ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ της αλληλεπιδράσεως ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ — ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ

Στην ημικλασική προσέγγιση για το ΗΜ πεδίο χρησιμοποιούσαμε τη γλώσσα των ανυσματικών μεγεθών $\vec{E}, \vec{B}$.

Υποθέσαμε το πλάτος του $\vec{E}$ (και του $\vec{B}$) σταθερό: η απορρόφηση ή η εκπομπή να μην επηρεάζει το πλάτος του πεδίου.

Για να ισχύει κάτι τέτοιο θα πρέπει η ΗΜ ακτινοβολία να είναι πυκνή.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων

Πρέπει να βρεθεί μια έκφραση της Χαμιλτονιανής του ΗΜ πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων αντί της γλώσσας των $\vec{E}, \vec{B}$.

χρειαζόμαστε

$\hat{H}_{HM}$

$\hat{H}_{\Delta\Sigma}$

$\hat{H}_{\Delta\Sigma - HM}$

ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΣΠΙΝΟΡΕΣ

Σπίνορας (spinor) Σπινωρ = διάνυσμα στήλη

για ΔΣ έχει 2 συνιστώσες $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

για ΤΣ έχει 3 συνιστώσες $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

ορισμοί

$|\;\rangle = \begin{pmatrix}\circ\\ \circ\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = |0\rangle$ απουσία ηλεκτρονίου στο ΔΣ
ενέργεια μηδενική

$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}\circ\\ \bullet\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = |1\rangle$ ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη
ενέργεια E_1

$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}\bullet\\ \circ\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = |2\rangle$ ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη
ενέργεια E_2

> ερμιτιανός συζυγής or Hermitian conjugate
> $A^\dagger$ conjugate transpose or Hermitian transpose
> $(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}$ † dagger στιλέτο

$E_2 - E_1 := \hbar\Omega$

$\hat{S}_+ = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\quad \hat{S}_- = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad \hat{S}_+^\dagger = \hat{S}_-$

$\hat{S}_+|0\rangle = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = |0\rangle$ καμία δράση $\quad \hat{S}_+|0\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_+|1\rangle = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = |2\rangle$ Το ανέβασα $\quad \hat{S}_+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$

$\hat{S}_+|2\rangle = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = |0\rangle$ Το πετά έξω $\quad \hat{S}_+|\uparrow\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|0\rangle = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = |0\rangle$ καμία δράση $\quad \hat{S}_-|0\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|1\rangle = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = |0\rangle$ Το πετά έξω $\quad \hat{S}_-|1\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|2\rangle = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = |1\rangle$ Το κατέβασα $\quad \hat{S}_-|2\rangle = |1\rangle$

$\hat{S}_+$ τελεστής αναβιβάσεως
raising operator

$\hat{S}_-$ τελεστής καταβιβάσεως
lowering operator

Πίνακες Pauli και σχέσεις τους με τους $\hat{S}_+, \hat{S}_-$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$ καθώς και οι κυκλικές εναλλαγές τους

π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$

- $\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\} = \{\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\} = \{\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0}$

Δηλαδή οι πίνακες Pauli αντιμετατίθενται.

π.χ. $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \hat{0} \Rightarrow \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x$

$\hat{\sigma}_y \cdot \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_y = \hat{0} \Rightarrow \hat{\sigma}_y \cdot \hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_y$

$\hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_z = \hat{0} \Rightarrow \hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_z$

π.χ. $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

- $\hat{S}_+\hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$ ή $\boxed{\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{I}}$

$\hat{S}_+\hat{S}_- - \hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_z$ ή $[\hat{S}_+, \hat{S}_-] = \hat{\sigma}_z$

$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x$

$\hat{S}_+ - \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\hat{\sigma}_y$

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{S}_+\hat{S}_- &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_-\hat{S}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

... μόλις τα είπαμε...

$$\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{I}}$$

Μπορούμε να το γράψουμε και στη μορφή $\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{\mathbb{I}}$

$\{A, B\} = AB + BA$ άγκιστρο Poisson ή αντιμεταθέτης anticommutator

$[A, B] = AB - BA$ μεταθέτης commutator

όταν $\{A, B\} = 0 \Longrightarrow AB + BA = 0 \Longrightarrow AB = -BA$ αντιμεταθετική ιδιότητα anticommutative property

όταν $[A, B] = 0 \Longrightarrow AB - BA = 0 \Longrightarrow AB = BA$ μεταθετική ιδιότητα commutative property

Οι τελεστές καταστροφής-δημιουργίας / καταβιβάσεως-αναβιβάσεως

σχέσεις αντιμεταθέσεως ακολουθούν των φερμιονίων π.χ. τα ηλεκτρόνια
anticommutative relations fermions electrons

σχέσεις μεταθέσεως ακολουθούν των μποζονίων π.χ. τα φωτόνια
commutative relations bosons photons

Ἡ Χαμιλτονιανὴ τοῦ ΔΣ εἶναι

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+} = E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$$

ἀφοῦ

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = E_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ἰδιοάνυσμα ἰδιοτιμὴ ἰδιοάνυσμα

$\overline{}\ E_2 = E_1 + \hbar\Omega$

$\overline{}\ E_1$

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \end{pmatrix} = E_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ἰδιοάνυσμα ἰδιοτιμὴ ἰδιοάνυσμα

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+}$$

Ἂν θέσουμε $E_1 = 0 \Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$ γίνεται

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-}$$

$\overline{}\ E_2 = \hbar\Omega$

$\overline{}\ E_1$ μηδέν

Ἂν θέσουμε

$\overline{}\ E_2$

$\overline{}$ μηδέν $\quad E_2 = +\dfrac{\hbar\Omega}{2} \quad E_1 = -\dfrac{\hbar\Omega}{2}$

$\overline{}\ E_1$

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_+ \hat{S}_- - \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_- \hat{S}_+ = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \dfrac{\hbar\Omega}{2} \hat{\sigma}_z}$ ἡ μορφὴ τοῦ $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$ στὸ ἄρθρο τῶν Jaynes – Cummings

Ὁ τελεστὴς $\hat{S}_+\hat{S}_-$ μετρᾶ τον ἀριθμό τῶν ἠλεκτρονίων στην ΑΝΩ ΣΤΑΘΜΗ

ἀφοῦ

$$\hat{S}_+\hat{S}_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_+\hat{S}_-|\uparrow\rangle=1|\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_+\hat{S}_-|\downarrow\rangle=0|\downarrow\rangle$$

Ὁ τελεστὴς $\hat{S}_-\hat{S}_+$ μετρᾶ τον ἀριθμό τῶν ἠλεκτρονίων στην ΚΑΤΩ ΣΤΑΘΜΗ

ἀφοῦ

$$\hat{S}_-\hat{S}_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_-\hat{S}_+|\uparrow\rangle=0|\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_-\hat{S}_+|\downarrow\rangle=1|\downarrow\rangle$$

ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$(\hat{S}_+)^\dagger=\hat{S}_-$$

$$\{\hat{S}_+,\hat{S}_+^\dagger\}=\{\hat{S}_+,\hat{S}_-\}=\hat{S}_+\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_+=\hat{\mathbb{I}}$$

$$\{\hat{S}_-,\hat{S}_-^\dagger\}=\{\hat{S}_-,\hat{S}_+\}=\hat{S}_-\hat{S}_++\hat{S}_+\hat{S}_-=\hat{\mathbb{I}}$$

$$\{\hat{S}_+,\hat{S}_+\}=\hat{S}_+\hat{S}_++\hat{S}_+\hat{S}_+=2\hat{S}_+\hat{S}_+=2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}:=\hat{0}$$

$$\{\hat{S}_-,\hat{S}_-\}=\hat{S}_-\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_-=2\hat{S}_-\hat{S}_-$$

$$=2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\hat{0}$$

Ὁ $\hat{S}_+$ εἶναι τελεστὴς ἀναβιβάσεως (raising operator)
διότι ἀναβιβάζει τὴν ἐνέργεια
δημιουργῶντας ἠλεκτρόνια ἐνέργειας $\hbar\Omega$
ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία
τελεστὴς δημιουργίας (creation operator).

Ὁ $\hat{S}_-$ εἶναι τελεστὴς καταβιβάσεως (lowering operator)
διότι καταβιβάζει τὴν ἐνέργεια
καταστρέφοντας ἠλεκτρόνια με ἐνέργεια $\hbar\Omega$
ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία
τελεστὴς καταστροφῆς (annihilation operator)

Ἐπειδὴ τα ἠλεκτρόνια εἶναι φερμιόνια,
ἰσχύει ἡ ἀπαγορευτικὴ ἀρχὴ τοῦ Pauli
δηλ. μποροῦμε να ἔχουμε μόνο ἕνα ἠλεκτρόνιο με ἐνέργεια $\hbar\Omega$
(ἀγνοοῦμε το spin σε ὅλο αὐτό το μάθημα)

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΦΕΡΜΙΟΝΙΩΝ π.χ. ἠλεκτρονίων

$\hat{a}_i$ τελεστής καταστροφής φερμιονίου στην κατάσταση i

$\hat{a}_i^\dagger$ τελεστής δημιουργίας φερμιονίου στην κατάσταση i

Για τα φερμιόνια ἰσχύουν οἱ σχέσεις ἀντιμετάθεσεως

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$$

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0 \Rightarrow \{\hat{a}_r^\dagger, \hat{a}_r^\dagger\} = 0 \Rightarrow 2\hat{a}_r^\dagger\hat{a}_r^\dagger = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{a}_r^\dagger\hat{a}_r^\dagger = 0}}$$

το ὁποῖο σημαίνει ὅτι δεν μποροῦμε να βάλουμε δύο φερμιόνια στην ἴδια κατάσταση, το ὁποῖο εἶναι ἡ ἀπαγορευτική ἀρχή Pauli.

συχνά καλεῖται τελεστής δημιουργίας στη Κβαντική Μηχανική
creation operator

τελεστής ἀναβιβάσεως
raising operator
lowering operator
τελεστής καταβιβάσεως

$\Big\}$ ladder operators
τελεστές κλίμακας

γραμμική ἄλγεβρα
linear algebra

συχνά καλεῖται τελεστής καταστροφής στη Κβαντική Μηχανική
annihilation operator

Σε πολλές περιοχές της Φυσικής κ της Χημείας, ἡ χρήση αὐτῶν των τελεστών ἀντί κυματοσυναρτήσεων λέγεται δεύτερη κβάντωση second quantization

ΔΣ

στοιχειώδεις διεγέρσεις από τη θεμελιώδη κατάσταση

elementary excitations from ground state

$$|x\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\text{πάνω}\\ \downarrow\\ \text{κάτω}\end{matrix} \qquad \langle x| = (\alpha^* \;\; \beta^*) \quad \text{αριστερά} \longrightarrow \text{δεξιά}$$

$$|\downarrow\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \langle\downarrow| = \langle 1| = (0 \;\; 1)$$

$$\langle\downarrow|\downarrow\rangle = (0\;\;1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1$$

$$|\uparrow\rangle = |2\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \langle\uparrow| = \langle 2| = (1 \;\; 0)$$

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = (1\;\;0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1$$

μετά

$$\hat{a}^{+}_{12} := |\uparrow\rangle\langle\downarrow| = |2\rangle\langle 1| = \underset{2\times1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \underset{1\times2}{(0 \;\; 1)} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \hat{S}_+$$

πρώτα

$$\hat{a}_{12} := |\downarrow\rangle\langle\uparrow| = |1\rangle\langle 2| = \underset{2\times1}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} \underset{1\times2}{(1 \;\; 0)} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \hat{S}_-$$

Άρα η Χαμιλτονιανή $\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\,\hat{S}_+\hat{S}_-$ γράφεται

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\,\hat{a}^{+}_{12}\hat{a}_{12} = \hbar\Omega\,|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\,|\downarrow\rangle\langle\uparrow| = \hbar\Omega\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$= \hbar\Omega\,|2\rangle\langle 1|\,|1\rangle\langle 2| = \hbar\Omega\,|2\rangle\langle 2|$$

$$= \hbar\Omega \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\;\;1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\;\;0) = \hbar\Omega\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$= \hbar\Omega\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε τις εναλλακτικές γραφές

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\,\hat{S}_+\hat{S}_- = \hbar\Omega\,\hat{a}^{+}_{12}\hat{a}_{12} = \hbar\Omega\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| = \hbar\Omega\,|2\rangle\langle 2|$$

$$= \hbar\Omega\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\;\;0) = \hbar\Omega\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hbar\Omega & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Γενικώς:

$$\boxed{\hat{a}_{\mu\nu} := |\mu\rangle\langle\nu| \iff \hat{a}^{+}_{\mu\nu} = |\nu\rangle\langle\mu|}$$

$$\hat{a}_{12}^{+}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle = \underset{2\times1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}\underset{1\times2}{\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$

$$\hat{a}_{12}^{+}|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$

$$\hat{a}_{12}^{+}|0\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$

$$\hat{a}_{12}|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \ldots = |\downarrow\rangle$$

$$\hat{a}_{12}|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \ldots = |0\rangle$$

$$\hat{a}_{12}|0\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|0\rangle = \ldots = |0\rangle$$

Παρομοίως θα γράφαμε

$$\hat{a}_{21} := |2\rangle\langle1| = \hat{a}_{12}^{+}$$

$$\hat{a}_{21}^{+} := |1\rangle\langle2| = \hat{a}_{12}$$

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longrightarrow \langle x| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* & \gamma^* \end{pmatrix}$$

Γενικώς:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}_{\mu\nu} &= |\mu\rangle\langle\nu| \\ \hat{a}^{+}_{\mu\nu} &= |\nu\rangle\langle\mu| \end{aligned}}$$

$$\hat{a}^{+}_{12} := |2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12} := |1\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13} := |3\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13} := |1\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{12}|1\rangle = |2\rangle\langle 1|1\rangle = |2\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}|2\rangle = |1\rangle\langle 2|2\rangle = |1\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13}|1\rangle = |3\rangle\langle 1|1\rangle = |3\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}|3\rangle = |1\rangle\langle 3|3\rangle = |1\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13}|3\rangle = |3\rangle\langle 1|3\rangle = |0\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}^{\dagger}|3\rangle = |2\rangle\langle 1|3\rangle = |2\rangle \cdot 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}|3\rangle = |1\rangle\langle 2|3\rangle = |1\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}^{\dagger}|2\rangle = |3\rangle\langle 1|2\rangle = |3\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}|2\rangle = |1\rangle\langle 3|2\rangle = |1\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_{TI} = \hbar\Omega_{12}\,\hat{a}_{12}^{\dagger}\,\hat{a}_{12} + \hbar\Omega_{13}\,\hat{a}_{13}^{\dagger}\,\hat{a}_{13}$$

$$= \hbar\Omega_{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \hbar\Omega_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \hbar\Omega_{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \hbar\Omega_{13}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \hbar\Omega_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\Omega_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}_{TI} = \hbar\Omega_{12}\,|2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2| + \hbar\Omega_{13}\,|3\rangle\langle 1|1\rangle\langle 3|$$

$$= \hbar\Omega_{12}\,|2\rangle\langle 2| + \hbar\Omega_{13}\,|3\rangle\langle 3|$$

$$\hat{a}_{23} = |2\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1\ 0\ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{a}_{23}|3\rangle = |2\rangle$$

$$\hat{a}_{23}^{\dagger} = |3\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(0\ 1\ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{a}_{23}^{\dagger}|2\rangle = |3\rangle$$

$$\hat{a}_{21} = |2\rangle\langle 1| = \hat{a}_{12}^{\dagger} \qquad \hat{a}_{31} = |3\rangle\langle 1| = \hat{a}_{13}^{\dagger}$$

$$\hat{a}_{21}^{\dagger} = |1\rangle\langle 2| = \hat{a}_{12} \qquad \hat{a}_{31}^{\dagger} = |1\rangle\langle 3| = \hat{a}_{13}$$

$$\hat{a}_{32} = |3\rangle\langle 2| = \hat{a}_{23}^{\dagger}$$

$$\hat{a}_{32}^{\dagger} = |2\rangle\langle 3| = \hat{a}_{23}$$