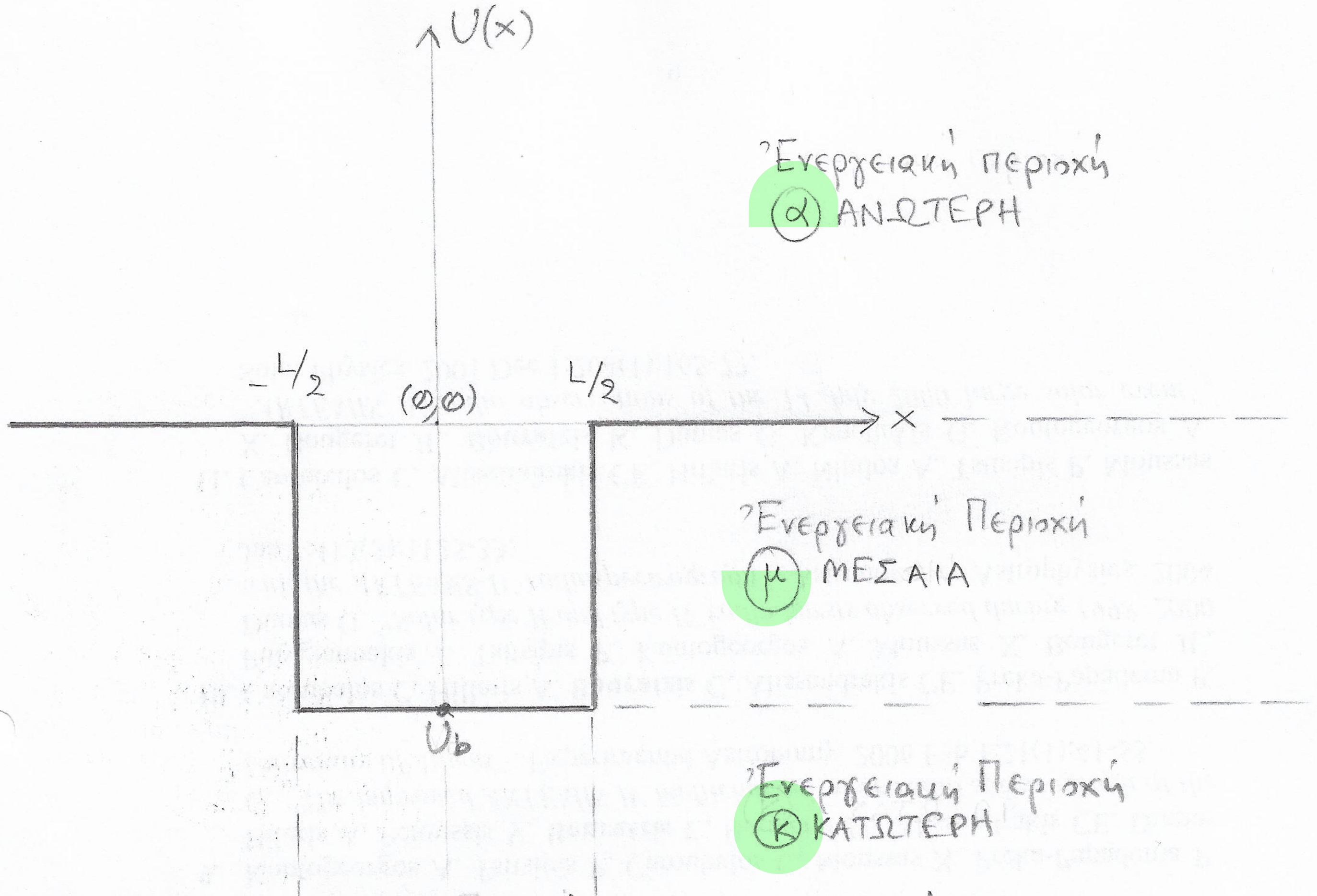


Χωρική Περιοχή Ἀριστερή (I) π.χ. $Al_xGa_{1-x}As$

Χωρική Περιοχή Μεσαία (II) π.χ. GaAs

Χωρική Περιοχή Δεξιά (III) π.χ. $Al_xGa_{1-x}As$

$\boxed{\text{Ἄς ἐξετάσουμε ἀρχικώς ἐνέργειες } E<0 \text{ ("δέσμιες καταστάσεις")}}$

Χωρικές Περιοχές (I) κ (III) $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x) \Leftrightarrow \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$ ἀρνητική

$0 > \frac{2mE}{\hbar^2} \underline{\underline{\text{θέτουμε}}} -q^2$ κι ἔστω $q>0$. Ἄρα, $\psi''(x) - q^2\psi(x) = 0$

ΔΛΜ = Δοκιμάζουμε λύσεις τῆς μορφῆς $\psi(x) = Ae^{-qx} + Be^{qx}$

$\psi'(x) = -Aqe^{-qx} + Bqe^{qx}$

$\psi''(x) = Aq^2e^{-qx} + Bq^2e^{qx}$

$(Aq^2e^{-qx} + Bq^2e^{qx}) - q^2(Ae^{-qx} + Be^{qx}) = 0 \Rightarrow 0 = 0$ ἰσχύει

Δηλαδή αὐτοῦ τοῦ εἴδους οἱ λύσεις εἶναι ἱκανοποιητικές.

Ἐπειδή οἱ $\psi(x)$ πρέπει να εἶναι τετραγωνικώς ὁλοκληρώσιμες

$\lim_{x\to\infty}\psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_{III}(x) = Ae^{-qx}$ $\quad \lim_{x\to-\infty}\psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_{I}(x) = Be^{qx}$

$$\boxed{\psi_I(x) = B e^{qx} \Rightarrow \psi_I'(x) = Bq e^{qx}} \quad \text{(I)}$$

$$\boxed{\psi_{III}(x) = A e^{-qx} \Rightarrow \psi_{III}'(x) = -Aq e^{-qx}} \quad \text{(III)}$$

χωρική περιοχή II

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - U_b\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E+U_b)\psi(x) = 0$$

θετική ή αρνητική

$\boxed{\text{εάν } E < -U_b \Leftrightarrow E+U_b < 0}$

$$0 > \frac{2m}{\hbar^2}(E+U_b) \overset{\text{θέτουμε}}{=\!=\!=} -Q^2 \text{ κι έστω } Q>0 \Rightarrow \psi''(x) - Q^2\psi(x) = 0$$

ΔΛΜ
$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx} \\ \psi'(x) &= -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx} \\ \psi''(x) &= \Gamma Q^2 e^{-Qx} + \Delta Q^2 e^{Qx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\Gamma Q^2 e^{-Qx} + \Delta Q^2 e^{Qx} \\ &-Q^2(\Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}) = 0 \Rightarrow 0=0 \end{aligned}$$

ισχύει

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx} \\ \psi_{II}'(x) &= -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx} \end{aligned}\right\}} \quad \text{(II)}_{(K)}$$

$\boxed{\text{εάν } E > -U_b \Leftrightarrow E+U_b > 0}$

$$0 < \frac{2m}{\hbar^2}(E+U_b) \overset{\text{θέτουμε}}{=\!=\!=} k^2 \text{ κι έστω } k>0 \Rightarrow \psi''(x) + k^2\psi(x) = 0$$

ΔΛΜ
$$\begin{aligned} \psi(x) &= \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx} \\ \psi'(x) &= ik\Gamma e^{ikx} - ik\Delta e^{-ikx} \\ \psi''(x) &= -k^2\Gamma e^{ikx} - k^2\Delta e^{-ikx} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &-k^2\Gamma e^{ikx} - k^2\Delta e^{-ikx} \\ &+k^2(\Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}) = 0 \Rightarrow 0=0 \end{aligned}$$

ισχύει

ή ΔΛΜ
$$\begin{aligned} \psi(x) &= \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx \\ \psi'(x) &= -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx \\ \psi''(x) &= -\Gamma k^2 \cos kx - \Delta k^2 \sin kx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &-\Gamma k^2 \cos kx - \Delta k^2 \sin kx \\ &+k^2(\Gamma \cos kx + \Delta \sin kx) = 0 \Rightarrow 0=0 \end{aligned}$$

ισχύει

'Αν εκλέξουμε
$$\left.\begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx} \\ \psi'_{II}(x) &= \Gamma ik e^{ikx} - \Delta ik e^{-ikx} \end{aligned}\right\} \text{II}_{\mu 1}$$

ενώ αν εκλέξουμε
$$\left.\begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx \\ \psi'_{II}(x) &= -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx \end{aligned}\right\} \text{II}_{\mu 2}$$

Δηλαδή για τη χωρική περιοχή II έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις

$\text{II}_{\mu 1}$ ή $\text{II}_{\mu 2}$ για τη μεσαία ενεργειακή περιοχή

II_{k} για την κατώτερη ενεργειακή περιοχή

Κατά τα γνωστά, για να βρούμε τη συνολική λύση, θα πρέπει να ταιριάξουμε τις κυματοσυναρτήσεις κ τις παραγώγους τους στα όρια των περιοχών δηλαδή στα $x = \pm L/2$.

• Ας προσπαθήσουμε να ταιριάξουμε τις I, II_k, III

$x = -L/2$

$$\left.\begin{aligned} \psi_{I}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= B e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= \Gamma e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow B e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi'_{I}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= Bq e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi'_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= -\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Bq e^{-q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}}$$

$\xrightarrow{(:)}$

$$\overset{(:)}{\Rightarrow} \frac{\cancel{B}q \cancel{e^{-q\frac{L}{2}}}}{\cancel{B e^{-q\frac{L}{2}}}} = \frac{-\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta q e^{-Q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma(q+Q) e^{Q\frac{L}{2}} = \Delta(Q-q) e^{-Q\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{Q-q}{Q+q} e^{-QL}} \quad \oplus$$

$x = L/2$

$$\left.\begin{aligned}\psi_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= A e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= \Gamma e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{Q\frac{L}{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow A e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{Q\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi'_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= -Aq e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi'_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow -Aq e^{-q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}}$$

$$\overset{(:)}{\Rightarrow} \frac{-Aq \cancel{e^{-q\frac{L}{2}}}}{\cancel{A e^{-q\frac{L}{2}}}} = \frac{-\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{Q\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$-\Gamma q e^{-Q\frac{L}{2}} - \Delta q e^{Q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\Gamma(Q-q) e^{-Q\frac{L}{2}} = \Delta(Q+q) e^{Q\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{Q+q}{Q-q} e^{QL}} \quad \oplus$$

$$\oplus \text{ και } \oplus \Rightarrow \frac{Q-q}{Q+q} e^{-QL} = \frac{Q+q}{Q-q} e^{QL} \Rightarrow \boxed{e^{-2QL} = \frac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2}} \quad \oplus$$

το οποίο είναι ΑΤΟΠΟ

διότι $Q > 0 \Rightarrow e^{-2QL} < 1$

ενώ $\dfrac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2} > 1 \Leftrightarrow (Q+q)^2 > (Q-q)^2 \Leftrightarrow Q^2+q^2+2Qq > Q^2+q^2-2Qq \Leftrightarrow$

$4Qq > 0$ το οποίο ισχύει διότι $Q > 0$ και $q > 0$

Δηλαδή $\nexists$ λύση στην κατώτερη ενεργειακή περιοχή.

- Ας προσπαθήσουμε να ταιριάξουμε τις (I) (II)$_{μ1}$ (III) στα σύνορα $x = \pm L/2$

Οι πράξεις βρίσκονται στη σελίδα $\underline{\underline{4'}}$, οι σχέσεις ◪, ◪ $\Rightarrow$

$$\frac{(ik+q)}{(ik-q)} e^{ikL} = \frac{(ik-q)}{(ik+q)} e^{-ikL} \Rightarrow \boxed{e^{2ikL} = \frac{(ik-q)^2}{(ik+q)^2} = \frac{-k^2+q^2-2ikq}{-k^2+q^2+2ikq} := \Lambda} \quad ◪$$

$x = \frac{L}{2}$

$$\left.\begin{aligned}\psi_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= A e^{-q\frac{L}{2}}\\ \psi_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= \Gamma e^{ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik\frac{L}{2}}\end{aligned}\right\} A e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi'_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= -Aq e^{-q\frac{L}{2}}\\ \psi'_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= \Gamma ik e^{ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{-ik\frac{L}{2}}\end{aligned}\right\} -Aq e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma ik e^{ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{-ik\frac{L}{2}}$$

$$(:) \Rightarrow -q = \frac{\Gamma ik e^{ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{-ik\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik\frac{L}{2}}} \Rightarrow -\Gamma q e^{ik\frac{L}{2}} - \Delta q e^{-ik\frac{L}{2}} = \Gamma ik e^{ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{-ik\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$(\Delta ik - \Delta q) e^{-ik\frac{L}{2}} = (\Gamma ik + \Gamma q) e^{ik\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta(ik-q)}{\Gamma(ik+q)} = e^{ikL}} \Rightarrow \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{(ik+q)}{(ik-q)} e^{ikL} \quad \blacksquare$$

$x = -\frac{L}{2}$

$$\left.\begin{aligned}\psi_{I}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= B e^{-q\frac{L}{2}}\\ \psi_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= \Gamma e^{-ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{+ik\frac{L}{2}}\end{aligned}\right\} B e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{-ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{ik\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi'_{I}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= Bq e^{-q\frac{L}{2}}\\ \psi'_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= \Gamma ik e^{-ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{+ik\frac{L}{2}}\end{aligned}\right\} Bq e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma ik e^{-ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{ik\frac{L}{2}}$$

$$(:) \Rightarrow q = \frac{\Gamma ik e^{-ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{ik\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{-ik\frac{L}{2}} + \Delta e^{ik\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Gamma q e^{-ik\frac{L}{2}} + \Delta q e^{ik\frac{L}{2}} = \Gamma ik e^{-ik\frac{L}{2}} - \Delta ik e^{ik\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$(\Delta ik + \Delta q) e^{ik\frac{L}{2}} = (\Gamma ik - \Gamma q) e^{-ik\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta(ik+q)}{\Gamma(ik-q)} = e^{-ikL}} \Rightarrow \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{(ik-q)}{(ik+q)} e^{-ikL} \quad \blacksquare$$

$$\boxed{\xi := \frac{kL}{2}} \Rightarrow k = \frac{2\xi}{L} \qquad \boxed{\eta := \frac{qL}{2}} \Rightarrow q = \frac{2\eta}{L}$$

$$\xi^2+\eta^2 = \frac{L^2}{4}\left(k^2+q^2\right) = \frac{L^2}{4}\left[\frac{2m}{\hbar^2}(E+U_b) - \frac{2m}{\hbar^2}E\right] = \frac{L^2}{4}\frac{2mU_b}{\hbar^2} = \frac{mU_bL^2}{2\hbar^2} := a^2$$

$\boxed{a^2 := \frac{mU_bL^2}{2\hbar^2}}$ σταθερό ἀνεξάρτητο τῆι ἐνέργειας E κι ἔστω $a>0$

δηλαδή $\boxed{\xi^2+\eta^2=a^2}$

Ἐκφράζει την ἀποτελεσματικότητα τοῦ φρέατος

Εἶναι ἀνάλογο τῆι μάζας ἤ ἐνεργοῦ μάζας τοῦ σωματιδίου m

τοῦ βάθους τοῦ φρέατος U_b και

τοῦ πλάτους στο τετράγωνο τοῦ φρέατος L^2.

$\boxed{-\xi^2+\eta^2 := \beta^2}$ Ὁπότε, ἡ σχέση $\Rightarrow$

$$\text{ὁπότε } e^{2i\frac{2}{L}\xi L} = \frac{-\xi^2+\eta^2-2i\xi\eta}{-\xi^2+\eta^2+2i\xi\eta} = \frac{\beta^2-2i\xi\eta}{\beta^2+2i\xi\eta} = \frac{(\beta^2-2i\xi\eta)^2}{(\beta^2+2i\xi\eta)(\beta^2-2i\xi\eta)}$$

$$e^{i4\xi} = \frac{\beta^4-4i\xi\eta\beta^2-4\xi^2\eta^2}{\beta^4+4\xi^2\eta^2} \Rightarrow e^{i4\xi}\left(\beta^4+4\xi^2\eta^2\right) = \beta^4-4i\xi\eta\beta^2-4\xi^2\eta^2$$

$$\text{ἐν τῷ μεταξύ } \beta^4+4\xi^2\eta^2 = \xi^4+\eta^4-2\xi^2\eta^2+4\xi^2\eta^2 = (\xi^2+\eta^2)^2 = a^4$$

$$\beta^4-4\xi^2\eta^2=\beta^4+4\xi^2\eta^2-8\xi^2\eta^2=\alpha^4-8\xi^2\eta^2$$

$$-4i\xi\eta\beta^2= \;;\ldots$$

$$\Rightarrow \alpha^4 e^{i4\xi}=\alpha^4-8\xi^2\eta^2-4i\xi\eta\beta^2$$

$$\alpha^4\cos 4\xi+i\alpha^4\sin 4\xi=\left(\alpha^4-8\xi^2\eta^2\right)+i\left(-4\xi\eta\beta^2\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha^4\cos 4\xi&=\alpha^4-8\xi^2\eta^2\\ \alpha^4\sin 4\xi&=-4\xi\eta\beta^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tan(4\xi)=\frac{-4\xi\eta\beta^2}{\alpha^4-8\xi^2\eta^2}\quad\otimes$$

όπου τα πράγματα φαίνονται περίπλοκα

$$\begin{aligned}\beta^4+4\xi^2\eta^2&=\alpha^4\\ \beta^4-4\xi^2\eta^2&=\alpha^4-8\xi^2\eta^2\\ \hline (+)\quad 2\beta^4&=2\alpha^4-8\xi^2\eta^2\\ \beta^4&=\alpha^4-4\xi^2\eta^2\\ \frac{\alpha^4-\beta^4}{4}&=\xi^2\eta^2\\ \xi\eta&=\frac{\sqrt{\alpha^4-\beta^4}}{2}\end{aligned}$$

$$\alpha^4-\beta^4>0\iff \alpha^4>\beta^4\iff\left(\frac{mV_bL^2}{2\hbar^2}\right)^2>\left(\eta^2-\xi^2\right)^2$$

$$=\left(\frac{L^2}{4}q^2-\frac{L^2}{4}k^2\right)^2=\frac{L^4}{4^2}\left[-\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b)\right]^2\iff$$

$$\frac{\cancel{m^2}V_b^2\cancel{L^4}}{\cancel{4\hbar^4}}>\frac{\cancel{L^4}}{\cancel{4^2}}\frac{\cancel{4m^2}}{\cancel{\hbar^4}}(2E+V_b)^2\iff \cancel{V_b^2}>4E^2+\cancel{V_b^2}+4EV_b$$

$$\iff 0>E^2+EV_b\iff 0<E+V_b$$

$(E<0)$

Που ισχύει διότι βρισκόμαστε στην ενεργειακή περιοχή ΜΕΣΟΝ

Οπότε

$$\otimes\Rightarrow \tan(4\xi)=\frac{-4\,\dfrac{\sqrt{\alpha^4-\beta^4}}{2}\,\beta^2}{\alpha^4-8\,\dfrac{(\alpha^4-\beta^4)}{4}}=\frac{-2\sqrt{\alpha^4-\beta^4}\cdot\beta^2}{\alpha^4-2(\alpha^4-\beta^4)}=\frac{-2\sqrt{\alpha^4-\beta^4}\cdot\beta^2}{-\alpha^4+2\beta^4}$$

$$\boxed{\tan(4\xi)=\frac{2\sqrt{\alpha^4-\beta^4}\,\beta^2}{\alpha^4-2\beta^4}}$$

Για τις (II)$_{\mu 2}$ $\psi_{II}(x) = \Gamma\cos kx + \Delta\sin kx$

επειδή η δυναμική ενέργεια είναι άρτια
θα έχουμε εναλλάξ άρτιες κ περιττές ιδιοσυναρτήσεις
πράγμα που φαίνεται να μπορεί να το χρησιμοποιήσει
η μορφή (II)$_{\mu 2}$ που αποτελείται από cos (άρτιες) κ sin (περιττές)

ΕΣΤΩ ΑΡΤΙΕΣ για $x \in$ περιοχές I κ III $\psi(-x) = \psi(x) \Rightarrow$

δηλαδή

$\psi_I(x) = \psi_{III}(-x)$

$\psi_I(-x) = \psi_{III}(x)$

$$\left.\begin{aligned} x>0 &\Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow Be^{-qx} = Ae^{-qx} \Leftrightarrow B=A \\ x<0 &\Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow Ae^{qx} = Be^{qx} \Leftrightarrow B=A \end{aligned}\right\} B=A$$

για $x \in$ περιοχή II $\psi(-x) = \psi(x) \Leftrightarrow \Gamma\cos(-kx) + \Delta\sin(-kx)$

$= \Gamma\cos kx + \Delta\sin kx \Leftrightarrow \cancel{\Gamma\cos kx} - \Delta\sin kx = \cancel{\Gamma\cos kx} + \Delta\sin kx$

$\Leftrightarrow 2\Delta\sin kx = 0$ ($\forall x \in$ περιοχή II) $\Rightarrow \Delta = 0$

Οπότε έχουμε

$\psi_I(x) = Ae^{qx}$ $\quad \psi_I'(x) = Aqe^{qx}$

$\psi_{II}(x) = \Gamma\cos kx$ $\quad \psi_{II}'(x) = -\Gamma k\sin kx$

$\psi_{III}(x) = Ae^{-qx}$ $\quad \psi_{III}'(x) = -Aqe^{-qx}$

συνέχεια ψ κ ψ' στα $x = \pm L/2$

$$\left.\begin{aligned} \psi_I\left(-\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow Ae^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma\cos\left(k\tfrac{L}{2}\right) \\ \psi_I'\left(-\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}'\left(-\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow Aqe^{-q\frac{L}{2}} = +\Gamma k\sin\left(k\tfrac{L}{2}\right) \end{aligned}\right\} \stackrel{\div}{\Rightarrow}$$

$$q = k\cdot\tan\left(k\tfrac{L}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\tan\left(k\tfrac{L}{2}\right) = \frac{q}{k}}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow \Gamma\cos\left(k\tfrac{L}{2}\right) = Ae^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi_{II}'\left(\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{III}'\left(\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow -\Gamma k\sin\left(\tfrac{kL}{2}\right) = -Aqe^{-q\frac{L}{2}} \end{aligned}\right\} \stackrel{\div}{\Rightarrow}$$

$$-k\tan\left(\tfrac{kL}{2}\right) = -q \Rightarrow \boxed{\tan\left(\tfrac{kL}{2}\right) = \frac{q}{k}}$$

Δηλαδή $\boxed{\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{q}{k}}$ $\boxed{A}$

ονομάζουμε

$\boxed{\xi := \frac{kL}{2}}$ $\boxed{\eta := \frac{qL}{2}}$ $\boxed{\xi^2 + \eta^2 = a^2 = \frac{mV_b L^2}{2\hbar^2}}$ $\tan\xi = \frac{\eta}{\xi}$ $\quad \boxed{\tan\xi = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi}}$ (A)

$\Downarrow$ $k = \frac{2\xi}{L}$ $\quad$ $\Downarrow$ $q = \frac{2\eta}{L}$ $\quad$ $\eta^2 = a^2 - \xi^2 \Rightarrow \eta = \sqrt{a^2 - \xi^2}$

ΕΣΤΩ ΠΕΡΙΤΤΕΣ για $x \in$ περιοχές I και III $\quad \psi(-x) = -\psi(x) \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x>0 &\Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow Be^{qx} = -Ae^{qx} \Leftrightarrow B=-A \\ x<0 &\Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow Ae^{+qx} = -Be^{qx} \Leftrightarrow B=-A \end{aligned}\right\} B=-A$$

$\underline{I}$

για $x \in$ περιοχή II $\quad \psi(-x) = -\psi(x) \Rightarrow$

$$\Gamma\cos(-kx) + \Delta\sin(-kx) = -\Gamma\cos kx - \Delta\sin kx \Rightarrow$$

$$\Gamma\cos(kx) - \cancel{\Delta\sin(kx)} = -\Gamma\cos(kx) - \cancel{\Delta\sin(kx)} \Rightarrow$$

$$2\Gamma\cos(kx) = 0 \quad (\forall x \in \text{περιοχή II}) \Rightarrow \Gamma = 0$$

Οπότε έχουμε

$$\psi_I(x) = -Ae^{qx} \qquad \psi_I'(x) = -Aqe^{qx}$$

$$\psi_{II}(x) = \Delta\sin kx \qquad \psi_{II}'(x) = \Delta k\cos kx$$

$$\psi_{III}(x) = Ae^{-qx} \qquad \psi_{III}'(x) = -Aqe^{-qx}$$

συνέχεια ψ και ψ' στα $x = \pm L/2$

$$\left.\begin{aligned} \psi_I\left(-\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow -Ae^{-q\frac{L}{2}} = -\Delta\sin\left(\tfrac{kL}{2}\right) \\ \psi_I'\left(-\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}'\left(-\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow -Aqe^{-q\frac{L}{2}} = \Delta k\cos\left(\tfrac{kL}{2}\right) \end{aligned}\right\} (\div) \Rightarrow$$

$$q = -k\cot\left(\tfrac{kL}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\tan\left(\tfrac{kL}{2}\right) = -\tfrac{k}{q}}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow Ae^{-q\frac{L}{2}} = \Delta\sin\left(\tfrac{kL}{2}\right) \\ \psi_{III}'\left(\tfrac{L}{2}\right) = \psi_{II}'\left(\tfrac{L}{2}\right) &\Rightarrow -Aqe^{-q\frac{L}{2}} = \Delta k\cos\left(\tfrac{kL}{2}\right) \end{aligned}\right\} (\div) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{q} = \frac{1}{k}\cdot\tan\left(\tfrac{kL}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\tan\left(\tfrac{kL}{2}\right) = -\tfrac{k}{q}}$$

Δηλαδή $\boxed{\tan\left(\tfrac{kL}{2}\right) = -\tfrac{k}{q}}$ $\boxed{\Pi}$

$$\boxed{\tan\xi = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}} \quad (\Pi)$$

Να σημειωθεί ότι τα ξ και a είναι αδιάστατα. $[\xi]=1$, $[a^2]=1$

$a^2 = \frac{mV_0L^2}{2\hbar^2}$ εκφράζει τη στέρηση ελευθερίας του σωματιδίου (m↑ ή V_0↑ ή L↑) όταν

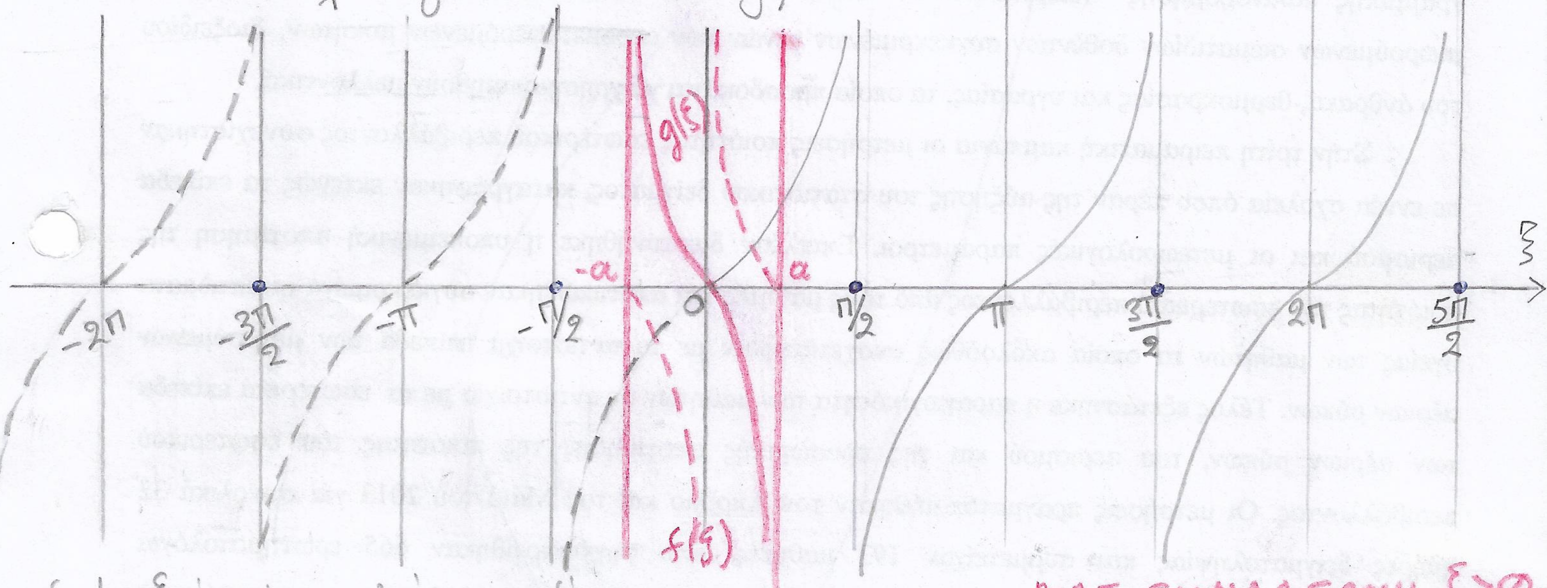
Συνοψίζοντας ΑΡΤΙΕΣ $\tan\left(\frac{kL}{2}\right)=\frac{q}{k}$ $\boxed{A}$ $\tan\xi=\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi}$ (A) $\frac{8}{\xi}$ (7)

ΠΕΡΙΤΤΕΣ $\tan\left(\frac{kL}{2}\right)=-\frac{k}{q}$ $\boxed{\Pi}$ $\tan\xi=-\frac{\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}$ (Π)

sin cos Η $\tan\xi$ δεν ορίζεται για $\xi=(2\ell+1)\frac{\pi}{2}$ $\ell\in\mathbb{N}$ $\boxed{k>0 \Leftrightarrow \xi>0}$

για να ορίζεται η ρίζα θα πρέπει $a^2-\xi^2\geq 0 \Leftrightarrow \xi^2\leq a^2 \Leftrightarrow -a\leq\xi\leq a$

και επιπλέον για ΑΡΤΙΕΣ το $\xi\neq 0$



η $\tan\xi$ εκτείνεται από $-\infty$ έως $+\infty$ ΜΑΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΝ $\xi>0$

$f(\xi)=\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi}$ πεδίο ορισμού $[-a,0)\cup(0,a]$ $f(\pm a)=0$

$\lim_{\xi\to 0^+} f(\xi)=+\infty$ $\lim_{\xi\to 0^-} f(\xi)=-\infty$ — 2 ξεχωριστοί κλάδοι ο ένας δε μας ενδιαφέρει γιατί είναι σε αρνητικά ξ.

η $f(\xi)$ εκτείνεται από $-\infty$ έως $+\infty$ ∃ πάντοτε τουλάχιστον ένα σημείο τομής των $f(\xi)$ & $\tan\xi$

$g(\xi)=-\frac{\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}$ πεδίο ορισμού $(-a,a)$ $g(0)=0$ — 1 κλάδος Το ένα κομμάτι του δε μας ενδιαφέρει γιατί είναι σε αρνητικά ξ.

$\lim_{\xi\to a} g(\xi)=\lim_{\xi\to a}\frac{-\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}=\frac{-a}{0}=-\infty$

$\lim_{\xi\to -a} g(\xi)=\lim_{\xi\to -a}\frac{-\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}=\frac{a}{0}=+\infty$

Τα πεδία ορισμού των $f(\xi)$ & $g(\xi)$ τερματίζονται στο a

κι επειδή $\xi>0 \Rightarrow (0,a]$ για $f(\xi)$ & $(0,a)$ για $g(\xi)$

9/11

για $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\exists$ 1 σημείο τομής των $f(\xi)$ κ $\tan\xi$

για $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $\exists$ 1 σημείο τομής των $f(\xi)$ κ $\tan\xi$

κ 1 σημείο τομής των $g(\xi)$ κ $\tan\xi$

για $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ $\exists$ 2 σημεία τομής των $f(\xi)$ κ $\tan\xi$

κ 1 σημείο τομής των $g(\xi)$ κ $\tan\xi$

για $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $\exists$ 2 σημεία τομής των $f(\xi)$ κ $\tan\xi$

κ 2 σημεία τομής των $g(\xi)$ κ $\tan\xi$

Δηλαδή έχουμε τουλάχιστον 1 λύση, ενώ προστίθεται μία κάθε φορά που αυξάνουμε το α κατά $\frac{\pi}{2}$. Οπότε ο αριθμός των λύσεων είναι

$$n = 1 + \mathrm{Int}\left[\frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}}\right] = 1 + \mathrm{Int}\left[\frac{\sqrt{\frac{m^* V_b L^2}{2\hbar^2}}}{\frac{\pi}{2}}\right] = 1 + \mathrm{Int}\left[\sqrt{\frac{m^* V_b L^2 4}{2\hbar^2 \pi^2}}\right]$$

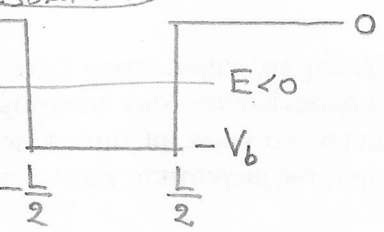
$$\Rightarrow \boxed{n = 1 + \mathrm{Int}\left[\sqrt{\frac{2 m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}}\right]}$$

$$k_W = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b)}$$

$$k_b = \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

$$\begin{cases} k_W \tan\left(k_W \frac{L}{2}\right) = k_b & \text{even} \\ k_W \cot\left(k_W \frac{L}{2}\right) = -k_b & \text{odd} \end{cases}$$

solutions



δεν χρειάζεται

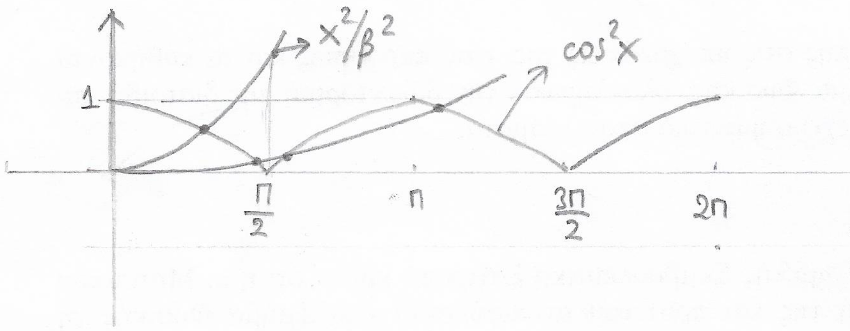
$$\frac{L}{2}k_W = \sqrt{\frac{2m(E+V_b)L^2}{4\hbar^2}} \Rightarrow \mathbb{k}_W = \sqrt{\beta^2-\alpha^2} \qquad \beta^2 = \frac{2mV_bL^2}{4\hbar^2}$$

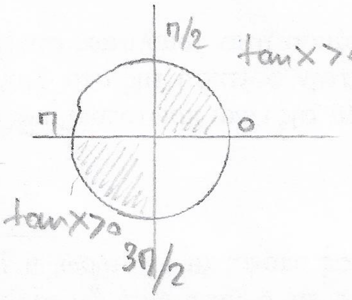
$$\frac{L}{2}k_b = \sqrt{-\frac{2mEL^2}{4\hbar^2}} \Rightarrow \mathbb{k}_b = \sqrt{\alpha^2},\ \alpha>0 \qquad \alpha^2 = -\frac{2mEL^2}{4\hbar^2}$$

$$\begin{cases} \mathbb{k}_W \cdot \tan(\mathbb{k}_W) = \mathbb{k}_b \\ \mathbb{k}_W \cdot \cot(\mathbb{k}_W) = -\mathbb{k}_b \end{cases} \qquad \mathbb{k}_W^2 = \beta^2 - \mathbb{k}_b^2 \Rightarrow \mathbb{k}_W^2 + \mathbb{k}_b^2 = \beta^2$$

$$\begin{cases} x\tan x = \sqrt{\beta^2-x^2} \\ x\cot x = -\sqrt{\beta^2-x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2\tan^2 x = \beta^2 - x^2 \\ x^2\cot^2 x = \beta^2 - x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(1+\tan^2 x) = \beta^2 \\ x^2(1+\cot^2 x) = \beta^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2\frac{1}{\cos^2 x} = \beta^2 \\ x^2\frac{1}{\sin^2 x} = \beta^2 \end{cases} \quad \cos^2 x = \frac{x^2}{\beta^2} \quad \sin^2 x = \frac{x^2}{\beta^2}$$





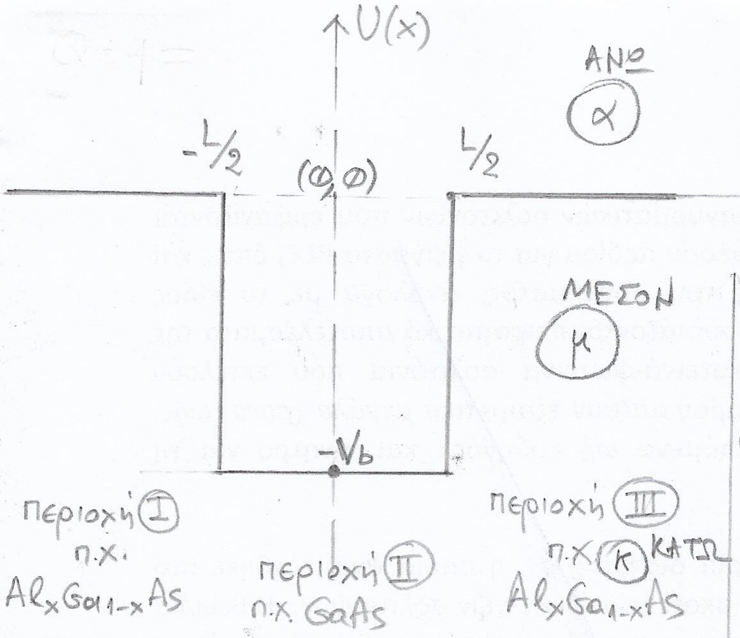
$$n(L) = 1 + \mathrm{Int}\left[\sqrt{\frac{2mV_bL^2}{\pi\hbar^2}}\right]$$

$$\left.\frac{x^2}{\beta^2}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\beta^2}$$

$$\frac{\beta^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{2mV_bL^2\cancel{4}}{\cancel{4}\hbar^2\pi^2} =$$

$$n(L) = 1 + \mathrm{Int}\left[\sqrt{\frac{\beta^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}}\right]$$

$$n(L) = 1 + \mathrm{Int}\left[\frac{\beta}{\pi/2}\right]$$



περιοχή (II) $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) - V_b\psi(x) = E\psi(x)$

$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b)\psi(x) = 0$

εάν $E > -V_b \Leftrightarrow E+V_b > 0$

$0 < \frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b) \xrightarrow{\text{θέτουμε}} k^2$ κι έστω $k>0$

$\Rightarrow \psi''(x) + k^2\psi(x) = 0$

ΔΛΜ $\psi(x) = \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}$

$\psi'(x) = \Gamma ik e^{ikx} + \Delta(-ik)e^{-ikx}$

$\psi''(x) = -k^2\Gamma e^{ikx} - k^2\Delta e^{-ikx}$

$\psi''(x) = -k^2\psi(x) \Rightarrow$

$-k^2\psi(x) + k^2\psi(x) = 0$ πού ισχύει

ή ΔΛΜ $\psi(x) = \Gamma\cos kx + \Delta\sin kx$

$\psi'(x) = -\Gamma k\sin kx + \Delta k\cos kx$

$\psi''(x) = -\Gamma k^2\cos kx - \Delta k^2\sin kx$

$\psi''(x) = -k^2\psi(x) \Rightarrow$

$-k^2\psi(x) + k^2\psi(x) = 0$ πού ισχύει

εάν $E < -V_b \Leftrightarrow E+V_b < 0$

$0 > \frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b) \xrightarrow{\text{θέτουμε}} -Q^2$ κι έστω $Q>0$

Ας εξετάσουμε αρχικά ενέργειες $E<0$.
("δέσμιες καταστάσεις")

περιοχές (I) κ (III) $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x) \Leftrightarrow \psi''(x) + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{\text{αρν}}\psi(x)$

$0 > \frac{2mE}{\hbar^2} \xrightarrow{\text{θέτουμε}} -q^2$ κι έστω $q>0$

Άρα

ΔΛΜ = δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής

$\psi''(x) - q^2\psi(x) = 0$

ΔΛΜ $\psi(x) = Ae^{-qx} + Be^{qx}$

$\psi'(x) = A(-q)e^{-qx} + Bqe^{qx}$

$\psi''(x) = Aq^2e^{-qx} + Bq^2e^{qx}$

$\psi''(x) = q^2\psi(x) \Rightarrow$

$q^2\psi(x) - q^2\psi(x) = 0$ που ισχύει

Δηλαδή αυτού του είδους οι λύσεις είναι ικανοποιητικές

Επειδή οι ψ(x) πρέπει να είναι τετραγωνικώς ολοκληρώσιμες ⇒

$\lim_{x\to\infty}\psi(x) = 0 \qquad \psi_{III}(x) = Ae^{-qx}$

$\lim_{x\to-\infty}\psi(x) = 0 \qquad \psi_{I}(x) = Be^{qx}$

$\psi_I(x) = Be^{qx} \Rightarrow \psi_I'(x) = Bqe^{qx}$ (I)

$\psi_{III}(x) = Ae^{-qx} \Rightarrow \psi_{III}'(x) = -Aqe^{-qx}$ (III)

Αν επιλέξουμε $\psi_{II}(x) = \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}$

$\psi_{II}'(x) = \Gamma ik e^{ikx} - \Delta ik e^{-ikx}$ (II)μ1

ΜΕΣΟΝ

ενώ αν επιλέξουμε $\psi_{II}(x) = \Gamma\cos kx + \Delta\sin kx$

$\psi_{II}'(x) = -\Gamma k\sin kx + \Delta k\cos kx$ (II)μ2

$\psi''(x) - Q^2\psi(x) = 0$

ΔΛΜ $\psi(x) = \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}$

$\boxed{\text{εάν } E=-V_b}$ $\psi_{II}''(x)=0$

$\psi_{II}'(x)=c$

$\psi_{II}(x)=cx+d$ (1΄)

$$\left.\begin{array}{l}\psi_I(-\frac{L}{2})=\psi_{II}(-\frac{L}{2}) \Rightarrow Be^{-q\frac{L}{2}}=c(-\frac{L}{2})+d \\ \psi_I'(-\frac{L}{2})=\psi_{II}'(-\frac{L}{2}) \Rightarrow Bqe^{-q\frac{L}{2}}=c\end{array}\right\} q=\frac{c}{c(-\frac{L}{2})+d}$$

$$\left.\begin{array}{l}\psi_{III}(\frac{L}{2})=\psi_{II}(\frac{L}{2}) \Rightarrow Ae^{-q\frac{L}{2}}=c\frac{L}{2}+d \\ \psi_{III}'(\frac{L}{2})=\psi_{II}'(\frac{L}{2}) \Rightarrow -Aqe^{-q\frac{L}{2}}=c\end{array}\right\} q=\frac{-c}{c\frac{L}{2}+d}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{c}{c(-\frac{L}{2})+d}=\frac{-c}{c\frac{L}{2}+d} \Rightarrow \cancel{\frac{cL}{2}}+d=\cancel{\frac{cL}{2}}-d \Rightarrow d=-d \Rightarrow d=0$$

$$q=\frac{\cancel{c}}{\cancel{c}(-\frac{L}{2})} \qquad q=\frac{-\cancel{c}}{\cancel{c}\frac{L}{2}}$$

$$q=-\frac{2}{L} \qquad q=-\frac{2}{L}$$

$q=-\frac{2}{L}<0$ Άτοπο διότι $q>0$ (το υποθέσαμε στην αρχή)

δηλ. δεν υπάρχει λύση για $E=-V_b \Leftrightarrow k=0 \Leftrightarrow \xi=0$

$\boxed{\text{εάν } E=0}$

$\psi''(x) - Q^2\psi(x) = 0$

ΔΛΜ $\psi(x) = \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}$

$\psi'(x) = -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx}$

$\psi''(x) = +\Gamma Q^2 e^{-Qx} + \Delta Q^2 e^{Qx}$

$\psi''(x) = Q^2\left(\Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}\right)$

$\psi''(x) = Q^2\psi(x) \Rightarrow$

$Q^2\psi(x) - Q^2\psi(x) = 0$ που ισχύει

Συνεπώς II κ $\left\{\begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx} \\ \psi'_{II}(x) &= -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx} \end{aligned}\right\}$ II ΚΑΤΩ

Δηλαδή για την περιοχή II έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις

II μ1 ή II μ2 για ενέργειες στο ΜΕΣΟΝ

II κ για ενέργειες στο ΚΑΤΩ

Κατά τα γνωστά, για να βρούμε τη συνολική λύση, θα πρέπει να ταιριάξουμε τις κυματοσυναρτήσεις κ τις παραγώγους τους στα όρια των περιοχών δηλαδή στα $x = \pm L/2$.

Ας προσπαθήσουμε να ταιριάξουμε τις I, II κ, III

$$\left.\begin{aligned} \psi_I\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= B e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= \Gamma e^{+Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}} \end{aligned}\right\} B e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi'_I\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= Bq e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi'_{II}\left(-\tfrac{L}{2}\right) &= -\Gamma Q e^{+Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}} \end{aligned}\right\} Bq e^{-q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}}$$

$(:) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{B}q\cancel{e^{-q\frac{L}{2}}}}{\cancel{B}\cancel{e^{-q\frac{L}{2}}}} = \frac{-\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{-Q\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta q e^{-Q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{-Q\frac{L}{2}}$$

$$\Rightarrow \Gamma(Q+q) e^{Q\frac{L}{2}} = \Delta(Q-q) e^{-Q\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{Q-q}{Q+q} e^{-QL}} \quad \oplus$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= A e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= \Gamma e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{Q\frac{L}{2}} \end{aligned}\right\} A e^{-q\frac{L}{2}} = \Gamma e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{Q\frac{L}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi'_{III}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= -Aq e^{-q\frac{L}{2}} \\ \psi'_{II}\left(\tfrac{L}{2}\right) &= -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}} \end{aligned}\right\} -Aq e^{-q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}}$$

$(:) \Rightarrow$

$$\frac{-\cancel{A}q e^{-q\frac{L}{2}}}{\cancel{A}e^{-q\frac{L}{2}}} = \frac{-\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}}}{\Gamma e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta e^{Q\frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$-\Gamma q e^{-Q\frac{L}{2}} - \Delta q e^{Q\frac{L}{2}} = -\Gamma Q e^{-Q\frac{L}{2}} + \Delta Q e^{Q\frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\Gamma(Q-q)e^{-Q\frac{L}{2}} = \Delta(Q+q)e^{Q\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{Q+q}{Q-q}e^{QL}} \quad \oplus$$

$$\oplus \text{ κ } \oplus \Rightarrow \frac{Q-q}{Q+q}e^{-QL} = \frac{Q+q}{Q-q}e^{QL} \Rightarrow \boxed{e^{-2QL} = \frac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2}}$$

το οποίο είναι ΑΤΟΠΟ

διότι $e^{-2QL} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{2QL}} < 1 \Leftrightarrow 1 < e^{2QL} \Leftrightarrow \ln 1 < 2QL \Leftrightarrow 0 < 2QL$ που ισχύει

ενώ $\frac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2} > 1 \Leftrightarrow \cancel{Q^2}+\cancel{q^2}+2Qq > \cancel{Q^2}+\cancel{q^2}-2Qq \Leftrightarrow 4Qq > 0$ που ισχύει

Δηλαδή δεν υπάρχει λύση στην ενεργειακή περιοχή ΚΑΤΩ

Ας δοκιμάσουμε στην ενεργειακή περιοχή ΜΕΣΩΝ

Για τις (II) μ1 $\Rightarrow$

Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια κυματοσυναρτήσεων και πρώτων παραγώγων στα σύνορα $x = \pm L/2$ προκύπτει (δέστε στη σελίδα 3' τις σχέσεις ⊠ κ ⊠)

$$\frac{(ik+q)}{(ik-q)}e^{ikL} = \frac{(ik-q)}{(ik+q)}e^{-ikL} \Rightarrow \boxed{e^{2ikL} = \frac{(ik-q)^2}{(ik+q)^2} = \frac{-k^2+q^2-2ikq}{-k^2+q^2+2ikq}} = \Lambda$$

⊠

$\boxed{\xi := \frac{kL}{2}}$, $\boxed{\eta := \frac{qL}{2}}$ $\Rightarrow \xi^2+\eta^2 = \frac{L^2}{4}\left(\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_b) - \frac{2m}{\hbar^2}E\right) = \frac{L^2 2mV_b}{4\hbar^2} = \frac{mV_bL^2}{2\hbar^2} := a^2 \Rightarrow$ = σταθερό, ανεξάρτητο της E κι έστω $a > 0$

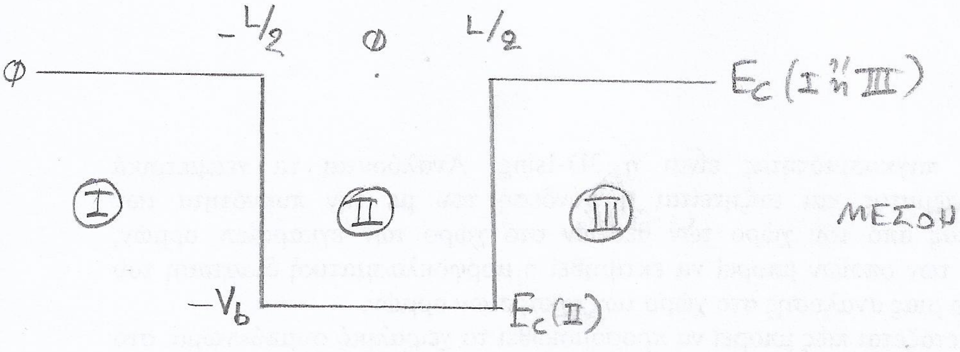
$\Downarrow$ $k = \frac{2\xi}{L}$, $\Downarrow$ $q = \frac{2\eta}{L}$, $\boxed{\xi^2+\eta^2 = a^2}$, $\boxed{-\xi^2+\eta^2 := \beta^2}$

οπότε $\Lambda = \frac{-\xi^2+\eta^2-2i\xi\eta}{-\xi^2+\eta^2+2i\xi\eta} = \frac{\beta^2-2i\xi\eta}{\beta^2+2i\xi\eta} = \frac{(\beta^2-2i\xi\eta)^2}{(\beta^2+2i\xi\eta)(\beta^2-2i\xi\eta)} \Rightarrow$

$$\Lambda = \frac{\beta^4-4i\xi\eta\beta^2-4\xi^2\eta^2}{\beta^4+4\xi^2\eta^2} \quad ⊠ \quad \Rightarrow e^{i4\xi}(\beta^4+4\xi^2\eta^2) = \beta^4-4i\xi\eta\beta^2-4\xi^2\eta^2$$

εν τω μεταξύ $\beta^4+4\xi^2\eta^2 = (-\xi^2+\eta^2)^2+4\xi^2\eta^2 = \xi^4+\eta^4-2\xi^2\eta^2+4\xi^2\eta^2 = (\xi^2+\eta^2)^2 = a^4$

ΑΝΩ



π.χ. II GaAs

I ή III $Al_xGa_{1-x}As$

ΜΕΣΩ

ΚΑΤΩ

$$E_c(\text{I ή III}) - E_c(\text{II}) = V_b$$

"Ένα κβαντικό φρέαρ εύρους L και βάθους V_b περιέχει

$$n = 1 + \mathrm{Int}\left[\sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}}\right]$$

δέσμιες ενεργειακές καταστάσεις ("στάθμες").

$\mathrm{Int}[\xi]$ είναι το ακέραιο μέρος του ξ.

ΑΣΚΗΣΗ

1

Θεωρήστε κβαντική τελεία σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με εσωτερικό GaAs διαστάσεων 8 nm × 4 nm × 4 nm και περίβλημα $Al_xGa_{1-x}As$ με μοριακό κλάσμα x: $V_b = 224\,meV$.
Θεωρήστε κατά προσέγγιση $m^* = m^*(GaAs) = 0.067\, m_e$.

(Α) Πόσες ενεργειακές στάθμες έχει αυτή η κβαντική τελεία;

(Β) Σε τι μήκος κύματος αντιστοιχεί η μετάβαση από τη ΘΣ στην 1η ΔΣ της εν λόγω κβαντικής τελείας; Έστω ότι μπορείτε να λύσετε τα μονοδιάστατα προβλήματα.

(Γ) Υποθέστε ότι έχουμε μια συλλογή από τέτοιες κβαντικές τελείες με ένα ηλεκτρόνιο στην καθεμία και ότι η στατιστική Boltzmann με ίδια στατιστικά βάρη περιγράφει την πιθανότητα κατάληψης των ενεργειακών σταθμών.
Η θερμοκρασία είναι (α) 4.2K κ (β) 300K
Συγκρίνετε τον αριθμό των κβαντικών τελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη ΘΣ με τον αριθμό των κβαντικών τελειών όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην 1η ΔΣ

(Δ) Έστω ότι η συλλογή κβ. τελειών βρίσκεται εντός καταλλήλου ΗΜ πεδίου.
Συγκρίνετε τον αριθμό των κβ.τελ. που σε χρόνο dt μεταβαίνουν από τη ΘΣ στην 1η ΔΣ με εξαναγκασμένη διεργασία $dN^{es}_{1\to2}$ με τον αριθμό των κβ.τελειών που μεταβαίνουν σε χρόνο dt από την 1η ΔΣ στη ΘΣ με εξαναγκασμένη διεργασία $dN^{es}_{2\to1}$.

Δίνονται $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\, Js$

$e = 1.602 \times 10^{-19}\, C$

$m_e = 9.109 \times 10^{-31}\, kg$

$k_B = 1.380 \times 10^{-23}\, J/K = 8.617 \times 10^{-5}\, eV/K$

ΙΔΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ για ∞ βάθη κβ. τελεία

(A) για $L = 8nm$

(2)

$$\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2} \simeq \frac{2 \cdot 0.067 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31}\, kg \cdot 224 \cdot 10^{-3} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\, \cancel{CV} \cdot 64 \cdot 10^{-18}\, m^2}{10 \cdot 1.054^2 \cdot 10^{-68}\, \cancel{J}S\, JS}$$

$$\simeq 2523 \frac{10^{-31-3-19-18}}{10^{-68}} = 2523 \frac{10^{-71}}{10^{-68}} = 2.523$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \simeq 1.59$$

$$\Rightarrow n = 1 + Int[1.59] = 2$$

για $L = 4nm$

$$\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2} \simeq 0.63075 \Rightarrow \sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \simeq 0.79$$

$$\Rightarrow n = 1 + Int[0.79] = 1$$

Δηλαδή στο φρέαρ x χωράνε 2 στάθμες E_{1x}, E_{2x}

στο φρέαρ y 1 στάθμη E_{1y}

στο φρέαρ z 1 στάθμη E_{1z}

$$\Theta\Sigma = E_1 = E_{1x} + E_{1y} + E_{1z}$$

$$1\eta\, \Delta\Sigma = E_2 = E_{2x} + E_{1y} + E_{1z}$$

$$\Delta E = E_{2x} - E_{1x}$$

(Β) $h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{2x} - E_{1x} \Rightarrow \lambda = \dots$

(Γ) $N_j = \frac{N_{o\lambda}}{Z} e^{-\frac{E_j}{k_B T}}$

$N_i = \frac{N_{o\lambda}}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$

$\Bigg\} \; \frac{N_j}{N_i} = e^{\frac{E_i - E_j}{k_B T}} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{E_1 - E_2}{k_B T}}$

(Δ) $dN_{1\to 2}^{\epsilon\xi} = N_1 \cdot dW_{\alpha\pi o\rho}^{\epsilon\xi} = N_1 \, \rho(\nu T) \, B_{12} \, dt$

$dN_{2\to 1}^{\epsilon\xi} = N_2 \cdot dW_{\epsilon\kappa\pi}^{\epsilon\xi} = N_2 \, \rho(\nu T) \, B_{21} \cdot dt$

$$\frac{dN_{1\to 2}^{\epsilon\xi}}{dN_{2\to 1}^{\epsilon\xi}} = \frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}$$

ΑΡΤΙΕΣ $\quad \tan\xi = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi} \Rightarrow \xi = \dots = \xi_A$

ΠΕΡΙΤΤΕΣ $\quad \tan\xi = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \Rightarrow \xi = \dots = \xi_\Pi$

$a^2 = \frac{m V_b L^2}{2\hbar^2}$

γνωστό

$\xi = \frac{kL}{2}$

$\downarrow$

k

$\frac{2m}{\hbar^2}(E + V_b) = k^2 \quad , k > 0$

$\Downarrow$

E