Ø

<u>Ἀξίωμα:</u> ∃ τουλάχιστον 1 λάθος

Κομφούκιος
Confucius
Kǒng Fūzǐ
孔夫子

551 − 479 π.Χ. → μάχη Πλαταιών

Το ΑΚΟΥΩ και το ΞΕΧΝΩ
Το ΒΛΕΠΩ και το ΘΥΜΑΜΑΙ
Το ΚΑΝΩ και το ΚΑΤΑΛΑΒΑΙΝΩ

παραδόσεις μου
σημειώσεις σας
η-τάξη (σημειώσεις παραδόσεων
η-βιβλίο
λυμένα θέματα παλαιών ετών
ασκήσεις
σύνδεσμοι βιντεοδιαλέξεων)

delos.uoa.gr 2015, 2019 (2020)
youtube 2019

<u>ΩΡΑΡΙΟ</u>

ΠΕ 16:00 − 18:00
ΠΑ 16:00 − 18:00

<u>2η κβάντωση</u> <u>2nd quantization</u>

Η αναπαράσταση με τελεστές καταστροφής και δημιουργίας, δηλ. με τελεστές κλίμακος.
(καταβιβάσεως) (αναβιβάσεως) ladder operators

annihilation operator (lowering) creation operator (raising)

φωτόνια (μποζόνια) ηλεκτρόνια (φερμιόνια)

τα μποζόνια μετατίθονται | τα φερμιόνια αντιμετατίθονται

$[A,B] := AB - BA$ <u>μεταθέτης</u> commutator | $\{A,B\} := AB + BA$ <u>αντιμεταθέτης</u> anticommutator

άν $[A,B] = 0 \Rightarrow AB = BA$ | άν $\{A,B\} = 0 \Rightarrow AB = -BA$

<u>μετάθεση</u> commutation | <u>αντιμετάθεση</u> anticommutation

<u>μεταθετική ιδιότης</u> commutative property | <u>αντιμεταθετική ιδιότης</u> anticommutative property

οι τελεστές, οι οποίοι περιγράφουν καταστροφή και δημιουργία <u>μποζονίων</u> ακολουθούν σχέσεις <u>μεταθέσεως</u>

οι τελεστές, οι οποίοι περιγράφουν καταστροφή και δημιουργία <u>φερμιονίων</u> ακολουθούν σχέσεις <u>αντιμεταθέσεως</u>.

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ και LASERS

4 κεφάλαια (συνήθως) 1 κεφάλαιο

ΚΕΦ. 1 Εισαγωγή στη κβαντική φύση του φωτός

* μέλαν σώμα και συναφείς έννοιες

* $\rho(\nu, T)\,d\nu$ — συχνότητα, θερμοκρασία $\quad [\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz} \quad [\rho(\nu,T)\,d\nu] = \frac{J}{m^3}$

  πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος, σε θερμοδυναμική ισορροπία

* νόμοι Rayleigh-Jeans, Wien, Planck ... για την ακτινοβολία μέλανος σώματος

  Rayleigh-Jeans: κλασική θεωρία

  Wien: ταίριασμα με πείραμα σε υψηλές συχνότητες

  Planck: κβαντική θεωρία

* νόμος Stefan–Boltzmann
  * 1η διατύπωση: $\mathcal{E}(T)$ πυκνότητα ενέργειας $\quad [\mathcal{E}(T)] = \frac{J}{m^3}$
  * 2η διατύπωση: I ένταση ακτινοβολίας $\quad [I] = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2}$

* εξ. Maxwell, συνοριακές συνθήκες σε διεπιφάνεια, ..., πεδία σε κοιλότητες

* $g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{d(\#\text{κανονικών τρόπων ΗΜ πεδίου})}{d(\text{συχνότητα})}$ $\quad$ normal modes / κανονικοί τρόποι } συχνότητες και μορφές

* $g(\nu)$ & κλασική φυσική (θεώρημα ισοκατανομής ενέργειας) → ν. Rayleigh-Jeans

* $g(\nu)$ & κάποιες κβαντικές υποθέσεις → ν. Planck

* νόμος μετατοπίσεως Wien $\quad \lambda_0 T = \text{σταθερά} \quad$ ή $\quad \frac{\nu_0}{T} = \text{σταθερά}$

* φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

ΚΕΦ.2 Μηχανισμοί αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας – ΔΣ

(Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση
(Stimulated) Absorption

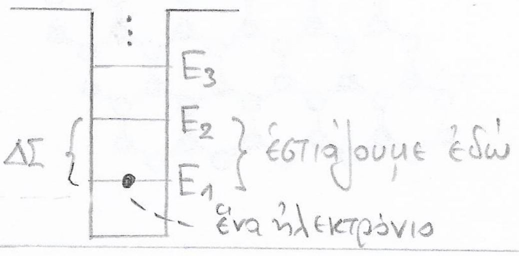
Αυθόρμητη Εκπομπή
Spontaneous Emission
ΔΕΝ ΟΦΕΙΛΕΤΑΙ ΣΤΟ ρ

Εξαναγκασμένη Εκπομπή
Stimulated Emission
ΟΦΕΙΛΕΤΑΙ ΣΤΟ ρ

LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

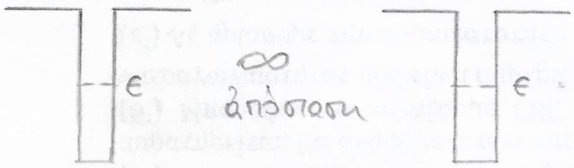
ΗΜ = ηλεκτρομαγνητικός
ΔΣ = διασταθμικό σύστημα (two-level system)
ΜΣ = μονοσταθμικό σύστημα
ΤΣ = τρισταθμικό σύστημα
ΠΣ = πολυσταθμικό σύστημα
ΔΣ π.χ. 2 στάθμες ενός ατόμου, μορίου, κβαντικής τελείας (quantum dot) ή αλλιώς νανοσωματιδίου (nanoparticle)

σχηματικά

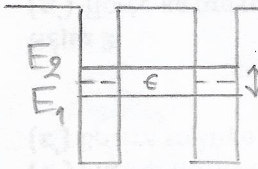


~σε όλο το μάθημα αγνοούμε το spin του ηλεκτρονίου ...

πώς φτιάχνουμε ΔΣ από ΜΣ ...



ΕΞΗΓΗΣΗ ΑΡΓΟΤΕΡΑ



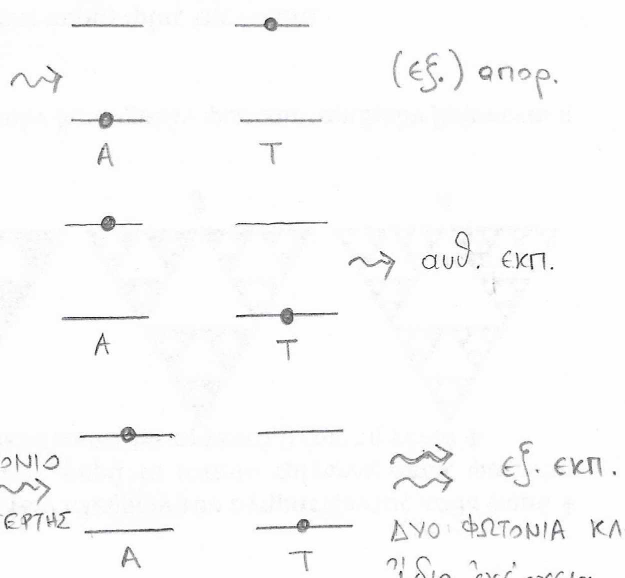
$E_2 - E_1 \simeq t = \langle \phi_A | \hat{H} | \phi_\Delta \rangle$

t: η αλληλεπίδραση μεταξύ των φρεάτων
t: transfer integral
ολοκλήρωμα μεταβιβάσεως

$dW^{\varepsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = B_{12}\, \rho(\nu,T)\, dt$ Εξαναγκασμένη Απορρόφηση

$dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\varepsilon\kappa\pi} = A_{21}\, dt$ Αυθόρμητη Εκπομπή

$dW^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon\kappa\pi} = B_{21}\, \rho(\nu,T)\, dt$ Εξαναγκασμένη Εκπομπή



ΔΥΟ ΦΩΤΟΝΙΑ ΚΛΩΝΟΙ
ίδια ενέργεια, ορμή (κατεύθυνση), φάση, πόλωση

$E_\varphi = h\nu$
$P_\varphi = \dfrac{E_\varphi}{c}$

Ιδιότητες που έχει το LASER:
- ίδια ενέργεια ⇒ μονοχρωματικότητα monochromaticity
- ίδια ορμή ⇒ κατευθυντικότητα directionality
- ίδια φάση ⇒ συνοχή coherence (συμφωνία)
- ίδια πόλωση* ⇒ πολωμένο φως polarization

(ΚΕΦ.3) Ημικλασική αντιμετώπιση της αλληλεπιδράσεως $\boxed{\text{ΗΜ ακτινοβολίας} - \text{ΔΣ}}$

→ ΗΜ πεδίο: κλασικά

→ ΔΣ: κβαντικά

$$\hat{H} = \underbrace{\hat{H}_0}_{\text{χωρίς ΗΜ πεδίο}} + U_\varepsilon(\vec{r}, t)$$

* αδιατάρακτο ΔΣ: χωρίς ΗΜ πεδίο
  διαταραγμένο ΔΣ: εντός ΗΜ πεδίου

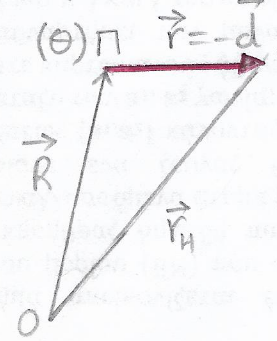
χρονικά εξαρτημένη θεωρία διαταραχών

* Διπολική Ροπή. Προσέγγιση Διπόλου

$\Theta \xleftarrow{\vec{d}} A$ $\quad \vec{d} = \vec{A\Theta}$

$q>0 \qquad -q<0$

$\vec{p} := q\vec{d}$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} = q\vec{d} \\ \vec{d} = \vec{A\Theta} \\ q = e > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p} := q\vec{d} = e(-\vec{r}) \Rightarrow \vec{p} = -e\vec{r}$$

$U_\varepsilon = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ $U_\varepsilon(\vec{r}, t)$

~ σε όλο το μάθημα αγνοούμε το spin
άρα και την αλληλεπίδραση
$U_B = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ σελίδα 3'

$\lambda \gg a_0$

μήκος κύματος — ακτίνα Bohr

$\left(\begin{array}{c}\text{π.χ.} \\ \text{ΔΣ} = \\ \text{άτομο}\end{array}\right)$

οπτικά μήκη κύματος

$\lambda \sim 500\ \text{nm} \qquad a_0 \simeq 0.529\ \text{Å} \sim 0.5\cdot 10^{-1}\ \text{nm}$

$$\frac{\lambda}{a_0} \simeq \frac{500\ \text{nm}}{0.5\ 10^{-1}\ \text{nm}} = 10^4$$

ομογενής = ...
ισότροπος = ...

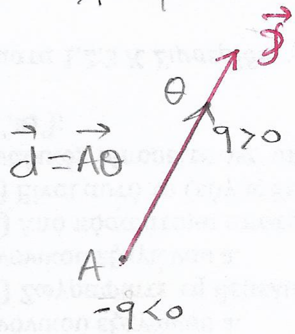
~ το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο χρονική εξάρτηση...
αλλά είναι χωρικά ομογενές

* χρονική εξέλιξη ΔΣ Συχνότητα Rabi
* RWA (Rotating Wave Approximation)
* Επιτρεπόμενες και Απαγορευμένες Οπτικές Μεταβάσεις εντός της Προσεγγίσεως Διπόλου

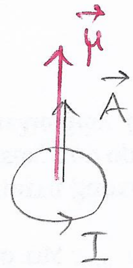
  π.χ. στο άτομο Υδρογόνου

Υπενθύμιση Αναλογιών

$\vec{E}$ (Ηλεκτρικό Πεδίο) $\qquad\qquad$ $\vec{B}$ (Μαγνητικό Πεδίο)



$\vec{d} = \vec{A\theta}$ $\qquad$ $\vec{p} = q\vec{d}$



$\vec{\mu} = I\vec{A}$

$\vec{p} = q\vec{d}$ ηλεκτρική διπολική ροπή $\qquad$ $\vec{\mu} = I\vec{A}$ μαγνητική διπολική ροπή

ή $\vec{\mu} = \frac{q}{2m}(\vec{L} + g\vec{S})$

$U_E = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ $\quad$ δυναμική ενέργεια $\quad$ $U_B = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$

$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$ $\quad$ (μηχανική) ροπή $\quad$ $\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$

$[\vec{p}] = Cm$ $\qquad$ $[\vec{\mu}] = Am^2$

$[U_E] = Cm\frac{V}{m} = CV = J$ $\qquad$ $[U_B] = Am^2T = N\cdot m = J$

$F = BIl$

$N = TAm$

$[\tau] = C\cdot m\cdot\frac{N}{C} = Nm$ $\qquad$ $[\tau] = Am^2\cdot T = N\cdot m$

το αφήνουμε έτσι $\qquad$ το αφήνουμε έτσι

ΚΕΦ.4 Κβαντική αντιμετώπιση της αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας – ΔΣ

→ ΗΜ πεδίο: κβαντικά

→ ΔΣ: κβαντικά

φωτόνιο (μποζόνιο) καλόβολο
ηλεκτρόνιο (φερμιόνιο) ακατάδεκτο

ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΟΥΜΕ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΑ;

* Χαμιλτονιανή ΗΜ πεδίου με τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονίων (μποζονίων) $\hat{H}_{HM,m}$
* Χαμιλτονιανή ΔΣ με σπίνορες/ με τελεστές καταστροφής κ δημιουργίας ηλεκτρονίων (φερμιονίων) $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$

---

* Σχέσεις μεταθέσεως μποζονίων commutation relations
* Σχέσεις αντιμεταθέσεως φερμιονίων anticommutation relations

ΜΕΤΑΘΕΤΗΣ COMMUTATOR $[A,B]=AB-BA$ όταν $[A,B]=0 \Rightarrow AB=BA$ ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ commutative property

ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΗΣ ANTICOMMUTATOR $\{A,B\}=AB+BA$ όταν $\{A,B\}=0 \Rightarrow AB=-BA$ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ anticommutative property

---

* Χαμιλτονιανή αλληλεπιδράσεως ΗΜ πεδίου – ΔΣ $\hat{U}_{\varepsilon,m}$ $\hat{H}_{AF,m}$ (ατομική φυσική)
* Χαμιλτονιανή Rabi

$$\hat{H}_{R,m}=\hbar\omega_m\underbrace{\hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m}_{\text{ΗΜ πεδίο}}+\hbar\Omega\underbrace{\hat{S}_+\hat{S}_-}_{\Delta\Sigma}+\hbar g_m\underbrace{(\hat{S}_++\hat{S}_-)(\hat{a}_m^{\dagger}+\hat{a}_m)}_{\text{ΗΜ πεδίο}-\Delta\Sigma}$$

ιδιοκαταστάσεις χωρίς αλληλεπίδραση ΗΜ πεδίου – ΔΣ: $|\uparrow,n_m\rangle$, $|\downarrow,n_m\rangle$

* Χαμιλτονιανή Jaynes–Cummings

$$\hat{H}_{JC,m}=\hbar\omega_m\hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m+\hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-+\hbar g^m(\hat{S}_+\hat{a}_m+\hat{S}_-\hat{a}_m^{\dagger})$$

* Μέσες (αναμενόμενες) τιμές μεγεθών για την $\hat{H}_{JC,m}$: $\langle\hat{a}_m^{\dagger}\hat{a}_m\rangle$, $\langle\hat{S}_+\hat{S}_-\rangle$, $\langle\hat{S}_+\hat{a}_m\rangle$, $\langle\hat{S}_-\hat{a}_m^{\dagger}\rangle$

* Απορρόφηση φωτονίου
* Εκπομπή φωτονίου

} ταλαντώσεις

#φωτονίων στην κοιλότητα

#ηλεκτρονίων στην άνω στάθμη

ΜΠΟΖΟΝΙΑ

$\hat{a}_m^{+}$ στιλέτο (dagger)

$\hat{a}_m^{+}$ Τελεστής δημιουργίας φωτονίου τού ΗΜ τρόπου με κυκλική συχνότητα ω_m
creation operator

$\hat{a}_m$ Τελεστής καταστροφής φωτονίου »
annihilation operator

Ταυτοχρόνως, ο $\hat{a}_m^{+}$ μπορεί να ονομαστεί Τελεστής αναβιβάσεως
raising operator
διότι αναβιβάζει την ενέργεια κατά $\hbar\omega_m$

ο $\hat{a}_m$ μπορεί να ονομαστεί Τελεστής καταβιβάσεως
lowering operator
διότι καταβιβάζει την ενέργεια κατά $\hbar\omega_m$

$\left.\hat{a}_m^{+}, \hat{a}_m\right\}$ Τελεστές κλίμακας ladder operators

Οι $\hat{a}_m^{+}, \hat{a}_m$ ακολουθούν σχέσεις μεταθέσεως μποζονίων $[\ ,\ ]$

ΦΕΡΜΙΟΝΙΑ

$\hat{S}_+$ Τελεστής αναβιβάσεως ηλεκτρονίου $\hat{S}_+ |\begin{smallmatrix}\circ\\ \bullet\end{smallmatrix}\rangle = |\begin{smallmatrix}\bullet\\ \circ\end{smallmatrix}\rangle$

$\hat{S}_-$ Τελεστής καταβιβάσεως ηλεκτρονίου $\hat{S}_- |\begin{smallmatrix}\bullet\\ \circ\end{smallmatrix}\rangle = |\begin{smallmatrix}\circ\\ \bullet\end{smallmatrix}\rangle$

Ταυτοχρόνως, ο $\hat{S}_+$ θα μπορούσε να ονομαστεί τελεστής δημιουργίας ηλεκτρονίου στην άνω στάθμη ΚΑΙ καταστροφής ηλεκτρονίου στην κάτω στάθμη

ο $\hat{S}_-$ θα μπορούσε να ονομαστεί Τελεστής καταστροφής ηλεκτρονίου στην άνω στάθμη ΚΑΙ δημιουργίας ηλεκτρονίου στην κάτω στάθμη

οι $\hat{S}_+, \hat{S}_-$ ακολουθούν σχέσεις αντιμεταθέσεως φερμιονίων $\{\ ,\ \}$

εναλλακτικός συμβολισμός $\hat{a}_i^{+}, \hat{a}_i$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΜΠΟΖΟΝΙΩΝ

boson commutation relations

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_\ell] = 0$$

$$[\hat{a}_m^+, \hat{a}_\ell^+] = 0$$

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_\ell^+] = \delta_{m\ell}$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΦΕΡΜΙΟΝΙΩΝ

fermion anticommutation relations

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^+\} = \delta_{ij}$$

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^+\} = 0$$

ΚΕΦ.5 LASERS

Laser He-Ne

$$\frac{dN_1}{dt},\ \frac{dN_2}{dt},\ \frac{d\rho}{dt}$$

? Εξισώσεις ρυθμών για τους πληθυσμούς των σταθμών (N_1, N_2) που συμμετέχουν στην έκπομπή συνεκτικής ΗΜ ακτινοβολίας και για την πυκνότητα ακτινοβολίας ρ εντός κοιλότητας LASER

Διαμήκεις και Εγκάρσιοι τρόποι ΗΜ πεδίου

Πληθυσμοί σταθμών (N_1, N_2) και πυκνότητα ΗΜ ακτινοβολίας (ρ) στη στάσιμη κατάσταση. → Τι είναι

? Άντληση. Κρίσιμη Άντληση.

? Αναστροφή πληθυσμού

Αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ρυθμών για τα N_1, N_2, ρ.
↑
matlab

? Άλλα είδη LASER...

ΚΕΦ.6 Πίνακας Πυκνότητας

Καθαρή κατάσταση και μικτή κατάσταση

Καθαρή κατάσταση: το σύστημα περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση

Μικτή κατάσταση: Δεν υπάρχει μια καθά ορισμένη κυματοσυνάρτηση για το σύστημα
π.χ. το σύστημα είναι συζευγμένο με μια δεξαμενή με την οποία μπορεί να ανταλλάσσει θερμότητα, σωματίδια κλπ

Πίνακας Πυκνότητας – Τελεστής πυκνότητας

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| \qquad |\Psi\rangle = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_N(t) \end{bmatrix} \qquad |\Psi\rangle = \sum_k c_k(t)\,|\Phi_k\rangle$$

π.χ. Πίνακας πυκνότητας κ τελεστής πυκνότητας σε καθαρή κατάσταση διστάθμικού συστήματος

$$\rho = \begin{bmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{bmatrix}$$

Η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας: εξ. Liouville-von Neumann

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \qquad \hat{H} = \hat{H}_0 + U_E(\vec{r}, t)$$

Η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας με μηχανισμούς αποδιεγέρσεως

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{i\hbar}{2}\{\hat{\Gamma}, \hat{\rho}\}$$

$$\hat{\Gamma}|\Phi_k\rangle = \gamma_k |\Phi_k\rangle$$

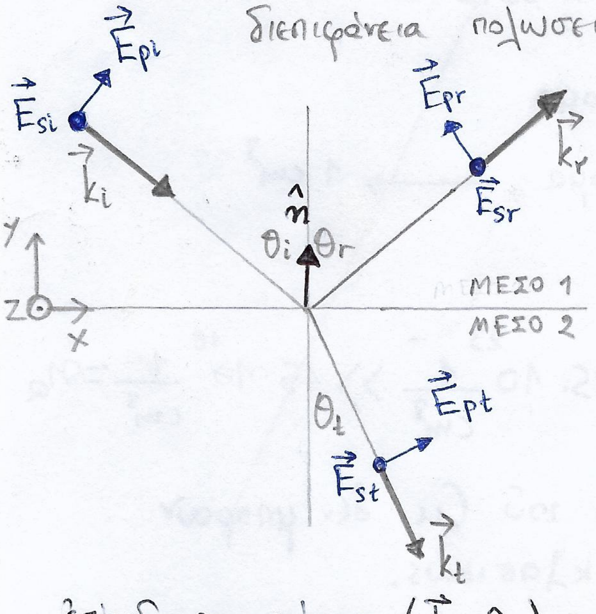
$$\hat{H} = \hat{H}_0 + U_E(\vec{r}, t) - \frac{i\hbar}{2}\hat{\Gamma}$$

ΚΕΦ. 7 ΔΙΑΦΟΡΑ

Τεχνικές απομονώσεων TEM_{00} κ $TEM_{p'q'}$ ανωτέρας τάξεως

Εξισώσεις Fresnel. Γωνία Brewster (η γωνία για την οποία ∄ ανάκλαση p πόλωση, δηλ. $r_{TM} = 0$)

διεπιφάνεια πολώσεις s, p



$$\boxed{\begin{array}{ccc} & T + R = 1 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \text{διελευσιμότητα...} & & \text{ανακλαστικότητα...} \end{array}}$$

$\tan\theta_i = \frac{n_t}{n_i} = n$

$\theta_i \stackrel{\text{ορ}}{=} \theta_B$ Brewster

$t_{TM} = \frac{1}{n}$

$$\left.\begin{aligned} t_{TE} &:= \frac{E_t}{E_i} \\ r_{TE} &:= \frac{E_r}{E_i} \end{aligned}\right\} t_{TE} = r_{TE} + 1 \qquad \left.\begin{aligned} t_{TM} &:= \frac{E_t}{E_i} \\ r_{TM} &:= \frac{E_r}{E_i} \end{aligned}\right\} r_{TM} - n\, t_{TM} = -1$$

$\vec{E}_s \perp q$ TE ή s πόλωση

επίπεδο προσπτώσεως $(\vec{k}_i, \hat{n}) := q$ $\quad \vec{E}_p \in q$ TM ή p πόλωση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΚΑΘΕ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ → έως +1 βαθμό
προς λύση

→ επαφή με το μάθημα

$\exists$ 1 τουλάχιστον λάθος

Πόσοι-ες από 3ο έτος

Πόσοι-ες αριστερόχειρες

Πόσοι-ες είναι από την κατεύθυνση

Α
Β
Γ
Δ
Ε

Οἱ διάφορες στατιστικές που ἀναφέρονται παρακάτω θα ἀναλυθοῦν στο μάθημα τῆς Στατιστικῆς Φυσικῆς.

μὲ θερμοδυναμικοὺς ὁρισμοὺς $\delta Q = dU + \delta W$

$\delta W = p dV - \sum_i \mu_i dN_i$

κατάσταση i με ἐνέργεια E_i

N = ὁ ἀριθμὸς τῶν σωματιδίων

$\beta := \frac{1}{k_B T}$

$\bar{n}_i$ = ὁ μέσος ἀριθμὸς σωματιδίων στην κατάσταση i με ἐνέργεια E_i

μ = χημικὸ δυναμικό

Ἐννοεῖται $\# i \gg N$

- Ἡ στατιστικὴ Maxwell-Boltzmann (MB) ἀφορᾶ κλασικὰ σωματίδια, για τα ὁποῖα θεωροῦμε πὼς δεν ὑπάρχουν κβαντισμένα ἐνεργειακὰ ἐπίπεδα, π.χ. οἱ δομικοὶ λίθοι τοῦ κλασικοῦ ἰδανικοῦ ἀερίου.

$$\boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}}} = e^{-\beta E_i} e^{\beta\mu} \qquad \text{MB}$$

Ἐπειδὴ $\boxed{\sum_i \bar{n}_i = N} \Rightarrow \sum_i e^{-\beta E_i} e^{\beta\mu} = N \Rightarrow \boxed{e^{\beta\mu} = \frac{N}{\sum_i e^{-\beta E_i}}}$

$$\left.\right\} \bar{n}_i = \frac{N e^{-\beta E_i}}{\sum_i e^{-\beta E_i}}$$

$\boxed{N}$ ἡ σχέση αὐτὴ καθορίζει το μ

- Ἡ στατιστικὴ Fermi-Dirac (FD) ἀφορᾶ κβαντικὰ σωματίδια, τα ὁποῖα ὑπακούουν στην ἀπαγορευτικὴ ἀρχὴ Pauli ὅτι μόνο ἕνα σωματίδιο μπορεῖ να καταλάβει μία κβαντικὴ κατάσταση. ΑΚΑΤΑΔΕΚΤΑ ΣΝΟΜΠ
  Τα σωματίδια αὐτὰ λέγονται φερμιόνια (fermions) και ἔχουν ἰδιοστροφορμὴ (σπιν) s ἡμιφυσικὸ («ἡμιακέραιο») πολλαπλάσιο (1/2, 3/2, 5/2, ...) τῆς ποσότητας $\hbar$.
  Τέτοια εἶναι π.χ. τα ἠλεκτρόνια, πρωτόνια, νετρόνια.
  Για τη στατιστικὴ FD ἰσχύει:

$$\boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}+1}} \qquad \text{FD}$$

- Ἡ στατιστικὴ Bose-Einstein (BE) ἀφορᾶ κβαντικὰ σωματίδια, με την ἰδιότητα ὅτι μια κβαντικὴ κατάσταση μπορεῖ να καταλαμβάνεται ἀπὸ ὁσαδήποτε σωματίδια. ΚΑΤΑΔΕΚΤΙΚΑ ΚΑΛΟΒΟΛΑ
  Τα σωματίδια αὐτὰ λέγονται μποζόνια (bosons) και ἔχουν ἰδιοστροφορμὴ (σπιν) s φυσικὸ («ἀκέραιο») πολλαπλάσιο (0, 1, 2, ...) τῆς ποσότητας $\hbar$.
  Τέτοια εἶναι π.χ. τα φωτόνια, τα ἄτομα ${}^4_2He$, οἱ πυρῆνες τῶν ἀτόμων ${}^4_2He$.
  Για τη στατιστικὴ BE ἰσχύει:

$$\boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}-1}} \qquad \text{BE}$$

Σε σύστημα FD ή BE με σταθερό N, ή σχέση $\boxed{\sum_i \overline{n_i} = N}$ καθορίζει το μ.

Συνοπτικώς, λοιπόν, μπορούμε να γράφουμε

$$\boxed{\overline{n_i} = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)} \begin{smallmatrix} +1 \\ -1 \\ \text{ή } 0 \end{smallmatrix}} \quad \begin{smallmatrix} FD \\ BE \\ MB \end{smallmatrix}}$$

και ή σχέση

$$\boxed{\sum_i \overline{n_i} = N}$$ καθορίζει το μ

Οι στατιστικές FD και BE συγκλίνουν στη στατιστική MB:

$FD, BE \xrightarrow[T\uparrow]{n\downarrow} MB$

- όταν ή συγκέντρωση των σωματιδίων n είναι μικρή σε σχέση με τη λεγόμενη κβαντική συγκέντρωση ($n\downarrow$)

$$n < n_Q \qquad n_Q = \left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

σε θερμοκρασία δωματίου (T=300K), για τα πρωτόνια $n_Q \approx 1000\ nm^{-3}$, ενώ, για τα ηλεκτρόνια $n_Q \approx 0.015\ nm^{-3}$.

- σε υψηλές θερμοκρασίες ($T\uparrow$)

Διότι:

- όριο χαμηλής συγκεντρώσεως ⟹ N πολύ μικρός ⟹ $\overline{n_i} \ll 1,\ \forall i$ ⟹

$$e^{\beta(E_i-\mu)} \gg 1,\ \forall i$$

- όριο υψηλής θερμοκρασίας ⟹ $\beta = \frac{1}{k_B T}$ μικρό

⇓

πολλές στάθμες υψηλής ενέργειας (και $E_i > \mu$) είναι κατειλημμένες δηλαδή ή κατανομή απλώνει ενεργειακώς με μικρές πιθανότητες καταλήψεως ⟹

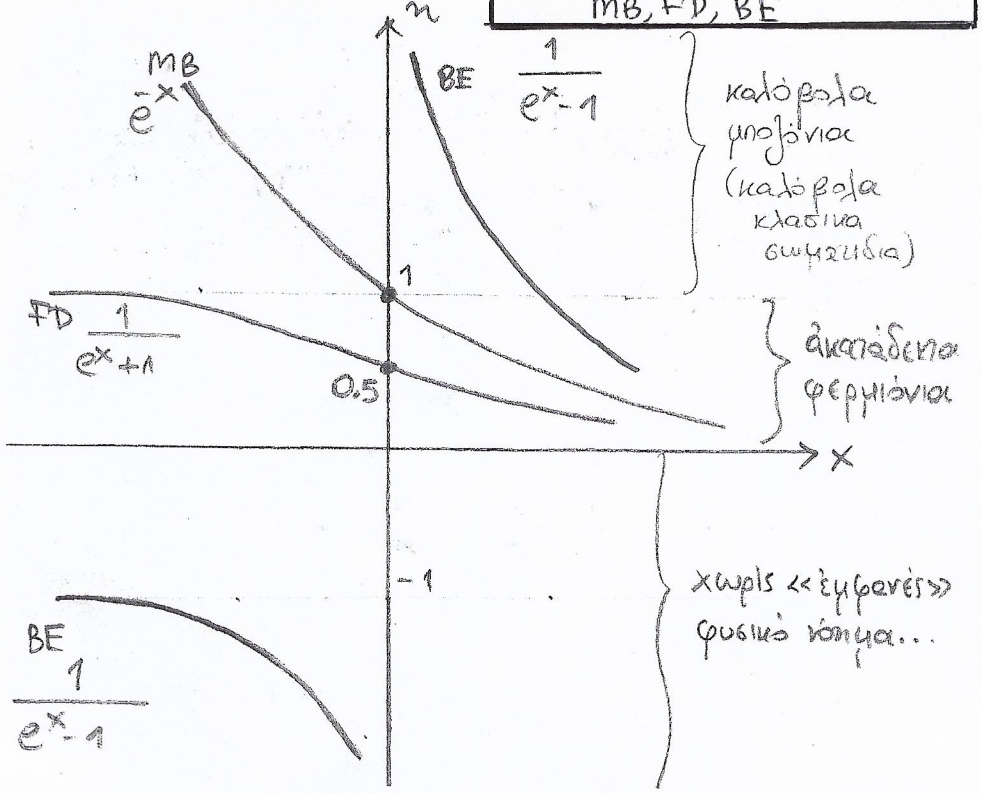
$$\overline{n_i} \ll 1,\ \forall i \Rightarrow$$
$$e^{\beta(E_i-\mu)} \gg 1,\ \forall i$$

Στις περιπτώσεις αυτές

$$\overline{n_i} = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)} \pm 1} \simeq \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}}$$

δηλαδή οι FD και BE συγκλίνουν στη MB.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ MB, FD, BE

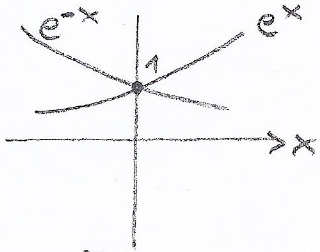


$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)} \pm 1 \;\text{ή}\; 0} \quad \begin{array}{l} \text{FD} \\ \text{BE} \\ \text{MB} \end{array}$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} \pm 1 \;\text{ή}\; 0}$$

$$x := \beta(E-\mu)$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^x \pm 1 \;\text{ή}\; 0}$$



MB $\bar{n} = \frac{1}{e^x} = e^{-x} > 0, \forall x$ $\quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

FD $\bar{n} = \frac{1}{e^x+1} > 0, \forall x$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x+1} = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x+1} = 1$

BE $\bar{n} = \frac{1}{e^x-1}$

$x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow \bar{n} > 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0$

$x < 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0 \Rightarrow \bar{n} < 0$!

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^x-1} = -\infty \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x-1} = -1$

χωρίς «εμφανές» φυσικό νόημα...

$$\boxed{n_Q = \left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}}$$ κβαντική συγκέντρωση

$$\left(\frac{\cancel{kg}\cdot \cancel{s^2}}{\cancel{kg}\, m\, \cancel{s^2}\, m}\right)^{3/2} = \frac{1}{m^3}$$

• πρωτόνια $m \simeq 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg$ σε $T=300K$

$$n_Q \approx \left(\frac{1.67\cdot 10^{-27}\,kg\; 1.38\cdot 10^{-23}\,\cancel{J}\; 300\cancel{K}}{2\pi\cdot 1\cdot 10^{-68}\,J^{\cancel{2}} s^2\, \cancel{K}}\right)^{3/2} \simeq 1154\cdot\left(10^{18}\right)^{3/2}\frac{1}{m^3} \approx 10^{3}\cdot 10^{27}\frac{1}{m^3} = 10^{30}\,m^{-3}$$

$$n_Q \approx 10^{30}\frac{1}{m^3} = 10^{30}\frac{1}{10^{30}\,Å^3} = 10^{30}\frac{1}{10^{27}\,nm^3} = 1\,\frac{1}{Å^3} = 1000\,\frac{1}{nm^3} = 10^{30}\frac{1}{10^{6}\,cm^3} = 10^{24}\frac{1}{cm^3}$$

• ηλεκτρόνια $m \simeq 9.1\cdot 10^{-31}\,kg$ σε $T=300K$

$$n_Q \approx \left(\frac{9.1\cdot 10^{-31}\,kg\; 1.38\cdot 10^{-23}\,J\; 300K}{2\pi\cdot 1\cdot 10^{-68}\,J^2 s^2\; K}\right)^{3/2} \simeq 14682\left(10^{14}\right)^{3/2}\frac{1}{m^3} \simeq 15\cdot 10^{3}\cdot 10^{21}\frac{1}{m^3}$$

$$n_Q \approx 15\cdot 10^{24}\frac{1}{m^3} = 15\; 10^{24}\frac{1}{10^{30}\,Å^3} = 15\; 10^{24}\frac{1}{10^{27}\,nm^3} = 15\cdot 10^{-6}\frac{1}{Å^3} = 15\cdot 10^{-3}\frac{1}{nm^3}$$
$$= 15\cdot 10^{24}\frac{1}{10^{6}\,cm^3} = 15\cdot 10^{18}\frac{1}{cm^3}$$

Συνοψίζοντας: <u>πρωτόνια σε 300K</u> $n_Q \simeq 10^{30}\frac{1}{m^3} = 10^{24}\frac{1}{cm^3} = 10^{3}\frac{1}{nm^3} = 1\,\frac{1}{Å^3}$

<u>ηλεκτρόνια σε 300K</u> $n_Q \simeq 15\cdot 10^{24}\frac{1}{m^3} = 15\cdot 10^{18}\frac{1}{cm^3} = 15\cdot 10^{-3}\frac{1}{nm^3} = 15\cdot 10^{-6}\frac{1}{Å^3}$

Cu πυκνότητα $\rho \simeq 9\,\frac{g}{cm^3} = 9000\,\frac{kg}{m^3}$ ΑΒ $\simeq 63.5$

σε 63.5g έχουμε $6.022\cdot 10^{23}$ άτομα

9 g $\frac{9}{63.5}\cdot 6.022\cdot 10^{23}$ άτομα $\longrightarrow$ 1 cm^3

Κάθε άτομο Cu έχει 1 «ελεύθερο» ηλεκτρόνιο

$$n_{ηλεκτρ} \simeq \frac{9}{63.5}\,6.022\cdot 10^{23}\frac{1}{cm^3} \approx 0.85\cdot 10^{23}\frac{1}{cm^3} \gg 15\cdot 10^{18}\frac{1}{cm^3} = n_Q$$

Άρα τα ηλεκτρόνια του Cu δεν μπορούν να περιγραφτούν κλασικώς.