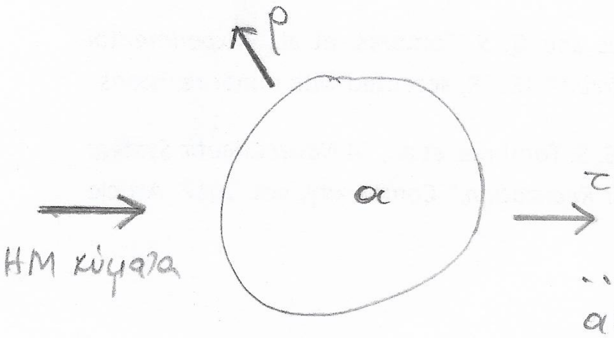
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

ΜΕΛΑΝ ΣΩΜΑ κ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ



$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

...απορροφήσεως absorption... ...ανακλάσεως reflection... ...διελεύσεως transmission...

συντελεστής... ...coefficient

α: το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που απορροφάται από το σώμα

ρ: » ανακλάται »

τ: » διέρχεται »

<u>μέλαν σώμα</u> (black body) ένα εξιδανικευμένο σώμα, το οποίο <u>απορροφά όλη</u> την προσπίπτουσα σε αυτό ΗΜ ακτινοβολία, <u>ανεξαρτήτως συχνότητας</u> και <u>ανεξαρτήτως γωνίας προσπτώσεως</u>.
(μαύρο)

δηλαδή $\rho = 0$, $\tau = 0$, $\alpha = 1$ $\forall$ συχνότητα
$\forall$ γωνία προσπτώσεως

Αν ίσχυαν μόνο τα παραπάνω, τότε λόγω της συνεχούς απορροφήσεως ενέργειας, η θερμοκρασία του σώματος θα αυξανόταν συνεχώς.

Έτσι, ένα μέλαν σώμα, το οποίο βρίσκεται σε <u>θερμοδυναμική ισορροπία</u> (άρα και σε σταθερή θερμοκρασία) <u>θα πρέπει να επαν-εκπέμπει ΗΜ ακτινοβολία</u>, η οποία καλείται <u>ακτινοβολία μέλανος σώματος</u> black-body radiation, έτσι ώστε να διατηρείται το ενεργειακό ισοζύγιο.

Η ακτινοβολία μέλανος σώματος γίνεται σύμφωνα με το <u>νόμο του Planck</u>, ούτως ώστε το φάσμα της εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία δηλ. $\rho(\nu, T)$
<u>ανεξαρτήτως</u>: σχήματος, συστάσεως του μέλανος σώματος, γωνίας εκπομπής

Ένα μέλαν σώμα, σε θερμοδυναμική ισορροπία, έχει τις αξιοσημείωτες ιδιότητες:

(Ι1) είναι ιδανικός εκπομπός, δηλ. εκπέμπει σε κάθε συχνότητα τουλάχιστον όση ενέργεια εκπέμπει οποιοδήποτε άλλο σώμα ταυτόσημης θερμοκρασίας.

(Ι2) είναι ισότροπος εκπομπός, δηλ. η ακτινοβολία του διασπείρεται ισοτρόπως, ανεξαρτήτως κατευθύνσεως

Τα πραγματικά σώματα εκπέμπουν κλάσμα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος

συντελεστής εκπομπής ή εκπεμπότης
emission coefficient or emissivity ϵ — το ποσοστό της HM ακτινοβολίας, το οποίο επαν-εκπέμπεται από το σώμα

εξ ορισμού $\epsilon_{\text{μέλανος σώματος σε θερμοδυν. ισορ.}} = 1$

δηλ. συνοψίζοντας για το μέλαν σώμα σε θερμοδυν. ισορροπία ισχύει $a=1,\ \rho=0,\ \tau=0,\ \epsilon=1$

γκρίζο σώμα gray body $\epsilon<1$, a, ρ, τ

λευκό σώμα white body $\rho=1$ $a=0$ $\tau=0$

αδιαφανές σώμα opaque body $\tau=0$ $a+\rho=1$

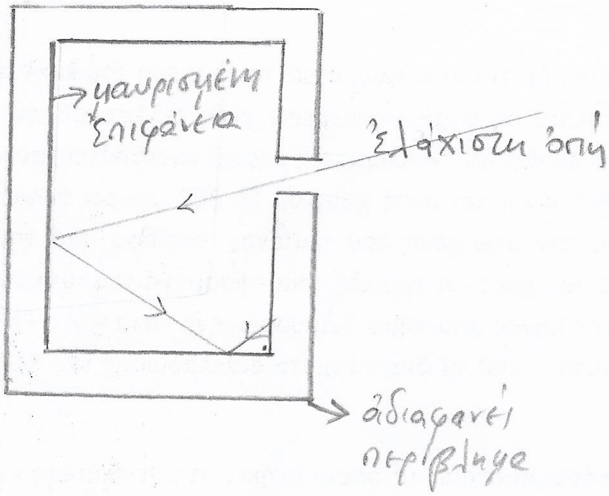
διαφανές σώμα transparent body $\tau=1$ $a=0$ $\rho=0$

ενεργός θερμοκρασία
effective temperature — ενός σώματος π.χ. αστέρος, πλανήτου, κλπ

είναι η θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος, το οποίο θα εξέπεμπε την ίδια συνολική (δηλ. ολοκληρωμένη σε όλες τις συχνότητες) ένταση ακτινοβολίας I $\left([I]=\frac{W}{m^2}\right)$

Προσεγγιστική πραγμάτωση μέλανος σώματος

κοιλότητα με οπή
cavity with a hole   photonics: "cavity"
(cavity with a hole)



1898
1901 Otto Lummer & Ferdinand Kurlbaum

σήμερα ∃ ενδιαφέρον για
σχεδόν μέλανα σώματα
(near-black bodies)

εφαρμογές
απόκρυψη (ραντάρ)
συλλέκτες ηλ. ενέργειας
ανιχνευτές υπέρυθρης ακτινοβ.
τηλεσκόπια, κάμερες (ως π.χ. αντιανακλαστικές επιφάνειες για τη μείωση του διάχυτου ή αδέσποτου φωτός)

Προσεγγιστικά μέλανα σώματα
αιθάλη
από μαύρο χρώμα $\alpha < 0.975$
super black $\alpha \simeq 0.996$ $\rho = 0.004$
Vantablack (με νανοσωλήνες C) $\alpha = 0.9996$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$ ν. Planck

$$[\rho(\nu, T)] = \frac{J}{m^3\, Hz}$$

Πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία

$\rho(\nu,T)\,d\nu$

$[\rho(\nu,T)\,d\nu] = \frac{J}{m^3}$

$[\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$

Νόμος του Planck

και σύγκριση με τις προσεγγίσεις

Rayleigh-Jeans κ. Wien

«Υπεριώδης καταστροφή» κ. «Πρόβλημα μακρινού υπερύθρου»

ένα από τα ζητήματα που αποκάλυψε τη κβάντωση της ΗΜ ακτινοβολίας

$$\rho_{RJ}(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} = \rho_{RJ}$$

Rayleigh-Jeans
κλασική φυσική, 1900

$$\rho_W(\nu,T) = \frac{a\nu^3}{e^{b\nu/T}} \underset{\text{από ν. Planck}}{\overset{\text{σταθερές}}{=}} \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}} = \rho_W$$

Wien
πειραματικό ταίριασμα (ελληνιστί fitting) στις υψηλές συχνότητες
1896

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1} = \rho$$

Planck
παλαιά κβαντική μηχανική, 1900

συμπίπτει με τα πειραματικά δεδομένα για όλες τις συχνότητες και θερμοκρασίες

$$x := \frac{h\nu}{k_BT}$$

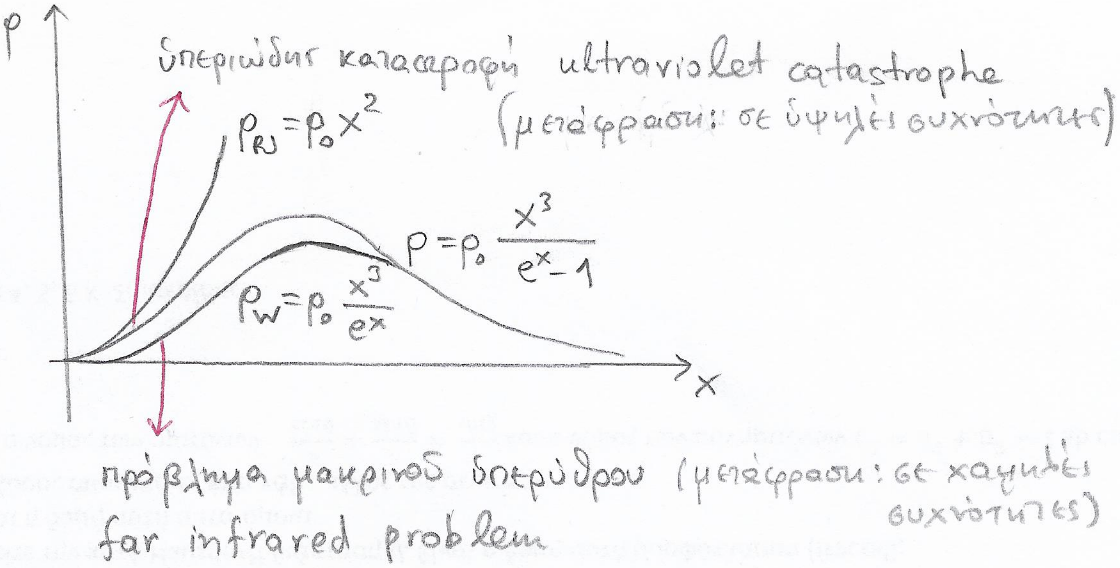
πεδία ορισμού - φυσικού ενδιαφέροντος

$$\rho_{RJ} = \rho_0 x^2 \qquad A_{RJ} = \mathbb{R}_+$$

$$\rho_W = \rho_0 \frac{x^3}{e^x} \qquad A_W = \mathbb{R}_+$$

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \qquad A = \mathbb{R}_+^*$$

$$\rho_0 := \frac{8\pi}{h^2}\left(\frac{k_BT}{c}\right)^3 \qquad [\rho_0] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$$



Οι ονομασίες αυτές έχουν σχέση με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα γύρω στο 1900 και είναι με αυτή την έννοια παραπλανητικές.

$$x := \frac{h\nu}{k_B T}$$

Όμως, η περιοχή όπου αρχίζουν οι αποκλίσεις, εξαρτάται προφανώς από τη θερμοκρασία του μέλανος σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ Συμβατικά στην περιοχή του ΗΜ φάσματος "μακρινό υπέρυθρο" (far infrared, FIR) έχουμε μήκος κύματος $25\,\mu m < \lambda < 1000\,\mu m$. Βρείτε σε τι $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ αντιστοιχεί το FIR, για θερμοκρασία (α') 300K δηλαδή περίπου τη θερμοκρασία ενός ζώου, (β') 6000K δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ήλιου, (γ') 6K.

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{h\nu}{k_B T},\ c = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \frac{ch}{x k_B T} \\ 25\,\mu m < \lambda < 1000\,\mu m \end{array}\right\} \Rightarrow 25\,\mu m < \frac{ch}{x k_B T} < 1000\,\mu m \Rightarrow$$

$$\frac{ch}{k_B T \cdot 1000\,\mu m} < x < \frac{ch}{k_B T \cdot 25\,\mu m}$$

$$\frac{hc}{k_B} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\,Js \; 3 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{1.380 \cdot 10^{-23}\,JK^{-1}} \simeq 14.404 \cdot 10^{-3}\,Km$$

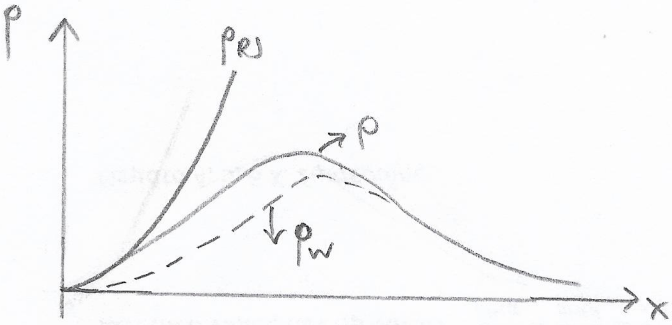
(α') 300K $\Rightarrow$ $0.048 < x < 1.921$

(β') 6000K $\Rightarrow$ $0.0024 < x < 0.09605$ $\qquad x_{χαμ} < x < x_{υφ}$

(γ') 6K $\Rightarrow$ $2.4 < x < 96.05$

x_{LOW} $\qquad$ x_{HIGH}

ΑΣΚΗΣΗ FIR $25\mu m < \lambda < 1000\mu m$



Ποιά πρέπει να είναι η θερμοκρασία μέλανος σώματος T : $p_W = 0.5p$ για το άνω και το κάτω όριο της περιοχής FIR;

(δηλαδή «να υπάρχει πρόβλημα στο μακρινό υπέρυθρο»)

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε $p_W = 0.5p \Rightarrow p_0 \dfrac{x^3}{e^x} = 0.5\, p_0 \dfrac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow e^x - 1 = 0.5 e^x \Rightarrow$

$$0.5 e^x = 1 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2 \simeq 0.693}$$

$$x = \frac{h\nu}{k_B T},\quad c = \lambda\nu \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{ch}{x k_B T}} \qquad \boxed{\frac{hc}{k_B} \simeq 14.404 \cdot 10^{-3}\, Km}$$

$$25\,\mu m < \frac{ch}{x k_B T} < 1000\,\mu m \Rightarrow$$

$$\frac{hc}{x k_B\, 1000\mu m} < T < \frac{hc}{x k_B\, 25\mu m}$$

$$\frac{14.404\, 10^{-3}\, Km}{\ln 2\; 1000\; 10^{-6}\, m} < T < \frac{14.404\, 10^{-3}\, Km}{\ln 2 \cdot 25 \cdot 10^{-6}\, m}$$

$$\frac{14.404}{0.693} K < T < \frac{14.404}{0.693} \cdot 40\, K$$

$$\boxed{21\,K \lesssim T \lesssim 831\,K}$$

Δύο διατυπώσεις τοῦ νόμου Stefan-Boltzmann
(1) ὡς πρὸς την πυκνότητα ἐνέργειας $\varrho(T)$
(2) ὡς πρὸς την ἔντασιν ἀκτινοβολίας I

$$[\varrho(T)] = \frac{J}{m^3}$$

$$[I] = \frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$$

(1)

$\varrho(T) = aT^4$
πυκνότητα ἐνέργειας
$\frac{J}{m^3}$
κοιλότητα μέλανος σώματος θερμοκρασίας T

$$\varrho(T) := \int_0^\infty \rho(\nu,T)\, d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT} - 1}\, d\nu$$

$$x := \frac{h\nu}{k_BT} \Rightarrow \nu = \frac{x k_BT}{h} \Rightarrow d\nu = \frac{k_BT}{h} dx$$

$$\varrho(T) = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k_BT}{h}\right)^3 \left(\frac{k_BT}{h}\right) \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx}_{\pi^4/15}$$

$$\varrho(T) = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3} \cdot T^4$$

ἤ $\boxed{\varrho(T) = a T^4}$ $\quad a \simeq 7.5657 \cdot 10^{-16} \frac{J}{m^3 K^4}$

(2)

$I = \sigma T^4$
ἐνέργεια που ἐκπέμπεται ἀνά μονάδα ἐπιφανείας & ἀνά μονάδα χρόνου
$\frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$
κοιλότητα μέλανος σώματος θερμοκρασίας T

$\boxed{\Phi_\sigma = \frac{n}{4}\langle v \rangle}$ ἀπό κινητική θεωρία ἀερίων (δεδομένο)

ροή σωματιδίων

\# κρούσεων στα τοιχώματα ἀνά μονάδα ἐπιφανείας και ἀνά μονάδα χρόνου

$$[\Phi_\sigma] = \frac{1}{m^3} \cdot \frac{m}{s} = \frac{1}{m^2 \cdot s}$$

ροή φωτονίων

$\boxed{\Phi_\gamma = \frac{n}{4} c}$

$\boxed{\langle h\nu \rangle = \frac{\varrho(T)}{n}}$ μέση ἐνέργεια φωτονίου

ἐπειδή ἐξερχόμενη ΗΜ ἀκτινοβολία

$\boxed{I = \Phi_\gamma \langle h\nu \rangle}$

Ἄρα $I = \frac{n}{4} c \frac{\varrho(T)}{n} \Rightarrow \boxed{I = \frac{c}{4}\varrho(T)}$

$$I = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4$$

ἤ $\boxed{I = \sigma T^4}$ $\quad \sigma \simeq 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

ΝΟΜΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΣ Wien

$$x=\frac{h\nu}{k_BT}$$

$$\boxed{\rho=\rho_0\frac{x^3}{e^x-1}} \qquad \frac{d\rho}{dx}=\rho_0\frac{3x^2(e^x-1)-x^3e^x}{(e^x-1)^2}=\rho_0x^2\frac{3(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2}$$

ν. Planck

άν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει $\frac{d\rho}{dx}=0 \Rightarrow$ (αφού $x\neq 0$) $3(e^x-1)=xe^x$

φαίνεται ότι $x_0\sim 3$

ακριβέστερα, αριθμητικά βρίσκουμε ή και με online grapher $x_0\simeq 2.821439$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_BT}\simeq 2.821439 \Rightarrow \nu_0\simeq\left(58.789\,\frac{GHz}{K}\right)T \quad \text{ή} \quad \frac{\nu_0}{T}\simeq 58.789\,\frac{GHz}{K}$$

"νόμος μετατόπισεως" του ν_0 συναρτήσει του T

$$\boxed{\rho=\rho_0\frac{x^3}{e^x}} \qquad \frac{d\rho}{dx}=\rho_0\frac{3x^2e^x-x^3e^x}{e^{2x}}=\rho_0x^2\frac{3e^x-xe^x}{e^{2x}}=\rho_0x^2\frac{3-x}{e^x}$$

ν. Wien

άν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει $\frac{d\rho}{dx}=0 \Rightarrow$ (για $x\neq 0$) $x_0=3$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_BT}=3 \Rightarrow \nu_0=3\frac{k_B}{h}T \quad \text{ή} \quad \frac{\nu_0}{T}\simeq 62.510\,\frac{GHz}{K}$$

"νόμος μετατοπίσεως" του ν_0 συναρτήσει του T

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Δείξτε πώς στο σημείο x_0 η $\frac{d^2\rho}{dx^2}<0$, ώστε πράγματι να έχουμε μέγιστο. Χρησιμοποιήστε το ν. Wien $\rho=\rho_0\frac{x^3}{e^x}$

$$\frac{d^2\rho}{dx^2}=\rho_0\frac{(6x-3x^2)e^x-(3x^2-x^3)e^x}{e^{2x}}=\rho_0\frac{6x-3x^2-3x^2+x^3}{e^x}=\rho_0\frac{6x-6x^2+x^3}{e^x}$$

$$\frac{d^2\rho}{dx^2}=\rho_0x\frac{x^2-6x+6}{e^x} \quad \text{και για } x=x_0=3 \Rightarrow \frac{d^2\rho}{dx^2}=\rho_0\cdot 3\cdot\frac{9-18+6}{e^3}<0$$

Νόμος τοῦ Planck στη μορφή $\rho(\lambda,T)$

$$\int_0^\infty \rho(\lambda,T)\,d\lambda \underset{\text{όρισμό}}{\overset{\text{προσοχή}}{:=}} \int_0^\infty \rho(\nu,T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu$$

προσοχή στον όρισμό

$$[\rho(\lambda,T)d\lambda] = \frac{J}{m^3}$$

$$[\rho(\nu,T)d\nu] = \frac{J}{m^3}$$

$$\Downarrow$$

$$[\rho(\lambda,T)] = \frac{J}{m^3\cdot m}$$

$$[\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz}$$

$$c = \lambda\nu \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = (-1)c\lambda^{-2}$$

$$\int_0^\infty \rho(\lambda,T)\,d\lambda := \frac{8\pi h}{\cancel{c^3}}\cancel{c^3}\,c\int_\infty^0 \frac{1}{\lambda^3}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}\frac{(-1)}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$= 8\pi hc\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}\,d\lambda \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda k_BT}-1\right)}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: τα $\rho(\nu,T)$, $\rho(\lambda,T)$ δεν έχουν ίδιες μονάδες μετρήσεως (δεν είναι ίδια μεγέθη)

Ὁρίζοντας $\psi := \dfrac{hc}{\lambda k_B T}$ και $\rho_o' := 8\pi\dfrac{(k_BT)^5}{(hc)^4}$

$$\boxed{\rho(\psi) = \rho_o'\frac{\psi^5}{e^\psi-1}}$$

ν. Planck

$$[\rho_o'] = \frac{J^5 s^4}{(Js)^4 m^4} = \frac{J}{m^4} = \frac{J}{m^3\cdot m}$$

ἀν ψάχνουμε ἀκρότατα, θα πρέπει $\dfrac{d\rho}{d\psi} = 0$

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \rho_o'\frac{5\psi^4(e^\psi-1)-\psi^5e^\psi}{(e^\psi-1)^2} \Rightarrow \psi^4\left\{5(e^\psi-1)-\psi e^\psi\right\} = 0$$

$$\Rightarrow (\text{για } \psi \neq 0) \quad 5(e^\psi-1) = \psi e^\psi$$

φαίνεται ὅτι $\psi_o \sim 5$ ἤ και με online grapher

ἀκριβέστερα, ἀριθμητικά βρίσκουμε $\psi_o \simeq 4.965114$

$$\frac{hc}{\lambda_o k_B T} \simeq 4.965114 \Rightarrow \lambda_o T \simeq 2.897772\cdot 10^{-3}\,mK$$

"νόμος μετατοπίσεως"

τοῦ λ_o συναρτήσει τοῦ T

$$\boxed{\rho_w(\psi) = \rho_0' \, \frac{\psi^5}{e^\psi}}$$

ν. Wien

$$\frac{d\rho_w}{d\psi} = \rho_0' \, \frac{5\psi^4 e^\psi - \psi^5 e^\psi}{e^{2\psi}} \rightarrow \rho_0' \psi^4 \, \frac{5-\psi}{e^\psi} = \rho_0' \, \frac{5\psi^4 - \psi^5}{e^\psi}$$

και $\frac{d\rho_w}{d\psi} = 0 \Rightarrow$ (για $\psi \neq 0$) $5e^\psi = \psi e^\psi \Rightarrow$

$$\psi_0 = 5$$

$$\frac{hc}{\lambda_0 k_B T} = 5 \Rightarrow \lambda_0 T = 2.877554 \ \text{mK}$$

"νόμος μετατοπίσεως", του λ_0 συναρτήσει του T

Ο νόμος μετατοπίσεως του Wien παράχθη από τον Wilhelm Wien το 1893 στη μορφή

$$\lambda_0 \cdot T = \text{σταθερά}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε πώς στο σημείο ψ_0 η $\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} < 0$, ώστε πράγματι να έχουμε μέγιστο. Χρησιμοποιήστε το ν. Wien $\rho = \rho_0' \frac{\psi^5}{e^\psi}$

$$\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' \, \frac{(20\psi^3 - 5\psi^4)e^\psi - (5\psi^4 - \psi^5)e^\psi}{e^{2\psi}} = \rho' \, \frac{20\psi^3 - 10\psi^4 + \psi^5}{e^\psi}$$

$$\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' \psi^3 \, \frac{20 - 10\psi + \psi^2}{e^\psi}$$ και για $\psi = \psi_0 = 5 \Rightarrow \frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' \cdot 5^3 \, \frac{20 - 50 + 25}{e^5} < 0$