q e^{qL/2} + \Delta q e^{-qL/2} &= -\Gamma q e^{qL/2} + \Delta q e^{-qL/2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Gamma(q+q) e^{qL/2} &= \Delta(q-q) e^{-qL/2} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{q-q}{q+q} e^{-qL}} \oplus \end{aligned}$$

$x = L/2$

$$\psi_{III}(L/2) = A e^{-q L/2}$$

$$\psi_{II}(L/2) = \Gamma e^{-q L/2} + \Delta e^{q L/2}$$

$$\Rightarrow A e^{-q L/2} = \Gamma e^{-q L/2} + \Delta e^{q L/2}$$

$$\psi'_{III}(L/2) = -A q e^{-q L/2}$$

$$\psi'_{II}(L/2) = -\Gamma q e^{-q L/2} + \Delta q e^{q L/2}$$

$$\Rightarrow -A q e^{-q L/2} = -\Gamma q e^{-q L/2} + \Delta q e^{q L/2}$$

$$\Rightarrow \frac{-A q e^{-q L/2}}{A e^{-q L/2}} = \frac{-\Gamma q e^{-q L/2} + \Delta q e^{q L/2}}{\Gamma e^{-q L/2} + \Delta e^{q L/2}} \Rightarrow$$

$$-\Gamma q e^{-q L/2} - \Delta q e^{q L/2} = -\Gamma q e^{-q L/2} + \Delta q e^{q L/2} \Rightarrow$$

$$\Gamma(q-q) e^{-q L/2} = \Delta(q+q) e^{q L/2} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{q+q}{q-q} e^{qL}} \oplus$$

$$\oplus \text{ και } \oplus \Rightarrow \frac{q-q}{q+q} e^{-qL} = \frac{q+q}{q-q} e^{qL} \Rightarrow \boxed{e^{-2qL} = \frac{(q+q)^2}{(q-q)^2}} \oplus$$

το οποίο είναι άτοπο

δίου  $q > 0 \Rightarrow e^{-2qL} < 1$

$\frac{(q+q)^2}{(q-q)^2} > 1 \Leftrightarrow (q+q)^2 > (q-q)^2 \Leftrightarrow q^2 + q^2 + 2q^2 > q^2 + q^2 - 2q^2 \Leftrightarrow 4q^2 > 0$  το οποίο ισχύει δίου  $q > 0$  και  $q > 0$

δηλαδή ~~η~~ λύση στην κατώτερη ενεργειακή περιοχή.

• Αν προσπαθήσουμε να ταυρίσουμε τις  $\textcircled{\text{I}}$   $\textcircled{\text{II}}$   $\textcircled{\text{III}}$  στα σύνορα  $x = \pm L/2$

Οι πράξεις βρίσκονται στη σελίδα 4, οι σχέσεις  $\blacksquare, \blacksquare \Rightarrow$

$$\frac{(ik+q) e^{ikL}}{(ik-q)} = \frac{(ik-q) e^{-ikL}}{(ik+q)} \Rightarrow \boxed{e^{2ikL} = \frac{(ik-q)^2}{(ik+q)^2} = \frac{-k^2 + q^2 - 2ikq}{-k^2 + q^2 + 2ikq} := \Lambda}$$

$\xi = \frac{kL}{2}$

$x = \frac{L}{2}$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{III}(\frac{L}{2}) &= A e^{-q \frac{L}{2}} \\ \Psi_{II}(\frac{L}{2}) &= \Gamma e^{ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik \frac{L}{2}} \end{aligned} \right\} A e^{-q \frac{L}{2}} = \Gamma e^{ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik \frac{L}{2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi'_{III}(\frac{L}{2}) &= -A q e^{-q \frac{L}{2}} \\ \Psi'_{II}(\frac{L}{2}) &= \Gamma i k e^{ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{-ik \frac{L}{2}} \end{aligned} \right\} -A q e^{-q \frac{L}{2}} = \Gamma i k e^{ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{-ik \frac{L}{2}}$$

$$(\because) \Rightarrow -q = \frac{\Gamma i k e^{ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{-ik \frac{L}{2}}}{\Gamma e^{ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik \frac{L}{2}}} \Rightarrow -\Gamma q e^{ik \frac{L}{2}} - \Delta q e^{-ik \frac{L}{2}} = \Gamma i k e^{ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{-ik \frac{L}{2}}$$

$$(\Delta i k - \Delta q) e^{-ik \frac{L}{2}} = (\Gamma i k + \Gamma q) e^{ik \frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta(ik - q)}{\Gamma(ik + q)} = e^{ikL}} \Rightarrow \left\{ \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{(ik + q)}{(ik - q)} e^{ikL} \right. \quad \blacksquare$$

$x = -\frac{L}{2}$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{I}(-\frac{L}{2}) &= B e^{-q \frac{L}{2}} \\ \Psi_{II}(-\frac{L}{2}) &= \Gamma e^{-ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{+ik \frac{L}{2}} \end{aligned} \right\} B e^{-q \frac{L}{2}} = \Gamma e^{-ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{+ik \frac{L}{2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi'_{I}(-\frac{L}{2}) &= B q e^{-q \frac{L}{2}} \\ \Psi'_{II}(-\frac{L}{2}) &= \Gamma i k e^{-ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{+ik \frac{L}{2}} \end{aligned} \right\} B q e^{-q \frac{L}{2}} = \Gamma i k e^{-ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{+ik \frac{L}{2}}$$

$$(\because) \Rightarrow q = \frac{\Gamma i k e^{-ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{+ik \frac{L}{2}}}{\Gamma e^{-ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{+ik \frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Gamma q e^{-ik \frac{L}{2}} + \Delta q e^{+ik \frac{L}{2}} = \Gamma i k e^{-ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{+ik \frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$(\Delta i k + \Delta q) e^{+ik \frac{L}{2}} = (\Gamma i k - \Gamma q) e^{-ik \frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta(ik + q)}{\Gamma(ik - q)} = e^{-ikL}} \Rightarrow \left\{ \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{(ik - q)}{(ik + q)} e^{-ikL} \right. \quad \blacksquare$$

$$\xi := \frac{kL}{2} \Rightarrow k = \frac{2\xi}{L}$$

$$\eta := \frac{qL}{2} \Rightarrow q = \frac{2\eta}{L}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{L^2}{4} (k^2 + q^2) = \frac{L^2}{4} \left[ \frac{2m}{\hbar^2} (E + U_b) - \frac{2m}{\hbar^2} E \right] = \frac{L^2}{4} \frac{2mU_b}{\hbar^2} = \frac{mU_bL^2}{2\hbar^2} := \alpha^2$$

$$\alpha^2 := \frac{mU_bL^2}{2\hbar^2}$$

σταθερό ανεξάρτητο της ενέργειας E  
κι ξίσω α > 0

δηλαδή


$$\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2$$

Εκφράζει την αποτελεσματικότητα του φρέατος

Είναι ανάλογο της μάζας ή ενέργειας μάζας του σωματιδίου m  
του βάθους του φρέατος U\_b και

του πλάτους στο χειράκι του φρέατος L^2.

$$-\xi^2 + \eta^2 := \beta^2$$

Όπότε, η σχέση  =>

$$\text{όπότε } e^{\frac{2i\xi L}{\hbar}} = \frac{-\xi^2 + \eta^2 - 2i\xi\eta}{-\xi^2 + \eta^2 + 2i\xi\eta} = \frac{\beta^2 - 2i\xi\eta}{\beta^2 + 2i\xi\eta} = \frac{(\beta^2 - 2i\xi\eta)^2}{(\beta^2 + 2i\xi\eta)(\beta^2 - 2i\xi\eta)}$$

$$e^{i4\xi} = \frac{\beta^4 - 4i\xi\eta\beta^2 - 4\xi^2\eta^2}{\beta^4 + 4\xi^2\eta^2} \Rightarrow e^{i4\xi} (\beta^4 + 4\xi^2\eta^2) = \beta^4 - 4i\xi\eta\beta^2 - 4\xi^2\eta^2$$

έν τω μεταξύ  $\beta^4 + 4\xi^2\eta^2 = \xi^4 + \eta^4 - 2\xi^2\eta^2 + 4\xi^2\eta^2 = (\xi^2 + \eta^2)^2 = \alpha^4$

$$\beta^4 - 4f^2\eta^2 = \beta^4 + 4f^2\eta^2 - 8f^2\eta^2 = a^4 - 8f^2\eta^2$$

5' (4)

$$-4if\eta\beta^2 = ; \dots$$

$$\Rightarrow a^4 e^{i4f} = a^4 - 8f^2\eta^2 - 4if\eta\beta^2$$

$$a^4 \cos 4f + ia^4 \sin 4f = (a^4 - 8f^2\eta^2) + i(-4f\eta\beta^2)$$

$$\left. \begin{aligned} a^4 \cos 4f &= a^4 - 8f^2\eta^2 \\ a^4 \sin 4f &= -4f\eta\beta^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan(4f) = \frac{-4f\eta\beta^2}{a^4 - 8f^2\eta^2} \otimes$$

δίνω τα πραγματικά φαινόμενα περίηλκκα

$$\beta^4 + 4f^2\eta^2 = a^4$$

$$\beta^4 - 4f^2\eta^2 = a^4 - 8f^2\eta^2$$

$$(+)\ 2\beta^4 = 2a^4 - 8f^2\eta^2$$

$$\beta^4 = a^4 - 4f^2\eta^2$$

$$\frac{a^4 - \beta^4}{4} = f^2\eta^2$$

$$f\eta = \frac{\sqrt{a^4 - \beta^4}}{2}$$

$$a^4 - \beta^4 > 0 \Leftrightarrow a^4 > \beta^4 \Leftrightarrow \left(\frac{mV_b L^2}{2\hbar^2}\right)^2 > (\eta^2 - f^2)^2$$

$$= \left(\frac{L^2 q^2}{4} - \frac{L^2 k^2}{4}\right)^2 = \frac{L^4}{4^2} \left[-\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_b)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{\eta^2} V_b^2 \cancel{L^4}}{\cancel{\hbar^4}} > \frac{\cancel{L^4}}{4^2} \frac{\cancel{4m^2}}{\cancel{\hbar^4}} (2E + V_b)^2 \Leftrightarrow V_b^2 > 4E^2 + V_b^2 + 4EV_b$$

$$\Leftrightarrow 0 > E^2 + EV_b \Leftrightarrow 0 < E + V_b$$

$$(E < 0)$$

που ισχύει δίνω βρισκόμαστε στην ενεργειακή περιοχή ΜΕΣΩΝ

$$\text{Οπότε } \otimes \Rightarrow \tan(4f) = \frac{-4 \frac{\sqrt{a^4 - \beta^4}}{2} \cdot \beta^2}{a^4 - 8 \frac{(a^4 - \beta^4)}{4}} = \frac{-2\sqrt{a^4 - \beta^4} \cdot \beta^2}{a^4 - 2(a^4 - \beta^4)} = \frac{-2\sqrt{a^4 - \beta^4} \cdot \beta^2}{-a^4 + 2\beta^4}$$

$$\boxed{\tan(4f) = \frac{2\sqrt{a^4 - \beta^4} \cdot \beta^2}{a^4 - 2\beta^4}}$$

Για τις  $\textcircled{\text{II}}$   $\textcircled{\mu_2}$   $\Psi_{\text{II}}(x) = \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx$

Επειδή η δυναμική ενέργεια είναι άρτια  
 θα έχουμε ένα  $\mu_2$  άρτιες & περιττές ιδιοσυναρτήσεις  
 πράγμα που φαίνεται να μπορεί να το χρησιμοποιήσει  
 η μορφή  $\textcircled{\text{II}}$   $\textcircled{\mu_2}$  που αναφέρεται επί  $\cos$  (άρτιες) &  $\sin$  (περιττές)

ΕΣΤΩ ΑΡΤΙΕΣ

για  $x \in$  περιοχές I & III  $\Psi(-x) = \Psi(x) \Rightarrow$

δηλαδή

$\Psi_{\text{I}}(x) = \Psi_{\text{III}}(-x)$

$x > 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow B e^{-qx} = A e^{-qx} \Leftrightarrow B = A$   
 $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow A e^{-qx} = B e^{-qx} \Leftrightarrow B = A$  }  $B = A$

$\Psi_{\text{I}}(-x) = \Psi_{\text{III}}(x)$

για  $x \in$  περιοχή II  $\Psi(-x) = \Psi(x) \Leftrightarrow \Gamma \cos(-kx) + \Delta \sin(-kx)$   
 $= \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx \Leftrightarrow \Gamma \cos kx - \Delta \sin kx = \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx$   
 $\Leftrightarrow 2\Delta \sin kx = 0 \quad (\forall x \in \text{περιοχή II}) \Rightarrow \Delta = 0$

Οπότε έχουμε

$\Psi_{\text{I}}(x) = A e^{qx} \quad \Psi'_{\text{I}}(x) = A q e^{qx}$

$\Psi_{\text{II}}(x) = \Gamma \cos kx \quad \Psi'_{\text{II}}(x) = -\Gamma k \sin kx$

$\Psi_{\text{III}}(x) = A e^{-qx} \quad \Psi'_{\text{III}}(x) = -A q e^{-qx}$

συνέχεια  $\Psi$  &  $\Psi'$   
 στα  $x = \pm L/2$

$\Psi_{\text{I}}(-L/2) = \Psi_{\text{II}}(-L/2) \Rightarrow A e^{-qL/2} = \Gamma \cos(kL/2)$   
 $\Psi'_{\text{I}}(-L/2) = \Psi'_{\text{II}}(-L/2) \Rightarrow A q e^{-qL/2} = +\Gamma k \sin(kL/2)$  }  $\Rightarrow q = k \tan(kL/2)$

$q = k \cdot \tan(kL/2) \Rightarrow \boxed{\tan(kL/2) = \frac{q}{k}}$

$\Psi_{\text{II}}(L/2) = \Psi_{\text{III}}(L/2) \Rightarrow \Gamma \cos(kL/2) = A e^{-qL/2}$   
 $\Psi'_{\text{II}}(L/2) = \Psi'_{\text{III}}(L/2) \Rightarrow -\Gamma k \sin(kL/2) = -A q e^{-qL/2}$  }  $\Rightarrow$

$-k \tan(kL/2) = -q \Rightarrow \boxed{\tan(kL/2) = \frac{q}{k}}$

δηλαδή  $\boxed{\tan(kL/2) = \frac{q}{k}}$   $\textcircled{A}$

δημοίωστε

$\xi := \frac{kL}{2} \quad \eta := \frac{qL}{2}$

$k = \frac{2\xi}{L} \quad q = \frac{2\eta}{L}$

$\xi^2 + \eta^2 = a^2 = \frac{m \sqrt{b} L^2}{2\hbar^2}$

$\eta^2 = a^2 - \xi^2 \Rightarrow \eta = \sqrt{a^2 - \xi^2}$

$\tan \xi = \frac{\eta}{\xi}$

$\boxed{\tan \xi = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi}}$   $\textcircled{A}$



ΕΣΤΩ ΠΕΡΙΤΤΕΣ

για  $x \in$  περιοχές I & III  $\psi(x) = -\psi(x) \Rightarrow$

$x > 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow B e^{-qx} = -A e^{-qx} \Leftrightarrow B = -A$   
 $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow A e^{+qx} = -B e^{+qx} \Leftrightarrow B = -A$  (6)

για  $x \in$  περιοχή II  $\psi(-x) = -\psi(x) \Rightarrow$

$\Gamma \cos(-kx) + \Delta \sin(-kx) = -\Gamma \cos kx - \Delta \sin kx \Rightarrow$

$\Gamma \cos(kx) - \Delta \sin(kx) = -\Gamma \cos(kx) - \Delta \sin(kx) \Rightarrow$

$2\Gamma \cos(kx) = 0 \quad (\forall x \in \text{περιοχή II}) \Rightarrow \Gamma = 0$

Οπότε έχουμε

$\psi_I(x) = -A e^{qx} \quad \psi'_I(x) = -Aq e^{qx}$

$\psi_{II}(x) = \Delta \sin kx \quad \psi'_{II}(x) = \Delta k \cos kx$

$\psi_{III}(x) = A e^{-qx} \quad \psi'_{III}(x) = -Aq e^{-qx}$

συνέχεια  $\psi$  &  $\psi'$

στα  $x = \pm L/2$

$\psi_I(-L/2) = \psi_{II}(-L/2) \Rightarrow -A e^{-qL/2} = \Delta \sin(kL/2)$   
 $\psi'_I(-L/2) = \psi'_{II}(-L/2) \Rightarrow -Aq e^{-qL/2} = \Delta k \cos(kL/2)$  (7)

$q = -k \cot(kL/2) \Rightarrow \boxed{\tan(kL/2) = -\frac{k}{q}}$

$\psi_{III}(L/2) = \psi_{II}(L/2) \Rightarrow A e^{-qL/2} = \Delta \sin(kL/2)$   
 $\psi'_{III}(L/2) = \psi'_{II}(L/2) \Rightarrow -Aq e^{-qL/2} = \Delta k \cos(kL/2)$  (8)

$-\frac{1}{q} = \frac{1}{k} \tan(kL/2) \Rightarrow \boxed{\tan(kL/2) = -\frac{k}{q}}$

δηλαδή  $\boxed{\tan(kL/2) = -\frac{k}{q}} \quad \text{III}$

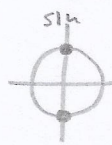
$\boxed{\tan \xi = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}} \quad \text{II}$

Να σημειωθεί ότι τα  $\xi$  &  $a$  είναι άδιδότατα,  $[\xi] = 1, [a^2] = 1$

$a^2 = \frac{m v_b L^2}{2\hbar^2}$  εκφράζει τη στέρεση ελευθερίας του σωματιδίου ( $m \uparrow$  ή  $v_b \uparrow$  ή  $L \uparrow$ )

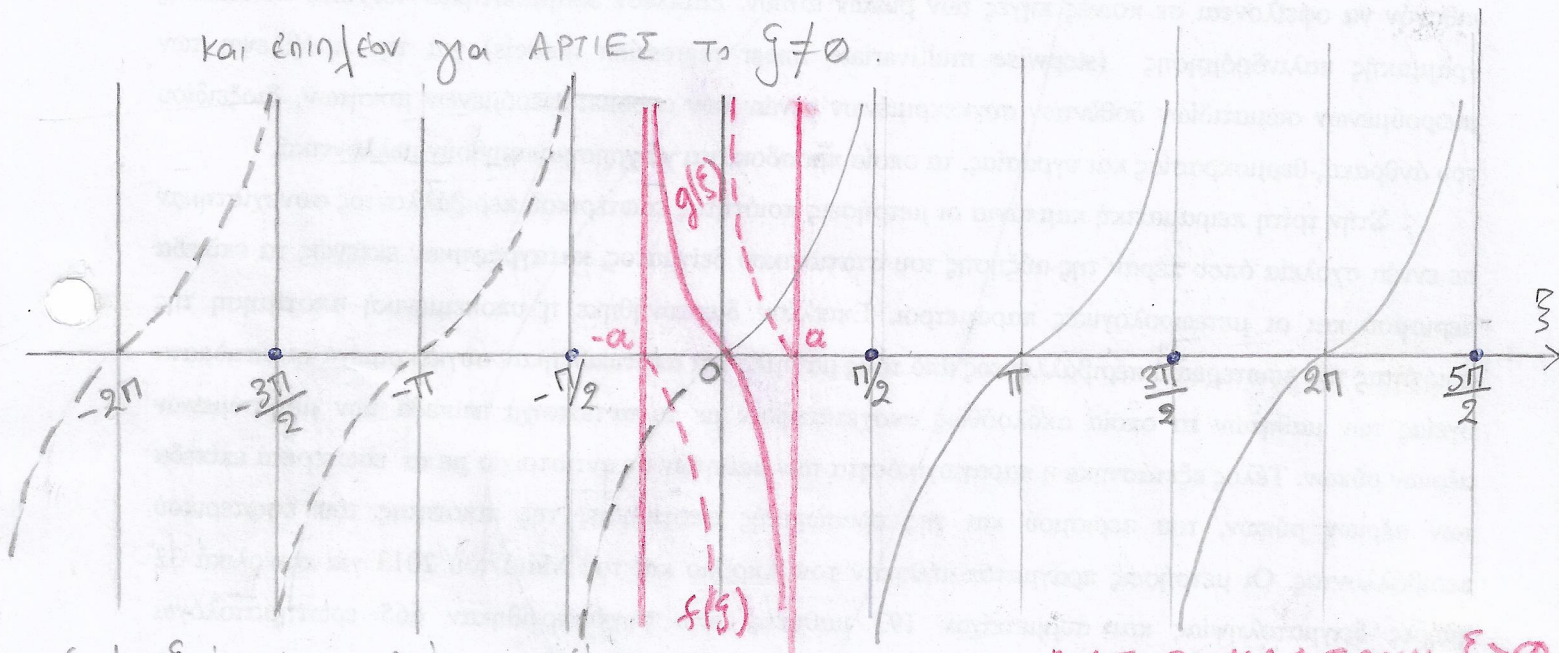
Συνοψίζοντας ΑΡΤΙΕΣ  $\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{q}{k} \square$   $\tan\xi = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi} \textcircled{A}$   $\xi \textcircled{7}$

ΠΕΡΙΤΤΕΣ  $\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = -\frac{k}{q} \square$   $\tan\xi = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \textcircled{B}$

  $\cos$  ή  $\tan\xi$  δεν ορίζεται για  $\xi = (2l+1)\frac{\pi}{2}$   $l \in \mathbb{N}$   $k > 0 \Leftrightarrow \xi > 0$

για να οριστεί η ρίζα θα πρέπει  $a^2 - \xi^2 \geq 0 \Leftrightarrow \xi^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq \xi \leq a$

και εστιάζουν για ΑΡΤΙΕΣ το  $\xi \neq 0$ .



ή  $\tan\xi$  εκτείνεται από  $-\infty$  έως  $+\infty$

**ΜΑΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΝ  $\xi > 0$**

$f(\xi) = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi}$  πεδίο ορισμού  $[-a, 0) \cup (0, a]$   $f(\pm a) = 0$

$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(\xi) = +\infty$   $\lim_{\xi \rightarrow 0^-} f(\xi) = -\infty$

ή  $f(\xi)$  εκτείνεται από  $-\infty$  έως  $+\infty$

--- 2 ξεχωριστοί κλάδοι  
ο ένας δε μάς ενδιαφέρει γιατί είναι σε αρνητικά  $\xi$ .

Επάνω τουλάχιστον ένα σημείο τομής των  $f(\xi)$  &  $\tan\xi$

$g(\xi) = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}$  πεδίο ορισμού  $(-a, a)$   $g(0) = 0$

— 1 κλάδος  
το ένα κομμάτι του δε μάς ενδιαφέρει γιατί είναι σε αρνητικά  $\xi$ .

$\lim_{\xi \rightarrow a} g(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{-\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \frac{-a}{0} = -\infty$

$\lim_{\xi \rightarrow -a} g(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow -a} \frac{-\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \frac{a}{0} = +\infty$

Τα πεδία ορισμού των  $f(\xi)$  &  $g(\xi)$  περναίνουν στο  $a$   
ή επειδή  $\xi > 0 \Rightarrow (0, a]$  για  $f(\xi)$  &  $(0, a)$  για  $g(\xi)$

για  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \exists$  1 σημείο τομής των  $f(x)$  &  $\tan x$

για  $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \exists$  1 σημείο τομής των  $f(x)$  &  $\tan x$   
& 1 σημείο τομής των  $g(x)$  &  $\tan x$

για  $\alpha \in [\pi, \frac{3\pi}{2}) \exists$  2 σημεία τομής των  $f(x)$  &  $\tan x$   
& 1 σημείο τομής των  $g(x)$  &  $\tan x$

για  $\alpha \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \exists$  2 σημεία τομής των  $f(x)$  &  $\tan x$   
& 2 σημεία τομής των  $g(x)$  &  $\tan x$

Επομένως έχουμε τουλάχιστον 1 λύση, ενώ προτιμάται για κάθε φορά που αυξάνουμε το  $\alpha$  κατά  $\frac{\pi}{2}$ . Οπότε ο αριθμός των λύσεων είναι

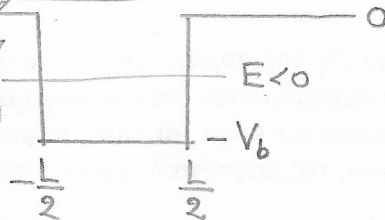
$$n = 1 + \text{Int} \left[ \frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} \right] = 1 + \text{Int} \left[ \frac{\sqrt{\frac{m^* V_b L^2}{2\hbar^2}}}{\frac{\pi}{2}} \right] = 1 + \text{Int} \left[ \sqrt{\frac{m^* V_b L^2 4}{2\hbar^2 \pi^2}} \right]$$

$$\Rightarrow n = 1 + \text{Int} \left[ \sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \right]$$

$$k_w = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E + V_b)}$$

$$k_b = \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

$$\begin{cases} k_w \tan(k_w \frac{L}{2}) = k_b & \text{even solutions} \\ k_w \cot(k_w \frac{L}{2}) = -k_b & \text{odd solutions} \end{cases}$$



See experiment

$$\frac{L}{2} k_w = \sqrt{\frac{2m(E + V_b)L^2}{4\hbar^2}} \Rightarrow k_w = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$\beta^2 = \frac{2m V_b L^2}{4\hbar^2}$$

$$\frac{L}{2} k_b = \sqrt{-\frac{2mEL^2}{4\hbar^2}} \Rightarrow k_b = \sqrt{\alpha^2}, \alpha > 0$$

$$\alpha^2 = -\frac{2mEL^2}{4\hbar^2}$$

$$\begin{cases} k_w \cdot \tan(k_w) = k_b \\ k_w \cdot \cot(k_w) = -k_b \end{cases}$$

$$k_w^2 = \beta^2 - k_b^2 \Rightarrow k_w^2 + k_b^2 = \beta^2$$

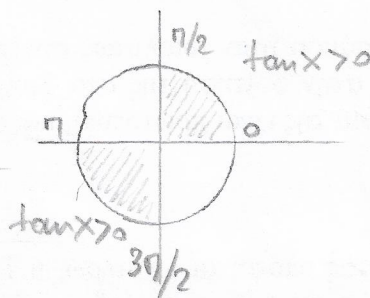
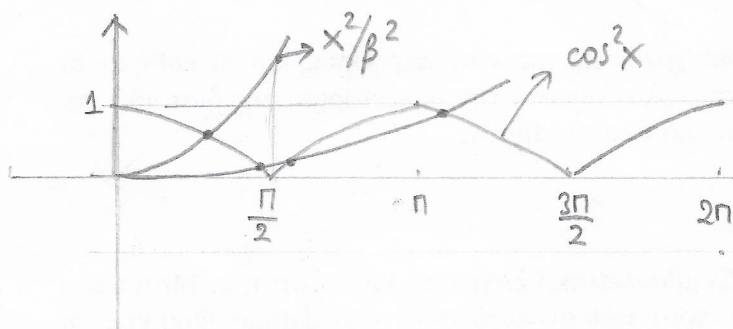
$$\begin{cases} x \tan x = \sqrt{\beta^2 - x^2} \\ x \cot x = -\sqrt{\beta^2 - x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \tan^2 x = \beta^2 - x^2 \\ x^2 \cot^2 x = \beta^2 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 (1 + \tan^2 x) = \beta^2 \\ x^2 (1 + \cot^2 x) = \beta^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \frac{1}{\cos^2 x} = \beta^2 \\ x^2 \frac{1}{\sin^2 x} = \beta^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{x^2}{\beta^2} \\ \sin^2 x = \frac{x^2}{\beta^2} \end{cases}$$



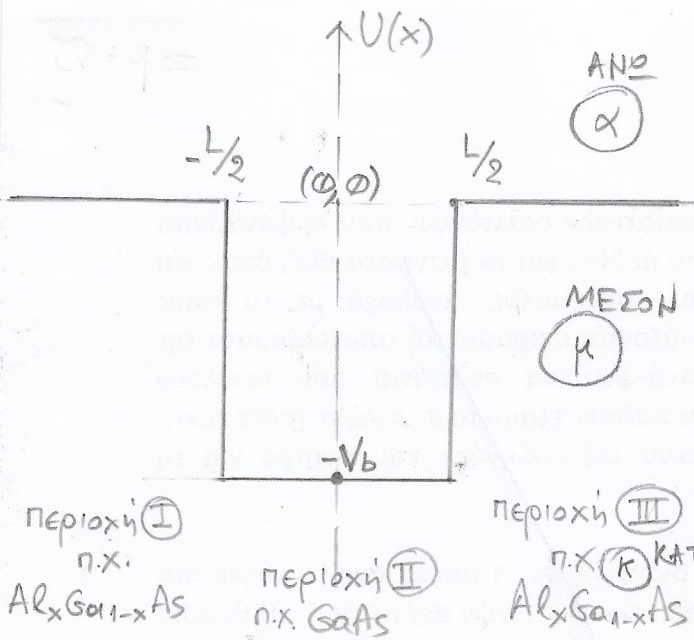
$$\left. \frac{x^2}{\beta^2} \right|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{\beta^2}$$

$$\eta(L) = 1 + \text{Int} \left[ \sqrt{\frac{2m V_b L^2}{\hbar^2}} \right]$$

$$\frac{\beta^2}{(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{2m V_b L^2}{\hbar^2 \pi^2}$$

$$\eta(L) = 1 + \text{Int} \left[ \sqrt{\frac{\beta^2}{(\frac{\pi}{2})^2}} \right]$$

$$\eta(L) = 1 + \text{Int} \left[ \frac{\beta}{\pi/2} \right]$$



περιοχή I η.χ.  $A_L x G_{01} - x A_S$   
 περιοχή II η.χ.  $G_{01} A_S$   
 περιοχή III η.χ.  $A_L x G_{01} - x A_S$

περιοχή II  $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) - V_b \psi(x) = E \psi(x)$   
 $\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_b) \psi(x) = 0$

Εάν  $E > -V_b \Leftrightarrow E + V_b > 0$

$0 < \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_b) \stackrel{\text{θέτουμε}}{\text{}} k^2$  κι' έστω  $k > 0$

$\Rightarrow \psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0$

ΔΛΜ  $\psi(x) = \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}$

$\psi'(x) = \Gamma ik e^{ikx} + \Delta (-ik) e^{-ikx}$

$\psi''(x) = -k^2 \Gamma e^{ikx} - k^2 \Delta e^{-ikx}$

$\psi''(x) = -k^2 \psi(x) \Rightarrow$

$-k^2 \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0$  που ισχύει

ή ΔΛΜ  $\psi(x) = \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx$

$\psi'(x) = -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx$

$\psi''(x) = -\Gamma k^2 \cos kx - \Delta k^2 \sin kx$

$\psi''(x) = -k^2 \psi(x) \Rightarrow$

$-k^2 \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0$  που ισχύει

Εάν  $E < -V_b \Leftrightarrow E + V_b < 0$

$0 > \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_b) \stackrel{\text{θέτουμε}}{\text{}} -Q^2$  κι' έστω  $Q > 0$

Ας εξετάσουμε αρχικά ενέργειες  $E < 0$ .  
 ("δέσμιες καταστάσεις")

περιοχές I & III  $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) = E \psi(x) \Leftrightarrow \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0$

$0 > \frac{2mE}{\hbar^2} \stackrel{\text{θέτουμε}}{\text{}} -q^2$  κι' έστω  $q > 0$

Άρα  $\psi''(x) - q^2 \psi(x) = 0$  ΔΛΜ = δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής

ΔΛΜ  $\psi(x) = A e^{-qx} + B e^{qx}$

$\psi'(x) = A(-q) e^{-qx} + B q e^{qx}$

$\psi''(x) = A q^2 e^{-qx} + B q^2 e^{qx}$

$\psi''(x) = q^2 \psi(x) \Rightarrow$

$q^2 \psi(x) - q^2 \psi(x) = 0$  που ισχύει

δηλαδή αυτού του είδους οι λύσεις είναι ικανοποιητικές

Επειδή ο  $\psi(x)$  πρέπει να είναι τετραγωνικός δυνάμειος

$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_{III}(x) = A e^{-qx}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_I(x) = B e^{qx}$

$\psi_I(x) = B e^{qx} \Rightarrow \psi_I'(x) = B q e^{qx}$  (I)

$\psi_{III}(x) = A e^{-qx} \Rightarrow \psi_{III}'(x) = -A q e^{-qx}$  (III)

Αν εκλέξουμε  $\psi_{II}(x) = \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}$   
 $\psi_{II}'(x) = \Gamma ik e^{ikx} - \Delta ik e^{-ikx}$  (II)

ένω αν εκλέξουμε  $\psi_{II}(x) = \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx$   
 $\psi_{II}'(x) = -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx$  (III)

$\psi''(x) - Q^2 \psi(x) = 0$

ΔΛΜ  $\psi(x) = \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}$

$\xi\acute{\alpha}\nu E = -V_b$

$$\psi_{II}''(x) = 0$$

$$\psi_{II}'(x) = c$$

$$\psi_{II}(x) = cx + d$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{II}(-\frac{L}{2}) = \psi_{III}(-\frac{L}{2}) &\Rightarrow B e^{-q\frac{L}{2}} = c(-\frac{L}{2}) + d \\ \psi_{II}'(-\frac{L}{2}) = \psi_{III}'(-\frac{L}{2}) &\Rightarrow B q e^{-q\frac{L}{2}} = c \\ \psi_{III}(\frac{L}{2}) = \psi_{II}(\frac{L}{2}) &\Rightarrow A e^{-q\frac{L}{2}} = c\frac{L}{2} + d \\ \psi_{III}'(\frac{L}{2}) = \psi_{II}'(\frac{L}{2}) &\Rightarrow -A q e^{-q\frac{L}{2}} = c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} q &= \frac{c}{c(-\frac{L}{2}) + d} \\ q &= \frac{-c}{c\frac{L}{2} + d} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{c}{c(-\frac{L}{2}) + d} = \frac{-c}{c\frac{L}{2} + d} \Rightarrow \cancel{\frac{c}{2}} + d = \cancel{\frac{c}{2}} - d \Rightarrow d = -d \Rightarrow d = 0$$

$$q = \frac{c}{c(-\frac{L}{2})} \qquad q = \frac{-c}{c\frac{L}{2}}$$

$$q = -\frac{2}{L} \qquad q = -\frac{2}{L}$$

$q = -\frac{2}{L} < 0$  ΑΤΟΠΟ δίου  $q > 0$  (το συνδέεται συν  $\rho r \chi^2$ )

δελ. δεν υπάρχει λύση για  $E = -V_b \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow \int = 0$

$\xi\acute{\alpha}\nu E = 0$

$$\psi''(x) - \alpha^2 \psi(x) = 0$$

ΔΛΜ  $\psi(x) = \Gamma e^{-\alpha x} + \Delta e^{\alpha x}$

$$\psi'(x) = -\Gamma \alpha e^{-\alpha x} + \Delta \alpha e^{\alpha x}$$

$$\psi''(x) = +\Gamma \alpha^2 e^{-\alpha x} + \Delta \alpha^2 e^{\alpha x}$$

$$\psi''(x) = \alpha^2 (\Gamma e^{-\alpha x} + \Delta e^{\alpha x})$$

$$\psi''(x) = \alpha^2 \psi(x) \Rightarrow$$

$$\alpha^2 \psi(x) - \alpha^2 \psi(x) = 0 \text{ που ισχύει}$$

Συνεπώς  $\psi_{\pm}(x) = \Gamma e^{-\alpha x} + \Delta e^{\alpha x}$  (III) ΚΑΤΩ

(II)κ  $\left\{ \begin{array}{l} \psi_{\pm}(x) = \Gamma e^{-\alpha x} + \Delta e^{\alpha x} \\ \psi'_{\pm}(x) = -\Gamma \alpha e^{-\alpha x} + \Delta \alpha e^{\alpha x} \end{array} \right.$

Διηλεκτική για την περιοχή (II) έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις

(II)μ1 ή (II)μ2 για ενέργειες στο ΜΕΣΩΝ  
(II)κ για ενέργειες στο ΚΑΤΩ

Κατά τα γνωστά, για να βρούμε τη σωστή λύση, θα πρέπει να ταιριάζουμε τις κυματοσυναρτήσεις ή τις παραγώγους τους στα όρια των περιοχών δηλαδή στα  $x = \pm L/2$ .

Ας προσπαθήσουμε να ταιριάζουμε τις (I), (II)κ, (III)

$$\psi_{\pm}(-L/2) = B e^{-\alpha L/2}$$

$$\psi_{\pm}(-L/2) = \Gamma e^{+\alpha L/2} + \Delta e^{-\alpha L/2}$$

$$\left. \begin{array}{l} B e^{-\alpha L/2} \\ \Gamma e^{+\alpha L/2} + \Delta e^{-\alpha L/2} \end{array} \right\} B e^{-\alpha L/2} = \Gamma e^{+\alpha L/2} + \Delta e^{-\alpha L/2} \quad (\odot) \Rightarrow$$

$$\psi'_{\pm}(-L/2) = B \alpha e^{-\alpha L/2}$$

$$\psi'_{\pm}(-L/2) = -\Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2}$$

$$\left. \begin{array}{l} B \alpha e^{-\alpha L/2} \\ -\Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2} \end{array} \right\} B \alpha e^{-\alpha L/2} = -\Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2}$$

$$\Rightarrow \frac{B \alpha e^{-\alpha L/2}}{B e^{-\alpha L/2}} = \frac{-\Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2}}{\Gamma e^{+\alpha L/2} + \Delta e^{-\alpha L/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2} = -\Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2}$$

$$\Rightarrow \Gamma(\alpha + \alpha) e^{+\alpha L/2} = \Delta(\alpha - \alpha) e^{-\alpha L/2} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\alpha - \alpha}{\alpha + \alpha} e^{-\alpha L}} \quad \oplus$$

$$\psi_{\pm}(L/2) = A e^{-\alpha L/2}$$

$$\psi_{\pm}(L/2) = \Gamma e^{-\alpha L/2} + \Delta e^{+\alpha L/2}$$

$$\left. \begin{array}{l} A e^{-\alpha L/2} \\ \Gamma e^{-\alpha L/2} + \Delta e^{+\alpha L/2} \end{array} \right\} A e^{-\alpha L/2} = \Gamma e^{-\alpha L/2} + \Delta e^{+\alpha L/2} \quad (\odot) \Rightarrow$$

$$\psi'_{\pm}(L/2) = -A \alpha e^{-\alpha L/2}$$

$$\psi'_{\pm}(L/2) = -\Gamma \alpha e^{-\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{+\alpha L/2}$$

$$\left. \begin{array}{l} -A \alpha e^{-\alpha L/2} \\ -\Gamma \alpha e^{-\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{+\alpha L/2} \end{array} \right\} -A \alpha e^{-\alpha L/2} = -\Gamma \alpha e^{-\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{+\alpha L/2} \quad (\odot) \Rightarrow$$

$$-\cancel{A}q e^{-qL/2} = \frac{-\Gamma q e^{-qL/2} + \Delta q e^{qL/2}}{\Gamma e^{-qL/2} + \Delta e^{qL/2}} \Rightarrow$$

$$-\Gamma q e^{-qL/2} - \Delta q e^{qL/2} = -\Gamma q e^{-qL/2} + \Delta q e^{qL/2} \Rightarrow$$

$$\Gamma(Q-q) e^{-qL/2} = \Delta(Q+q) e^{qL/2} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{Q+q}{Q-q} e^{qL}} \oplus$$

$$\oplus \times \oplus \Rightarrow \frac{Q-q}{Q+q} e^{-qL} = \frac{Q+q}{Q-q} e^{qL} \Rightarrow \boxed{e^{-2qL} = \frac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2}}$$

το ίδιο είναι άτοπο

δίνω  $\sqrt{e^{-2qL}} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{2qL}} < 1 \Leftrightarrow 1 < e^{2qL} \Leftrightarrow \ln 1 < 2qL \Leftrightarrow 0 < 2qL$   
 που ισχύει

ένω  $\frac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2} > 1 \Leftrightarrow Q^2 + q^2 + 2Qq > Q^2 + q^2 - 2Qq \Leftrightarrow 4Qq > 0$   
 που ισχύει

δηλαδή δεν υπάρχει λύση στην ενεργειακή περιοχή ΚΑΤΩ

Ας δοκιμάσουμε στην ενεργειακή περιοχή ΜΕΣΩΝ

Για τις  $\text{II} \mu 1 \Rightarrow$

Χρησιμοποιώντας τη συνεχή κυματοσυνάρτηση και πρώτων παραγώγων στα σύνορα  $x = \pm L/2$  προκύπτει (δείτε σημειώσεις τις σχέσεις  $\boxtimes$  &  $\boxtimes$ )

$$\frac{(ik+q)}{(ik-q)} e^{ikL} = \frac{(ik-q)}{(ik+q)} e^{-ikL} \Rightarrow \boxed{e^{2ikL} = \frac{(ik-q)^2}{(ik+q)^2} = \frac{-k^2+q^2-2ikq}{-k^2+q^2+2ikq}}$$

$$\boxed{\xi := \frac{kL}{2}} \quad \boxed{\eta := \frac{qL}{2}} \Rightarrow \xi^2 + \eta^2 = \frac{L^2}{4} \left( \frac{2m}{\hbar^2} (E+V_b) - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) = \frac{L^2 2mV_b}{4\hbar^2} = \frac{mV_b L^2}{2\hbar^2} =: \alpha^2 \Rightarrow$$

= σταθερό, ανεξάρτητο της E κι έστω  $\alpha > 0$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \boxed{\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2} \quad \boxed{-\xi^2 + \eta^2 = \beta^2}$$

$$k = \frac{2\xi}{L} \quad q = \frac{2\eta}{L}$$

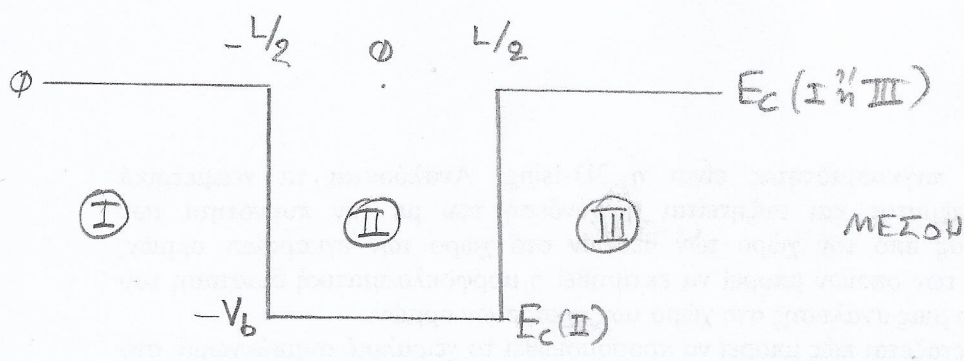
οπότε  $\Lambda = \frac{-\xi^2 + \eta^2 - 2i\xi\eta}{-\xi^2 + \eta^2 + 2i\xi\eta} = \frac{\beta^2 - 2i\xi\eta}{\beta^2 + 2i\xi\eta} = \frac{(\beta^2 - 2i\xi\eta)^2}{(\beta^2 + 2i\xi\eta)(\beta^2 - 2i\xi\eta)} \Rightarrow$

$$\Lambda = \frac{\beta^4 - 4i\xi\eta\beta^2 - 4\xi^2\eta^2}{\beta^4 + 4\xi^2\eta^2} \Rightarrow e^{i4\xi} (\beta^4 + 4\xi^2\eta^2) = \beta^4 - 4i\xi\eta\beta^2 - 4\xi^2\eta^2$$

έντω μεταξύ  $\beta^4 + 4\xi^2\eta^2 = (-\xi^2 + \eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2 = \xi^4 + \eta^4 - 2\xi^2\eta^2 + 4\xi^2\eta^2 = (\xi^2 + \eta^2)^2 = \alpha^4$



ΑΝΩ



$n \times \text{II GaAs}$   
 $\text{I} \times \text{III Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$

ΜΕΣΩ

ΚΑΤΩ

$$E_c(\text{I} \ \& \ \text{III}) - E_c(\text{II}) = V_b$$

Ένα κβαντικό φρέαρ εύρους  $L$  και βάθους  $V_b$  περιέχει

$$n = 1 + \text{Int} \left[ \sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \right]$$

δύομιες ενεργειακές καταστάσεις ("σταθμίες").

$\text{Int}[x]$  είναι το ακέραιο μέρος του  $x$ .

ΑΣΚΗΣΗ

Θεωρήστε κβαρτινή ζελεία εκήματος ερδουχτων παρλληλεπιδου με εσωτερικό GaAs διαστάσεων 8nm x 4nm x 4nm

και περιβλημα Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As με μοριακό κλάσμα x : V<sub>b</sub> = 224 meV.

Θεωρήστε κατά προσέγγιση m\* = m\*(GaAs) = 0.067me.

- Ⓐ Πόσες ενεργειακές στάθμες έχει αυτή η κβαρτινή ζελεία;
- Ⓑ Σε τι μήκος κύματος ακτινοβολία η μετάβαση από τη ΘΣ στην 1η ΔΣ της εν λόγω κβαρτινής ζελείας; Έστω ότι μπορείτε να λάβετε τα παρακάτω προβλήματα.
- Ⓒ Υποθέστε ότι έχουμε μια συλλογή από τέτοιες κβαρτινές ζελείες με ένα ηλεκτρόνιο στην κάθε μία και ότι η στατιστική Boltzmann με ίδια στατισικά βάρη περιγράφει την πιθανότητα καταλήψως των ενεργειακών σταθμών.

Η θερμοκρασία είναι α) 4.2K κ β) 300K

Συγκρίνετε τον αριθμό των κβαρτινών ζελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη ΘΣ με τον αριθμό των κβαρτινών ζελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην 1η ΔΣ

Ⓓ Έστω ότι η συλλογή κβαρτινών ζελειών βρίσκεται εντός καταλλήλου ΗΜ πεδίου.

Συγκρίνετε τον αριθμό των κβαρτινών που σε χρόνο dt μεταβαίνουν

από τη ΘΣ στην 1η ΔΣ με εξαγωγή ενέργειας dN<sub>1→2</sub><sup>ef</sup>

με τον αριθμό των κβαρτινών που μεταβαίνουν σε χρόνο dt από τη 1η ΔΣ

στη ΘΣ με εξαγωγή ενέργειας dN<sub>2→1</sub><sup>ef</sup>.

Δίνονται  $\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J s}$

$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$

$k_B = 1.380 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$

↓ ίδιο πρόβλημα με το παλιό κβαρτινής ζελείας

για  $L = 8 \text{ nm}$

$$\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2} \approx \frac{2 \cdot 0.067 \cdot 9 \cdot 109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 224 \cdot 10^{-3} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ eV} \cdot 64 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2}{(10) \cdot (1.054)^2 \cdot 10^{-68} \text{ J}^2 \text{ s}^2}$$

$$\approx 2523 \frac{10^{-31-3-19-18}}{10^{-68}} = 2523 \frac{10^{-71}}{10^{-68}} = 2.523$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \approx 1.59$$

$$\Rightarrow n = 1 + \text{Int}[1.59] = 2$$

για  $L = 4 \text{ nm}$

$$\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2} \approx 0.63075 \Rightarrow \sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \approx 0.79$$

$$\Rightarrow n = 1 + \text{Int}[0.79] = 1$$

Δηλαδή στο φρέαρ  $x$  χωράνε 2 στάθμες  $E_{1x}, E_{2x}$   
στο φρέαρ  $y$  1 στάθμη  $E_{1y}$   
στο φρέαρ  $z$  1 στάθμη  $E_{1z}$

$$E_1 = E_{1x} + E_{1y} + E_{1z}$$

$$E_2 = E_{2x} + E_{1y} + E_{1z}$$

$$\Delta E = E_{2x} - E_{1x}$$

(B)  $h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{2x} - E_{1x} \Rightarrow \lambda = \dots$

(Г) 
$$\left. \begin{aligned} N_j &= \frac{N_{0j}}{Z} e^{-\frac{E_j}{k_B T}} \\ N_i &= \frac{N_{0i}}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \end{aligned} \right\} \frac{N_j}{N_i} = e^{\frac{E_i - E_j}{k_B T}} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{E_1 - E_2}{k_B T}}$$

(A)  $dN_{1 \rightarrow 2}^{e\gamma} = N_1 \cdot dW_{anop}^{e\gamma} = N_1 \rho(\gamma T) B_{12} dt$

$dN_{2 \rightarrow 1}^{e\gamma} = N_2 \cdot dW_{exn}^{e\gamma} = N_2 \rho(\gamma T) B_{21} dt$

$$\frac{dN_{1 \rightarrow 2}^{e\gamma}}{dN_{2 \rightarrow 1}^{e\gamma}} = \frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}$$

АПТИЕЗ

$\tan \zeta = \frac{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}{\zeta} \Rightarrow \zeta = \dots = \zeta_A$

НЕПТИТЕЗ

$\tan \zeta = -\frac{\zeta}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}} \Rightarrow \zeta = \dots = \zeta_A$

$a^2 = \frac{m V_b L^2}{2 \hbar^2}$

γ r w o r b

$\zeta = \frac{kL}{2}$   
↓  
k

$\frac{2m}{\hbar^2} (E + V_b) = k^2, k > 0$   
↓  
E