Στοιχειώδης Αριθμός Κανονικών Τρόπων ΗΜ πεδίου (dN) ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας ($d\nu$)

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$$

$$[g(\nu)] = \frac{1}{Hz} = s$$

$$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \qquad \left[\frac{g(\nu)}{V}\right] = \frac{1}{m^3\,Hz} = \frac{s}{m^3}$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{g(\nu)}{V}\cdot \underbrace{\overline{E}}_{\text{μέση ενέργεια κανονικού τρόπου}} \qquad [\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$$

κλασικά $\left.\begin{array}{l}\overline{E} = \overline{E(T)} = \dfrac{M}{2}k_B T \\ M = \#\text{ βαθμών ελευθερίας}\end{array}\right\}$ θεώρημα Ισοκατανομής ενέργειας

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{M}{2}k_BT \;\xrightarrow[M=2]{\text{για}}\; \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot k_BT}$$ ν. Rayleigh-Jeans

παλαιο-κβαντικά $\overline{E} = \overline{E(\nu,T)} = \dfrac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}$

προϋποθέσεις
- $E_n = nh\nu$ ενέργεια "ταλαντωτή", $n = 0, 1, 2, \ldots$
- $\overline{E(\nu,T)} = \sum_n E_n \cdot P_n$

(όπως είπαμε) στην αρχή του μαθήματος ο μέσος αριθμός σωματιδίων στην κατάσταση n με ενέργεια E_n είναι

$$\frac{N e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} = \overline{n}_n \longleftrightarrow P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}, \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

στατιστική (Maxwell-) Boltzmann (MB)

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}}$$ ν. Planck

~~ΑΣΚΗΣΗ~~ Σημείωση: Αν αντί του $E_n = nh\nu$ βάλουμε $E_n = h\nu(n+\frac{1}{2})$ όπως γνωρίζουμε σήμερα για τον κβαντικό ΑΑΤ ΔΕΝ προκύπτει ο νόμος του Planck!

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ

ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ — ΥΛΗΣ (ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)

ΔΣ

LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

'Εξαναγκασμένη 'Εκπομπή
ή Διεγερμένη

1916 – 1917 A. Einstein „θεωρητικά θεμέλια" του LASER

E_2 ——— ΔΣ με
E_1 ———•——— 1 ηλεκτρόνιο

επαν- εξαγωγή του ν. Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος

Αυτή τη φορά η απόδειξη στηρίζεται στους 3 μηχανισμούς ή διεργασίες αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας – ΔΣ ΚΑΙ στη στατιστική (Maxwell) – Boltzmann για την κατάληψη των σταθμών του ΔΣ από το ηλεκτρόνιο.

(Stimulated) Absorption (Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση } „παλαιότερα
Spontaneous Emission Αυθόρμητη Εκπομπή } γνωστοί"
Stimulated Emission 'Εξαναγκασμένη 'Εκπομπή ← εισήχθη από τον A. Einstein

Συντελεστές Einstein

γιατί MB και όχι FD;

οφείλεται στο $\rho(\nu,T)$ ⟷ Εξαναγκασμένο B_{ij}

ΔΕΝ οφείλεται στο $\rho(\nu,T)$ ⟷ Αυθόρμητο A_{ij}

i αρχική στάθμη του ηλεκτρονίου
j τελική στάθμη του ηλεκτρονίου

πιθανότητα να συμβεί η διεργασία

$$dW^{\varepsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt$$

$$dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\varepsilon\kappa\pi} = A_{21}\,dt$$

$$dW^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon\kappa\pi} = B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt$$

ΕΡΩΤΗΣΗ γιατί MB κ όχι FD;
(μάλλον δεν υπήρχε τότε FD, σε υψηλές T FD → MB, έχουμε 1 ηλεκτρόνιο στο ΔΣ)

1905 A. Einstein εξήγησε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο υποθέτοντας ότι ∃ κβάντα φωτός με ενέργεια $h\nu$

1926 μάλλον από τον Gilbert Newton Lewis «φωτόνιο» = κβάντο φωτός

1950 – 1960 κατασκευάστηκαν τα πρώτα MASER κ LASER

microwaves

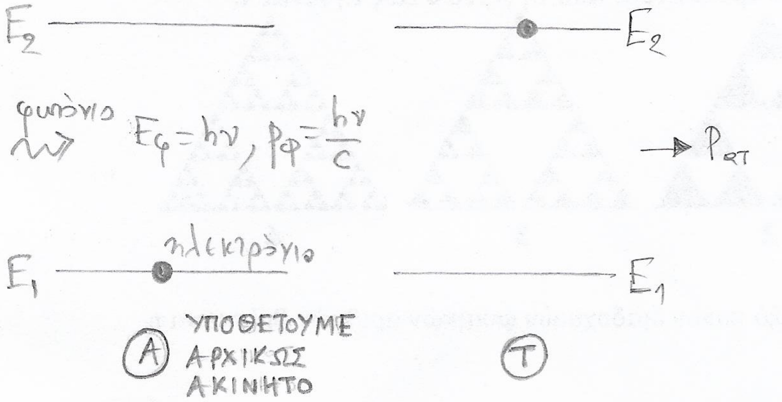
ΣΗΜΕΡΑ...

1964 Charles Townes, Nikolay Basov, Aleksandr Prokhorov Νόμπελ Φυσικής

(ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (ή διεγερμένη)) ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ
(STIMULATED) ABSORPTION

εδώ $\Delta\Sigma$ = δύο στάθμες ενός ατόμου

$$dW^{\varepsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt$$



Διατήρηση Ενέργειας

$$E_1 + h\nu = E_2 + \cancel{\frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}}$$

υποθέτουμε αμελητέα $\Rightarrow h\nu \simeq E_2 - E_1$

Διατήρηση Ορμής

$$p_\varphi = p_{\alpha\tau} \Rightarrow \frac{h\nu}{c} = p_{\alpha\tau} \Rightarrow p_{\alpha\tau} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$c = \lambda\nu \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Ας ελέγξουμε αν πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου $\frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}$ μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα, σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου E_φ.

$$\Lambda := \frac{\frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}}{E_\varphi} = \frac{h^{\cancel{2}}\,\cancel{\lambda}}{\lambda^{\cancel{2}}\,2m_{\alpha\tau}\,\cancel{h}c} = \frac{h}{2m_{\alpha\tau}\lambda c}$$

Για να μεγαλώσει το Λ θα πρέπει η $m_{\alpha\tau}$ να μικρύνει.
Ας πάρουμε λοιπόν το μικρότερο δυνατό άτομο, το άτομο του υδρογόνου.

$$\left.\begin{aligned} m_e &\simeq 9.109\ 10^{-31}\,kg \\ m_p &\simeq 1.673\ 10^{-27}\,kg \\ m_{\alpha\tau} &\approx m_p + m_e \end{aligned}\right\} \quad m_{\alpha\tau} \simeq 1.673\cdot 10^{-27}\,kg$$

↑ υπάρχει κι ένα μικρό έλλειμμα μάζας, δηλαδή η ενέργεια συνδέσεως του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου στο άτομο.

Ας πάρουμε ένα τυπικό πράσινο φωτόνιο με $\lambda \simeq 500\,nm$

$$\Lambda = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,\cancel{J}s}{2\cdot 1.673\cdot 10^{-27}\,\cancel{kg}\ 500\cdot 10^{-9}\,\cancel{m}\ 3\cdot 10^{8}\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s}}} \simeq 1.320\cdot 10^{-9}$$

Οπότε, πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου.

Για ποιό μήκος κύματος λ, στο άτομο του υδρογόνου, θα μπορούσε ο λόγος Λ να γίνει ίσος με 0.05; -2-

$$\Lambda = \frac{h}{2\lambda c\, m_{at}} = 0.05 \Rightarrow \lambda = \frac{h}{2 c\, m_{at}\, 0.05} = \frac{6.626\ 10^{-34}\ Jss}{2 \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m\ \ 1.673 \cdot 10^{-27}\, kg\ \ 0.05}$$

$$\Rightarrow \lambda \simeq 13.2 \cdot 10^{-15}\, m = 13.2\ fm$$

Αυτό είναι ένα εξαιρετικά μικρότερο μήκος κύματος

π.χ. ακτίνες γ $\quad \lambda_\gamma \lesssim 10\ pm = 10 \cdot 10^{-12}\, m = 10^{-11}\, m$

ενώ εδώ βρήκαμε $\quad 13.2\ 10^{-15}\, m = 13.2\ fm$

Διάμετρος πυρήνα Υδρογόνου $\quad 1.75\ fm$

Ουράνιο $\quad 15\ fm$

Άρα, η υπόθεσή μας, να θεωρήσουμε αμελητέα την κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου

$$\frac{P_{at}^2}{2 m_{at}}$$

σε σχέση με

την ενέργεια του απορροφούμενου φωτονίου E_φ

είναι σωστή

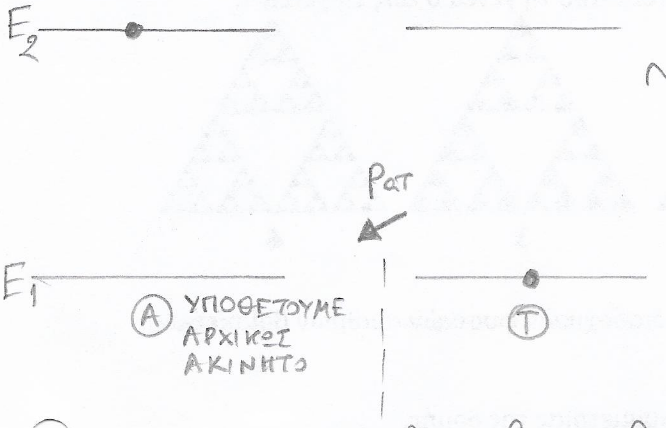
σχεδόν σε όλο το ΗΜ φάσμα.

ΑΥΘΟΡΜΗΤΗ ΕΚΠΟΜΠΗ
SPONTANEOUS EMISSION

energy level lifetime τ_2 ή τ

$$dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\varepsilon\kappa\pi} = A_{21} \cdot dt$$

χρόνος ζωής της στάθμης 2
(το ηλεκτρόνιο από τη στάθμη 2 αφησυχάζει στη στάθμη 1)



$E_\varphi = h\nu$

$p_\varphi = \dfrac{h\nu}{c}$

$$1 := A_{21} \cdot \tau_2 \text{ ή } A_{21} \cdot \tau$$

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{A_{21}}$$

απλοϊκός ορισμός...

το άτομο θα κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση με το φωτόνιο

Διατήρηση Ενέργειας $\quad E_2 = E_1 + E_\varphi + \underbrace{\dfrac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}}_{}$ αμελητέα $\Rightarrow h\nu \simeq E_2 - E_1$

Διατήρηση Ορμής $\quad \emptyset = p_{\alpha\tau} + p_\varphi \Rightarrow p_{\alpha\tau} = -p_\varphi$

Τα φωτόνια εκπέμπονται σε τυχαία κατεύθυνση, δηλαδή χωρίς κατευθυντικότητα (without directonality)

με τυχαία φάση, δηλαδή χωρίς συνοχή (incoherence)

συνοχή (coherence) ή συμφωνία, συμφασικότητα
= σταθερή σχέση μεταξύ των φάσεων των κυμάτων

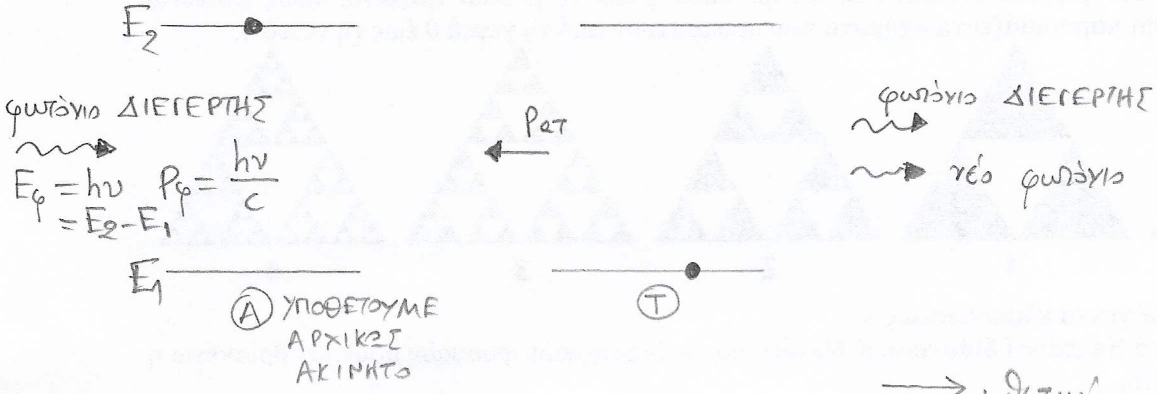
coherent — συνεκτικός
↓
π.χ. laser

incoherent — μη συνεκτικός
π.χ. φωτεινή πηγή πυρακτώσεως incandescent light source ή LED Light Emitting Diode

A. Einstein "Zur Quantentheorie der Strahlung" 1916, 1917

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (ή διεγερμένη) ΕΚΠΟΜΠΗ
STIMULATED EMISSION

$$dW^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon\kappa\pi} = B_{21}\,\rho(\nu T)\,dt$$



"ΚΛΩΝΟΙ"
δύο φωτόνια με ίδια
- ενέργεια
- ορμή (κατεύθυνση)
- φάση
- πόλωση

→ +θετική ψύξη

ίδια ενέργεια ⇒ μονοχρωματικότητα (monochromaticity)
ίδια ορμή (κατεύθυνση) ⇒ κατευθυντικότητα (directionality)
* ίδια φάση ⇒ συνοχή (coherence)
ίδια πόλωση ⇒ πολωμένο φως (polarized light) *

* υπάρχουν και οι άλλοι μηχανισμοί στο παιχνίδι...

→ Τα περί φάσεως κ πολώσεως ∄ στο άρθρο του Einstein

→ τα φωτόνια είναι μποζόνια και άρα μπορούν να έχουν ίδια ενέργεια, ορμή (κατεύθυνση), φάση, πόλωση

→ χρειάζεται η υπόθεση ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ ενέργειας $E_\varphi = E_2 - E_1 = h\nu$ δεν παθαίνει τίποτε κατά τη διάρκεια της εξαναγκασμένης εκπομπής

→ θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ καθορίζει τη φάση, την πόλωση κ τη διεύθυνση του νέου εκπεμπόμενου φωτονίου όπως σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης καθορίζει τη φάση, την πόλωση κ τη διεύθυνση της εξαναγκασμένης ταλαντώσεως

Διατήρηση Ενέργειας $E_2 + \cancel{E_\varphi} = E_1 + \cancel{E_\varphi} + E_\varphi' + \cancel{\frac{P_{\alpha\tau}^2}{2M_{\alpha\tau}}}$ αμελητέο

$$\Rightarrow E_\varphi' = E_2 - E_1 = E_\varphi \Rightarrow$$

τα φωτόνια έχουν ίδια ενέργεια → μονοχρωματικότητα

Διατήρηση Ορμής $\cancel{P_\varphi} = \cancel{P_\varphi} + P_\varphi' + P_{\alpha\tau} \Rightarrow P_\varphi' = -P_{\alpha\tau}$

έχουμε ήδη θεωρήσει πως το νέο φωτόνιο
θα κινηθεί στην κατεύθυνση του φωτονίου ΔΙΕΓΕΡΤΗ

$\Rightarrow P_\varphi' > 0$ (θετική αλγεβρική τιμή) ίδια κατεύθυνση

(μέτρο) $P_\varphi' = \frac{E_\varphi'}{c} = \frac{E_\varphi}{c} = P_\varphi$ ίδιο μέτρο

$\Rightarrow$ τα φωτόνια έχουν ίδια ορμή

ΕΞΑΓΩΓΗ του νόμου Planck από τους μηχανισμούς αλληλεπιδράσεως ΗΜ ακτινοβολίας – ΔΣ και τη στατιστική (Maxwell) – Boltzmann.

Σχέση συντελεστών Einstein A και B

Μελετάμε την αλληλεπίδραση συλλογής ΔΣ – ΗΜ ακτινοβολίας σε θερμοδυναμική ισορροπία.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ (Maxwell) – Boltzmann

① χωρίς διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$N_i = N_{o\lambda} \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$$

N_i: πληθυσμός ΔΣ με ηλεκτρόνιο στη στάθμη i

$N_{o\lambda}$: ολικός πληθυσμός ΔΣ

$\frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$: P_i πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη στάθμη i στο ΔΣ

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$$

συνάρτηση επιμερισμού
partition function

② με διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$N_i = N_{o\lambda} \frac{g_i e^{-\beta E_i}}{Z}$$

g_i στατιστικό βάρος της E_i

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i}$$

Θερμοδυναμική ισορροπία $\Rightarrow$ σε χρόνο dt $\quad dN_{1\to 2} = dN_{2\to 1} \Rightarrow$

$$N_1 \, dW_{1\to 2} = N_2 \, dW_{2\to 1} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{N_{o\lambda}} e^{-\beta E_1}}{\cancel{Z}} g_1 \cdot dW^{\varepsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = \frac{\cancel{N_{o\lambda}} \cdot e^{-\beta E_2}}{\cancel{Z}} g_2 \left(dW^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon\kappa\pi} + dW^{\varepsilon\kappa\pi}_{\alpha\upsilon\theta} \right) \Rightarrow$$

$$g_1 e^{-\beta E_1} B_{12} \rho(\nu,T) \cancel{dt} = e^{-\beta E_2} g_2 \left(B_{21} \rho(\nu,T) \cancel{dt} + A_{21} \cancel{dt} \right) \Rightarrow$$

$$g_1 e^{-\beta E_1} B_{12} \rho(\nu,T) - e^{-\beta E_2} g_2 B_{21} \rho(\nu,T) = e^{-\beta E_2} g_2 A_{21} \Rightarrow$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{g_2 A_{21} e^{-\beta E_2}}{g_1 B_{12} e^{-\beta E_1} - g_2 B_{21} e^{-\beta E_2}} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} e^{\beta(E_2 - E_1)} - 1}$$

Όμως,

$$\lim_{T\to\infty} \rho(\nu,T) = \infty$$

π.χ. από το πείραμα

Αν γνωρίζουμε την πειραματική συμπεριφορά, την οποία εξηγεί ο νόμος Planck

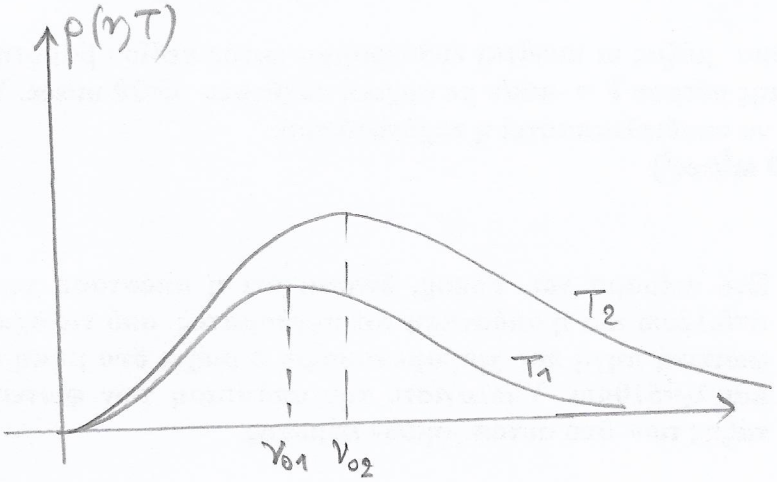
$$\boxed{\rho(\nu T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}}$$

$$\frac{\rho(\nu, T_2)}{\rho(\nu T_1)} = \frac{\underbrace{e^{\frac{h\nu}{k_B T_1}} - 1}_{\text{θετικό}}}{\underbrace{e^{\frac{h\nu}{k_B T_2}} - 1}_{\text{θετικό}}} > 1$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T_1}} - 1 > e^{\frac{h\nu}{k_B T_2}} - 1 \Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T_1}} > e^{\frac{h\nu}{k_B T_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T_1} > \frac{1}{T_2} \Leftrightarrow T_2 > T_1$$

δηλαδή μεγαλύτερη θερμοκρασία οδηγεί σε μεγαλύτερο $\rho(\nu T)$, $\forall \nu$.



Ακόμα, από το νόμο μετατοπίσεως Wien στη μορφή

$$\nu_0 = (\sigma\tau\alpha\theta) \cdot T$$

$$\nu_0 \simeq 58.789 \frac{GHz}{K} \cdot T$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \{ T\uparrow \Rightarrow \nu_0 \uparrow \}$$ όπως δείχνουμε και στο σχήμα

$T \to \infty \Rightarrow \beta \to 0$

$$\rho \to \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} - 1} = \infty$$

Άρα, $\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} = 1 \Rightarrow \boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}}$

Αν $g_2 = g_1$ ή χωρίς στατιστικά βάρη $\Rightarrow B_{12} = B_{21} := B$

$A_{21} := A$

$$\left.\begin{aligned} \rho(\nu,T) &= \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} \cdot e^{\beta(E_2-E_1)} - 1} \\ \rho(\nu,T) &= \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT} - 1} \end{aligned}\right\} \text{σύγκριση} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}} \qquad \boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}} \qquad \boxed{h\nu = E_2 - E_1}$$