Έστω ότι αναφερόμαστε στο laser He-Ne το οποίο όπως είδαμε έχει ως κυριότερες μεταβάσεις $\lambda_{EP} \simeq 632.8\,nm$ (ερυθρό), $\lambda_{ΥΠΕΡ1} \simeq 3391\,nm$ (υπέρυθρο)

$\lambda_{ΥΠΕΡ2} \simeq 1152\,nm$ (υπέρυθρο)

ενώ, όπως είδαμε, υπάρχουν κι άλλες μεταβάσεις στο ορατό πορτοκαλί, κίτρινη, πράσινη.

Ας πούμε ότι διαλέγουμε να υποστηρίξουμε το λ_{EP}. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση ειδικής επενδύσεως των κατόπτρων ώστε να ανακλούν μόνο το ερυθρό φως.

Έτσι, το ερυθρό φως ανακλάται εντός της κοιλότητας και τα φωτόνια του πολλαπλασιάζονται μέσω εξαναγκασμένης εκπομπής μεταξύ των E_5 και E_2, ενώ τα φωτόνια άλλων μηκών κύματος διαπερνούν τα κάτοπτρα χωρίς να αναγκάζονται να περνούν διαρκώς μέσα από το ενεργό μέσο.

Από όλες τις προαναφερθείσες μεταβάσεις μεγαλύτερη απόδοση έχει η ερυθρή $\lambda_{EP} \simeq 632.8\,nm$. Το εύρος της, ας πούμε το FWHM, είναι περίπου $\Delta\nu_{EP}^{FWHM} \simeq 1.7\,GHz$.

ΔΙΑΜΗΚΕΙΣ ΤΡΟΠΟΙ ΕΝΤΟΣ ΕΥΡΟΥΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

Είδαμε, όμως, ότι εντός της κοιλότητας υποστηρίζονται μόνο ΗΜ τρόποι με τέτοιους ώστε

$$\boxed{\omega_m = \frac{m\pi c}{L},\ m\in\mathbb{N}^*} \Rightarrow 2\cancel{\pi}\nu_m = \frac{m\cancel{\pi}c}{L} \Rightarrow \boxed{\nu_m = \frac{mc}{2L},\ m\in\mathbb{N}^*}$$

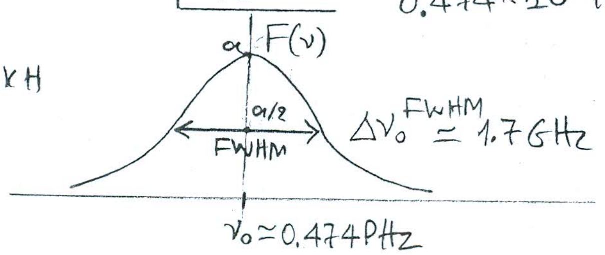
$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\lambda_{EP} = \lambda_0 \simeq 632.8\,nm} \\ c = \lambda_0\nu_0\end{array}\right\} \Rightarrow \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3\times10^8\,m/s}{632.8\times10^{-9}\,m} = 0.0047408\times10^{17}\,Hz \Rightarrow$$

$$\boxed{\nu_0 \simeq 0.474\times10^{15}\,Hz = 0.474\,PHz}$$

Το εύρος FWHM της ερυθράς γραμμής είναι περίπου $\Delta\nu_0^{FWHM} \simeq 1.7\,GHz$

$$\boxed{\frac{\Delta\nu_0^{FWHM}}{\nu_0} = \frac{1.7\times10^9\,Hz}{0.474\times10^{15}\,Hz} \simeq 3.586\times10^{-6}} \quad \text{(λεπτή)}$$

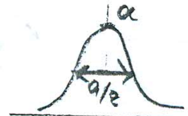
ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ



$\Delta\nu_0^{FWHM} \simeq 1.7\,GHz$

$F(\nu)$: συνάρτηση φασματικής γραμμής

FWHM = Full Width at Half Maximum



$\leftrightarrow$ FWHM

ΕΡΩΤΗΜΑ: Υπάρχουν υποστηριζόμενοι εντός της κοιλότητας ΗΜ τρόποι m που να εμπίπτουν στην συχνοτική περιοχή της ν_0 που έχει εύρος $\Delta\nu_0^{FWHM}$;

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}, m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 2\pi\nu_m = \frac{m\pi c}{L} \Rightarrow \boxed{\nu_m = \frac{mc}{2L}, m \in \mathbb{N}^*}$$

Άρα η συχνοτική απόσταση μεταξύ των ΗΜ τρόπων είναι $\boxed{\Delta\nu_{m,m+1} = \frac{c}{2L}}$

Ας υποθέσουμε ότι η κοιλότητα έχει μήκος $L \simeq 0.4m$. Τότε

$$\Delta\nu_{m,m+1} = \frac{c}{2L} = \frac{3\times 10^8\, m}{2 \cdot 0.4\, m\, s} = \frac{30}{8} 10^8 Hz = \frac{15}{4} \cdot 10^2 MHz = 375\, MHz$$

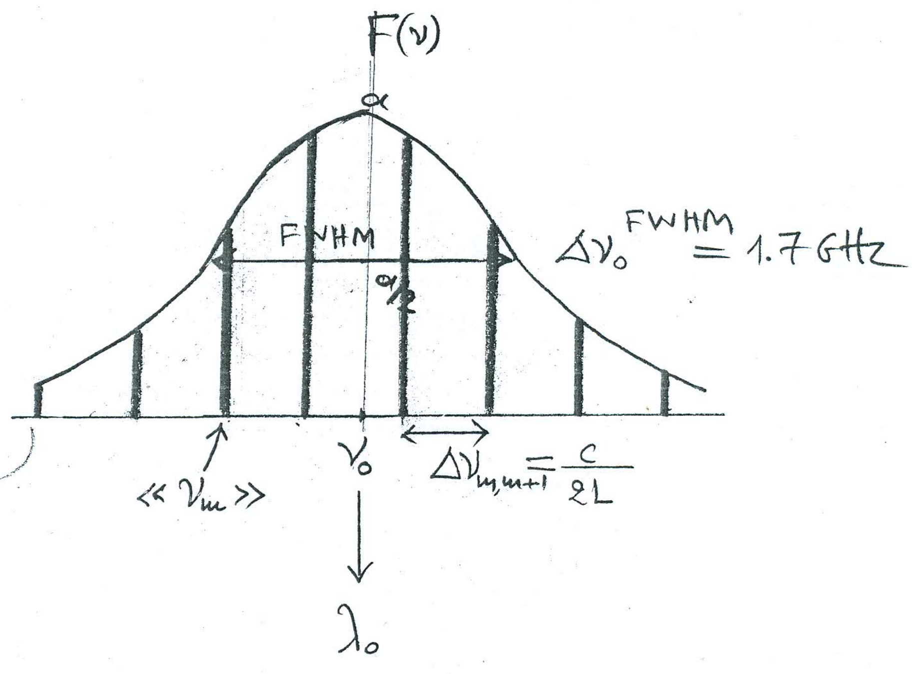
Εντός του FWHM της φασματικής γραμμής θα χωράνε

$$N = \left[\frac{\Delta\nu_0^{FWHM}}{\frac{c}{2L}}\right]$$ ΗΜ τρόποι

↓ ακέραιο μέρος

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα $N = \left[\frac{1.7\, GHz}{375\, MHz}\right] = [4.5\overline{33}] = 4$

δηλαδή χωράνε 4 ΗΜ τρόποι εντός του FWHM της φασματικής γραμμής.



ενώ το εύρος κάθε ΗΜ τρόπου είναι της τάξεως των $\Delta\nu_m^{FWHM} \simeq 1$ με $10\, MHz$

$$\boxed{\begin{array}{l}\nu_0 = 0.474\, PHz \\ \lambda_0 = 632.8\, nm\end{array}}$$

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ m ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΝΤΑΙ ΣΤΗ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

$$\nu_m = \frac{mc}{2L} \sim \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \Rightarrow m\lambda_0 \sim 2L \Rightarrow m \sim \frac{2L}{\lambda_0}$$

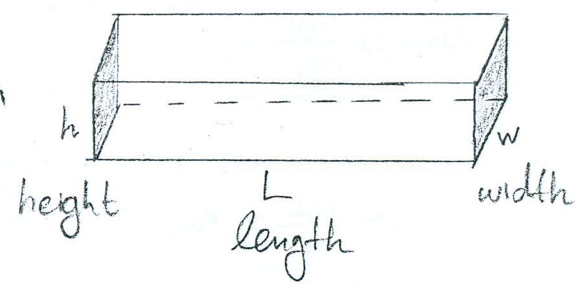
ΣΤΑΣΙΜΑ ΗΜ κύματα σε 3Δ κοιλότητα

Διαμήκεις τρόποι και εγκάρσιοι τρόποι TEM_{pq}

Αποδείξαμε ότι για ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα   orthorhombic or rectangular cavity

$$\omega_{m_x,m_y,m_z} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{a_z}\right)^2}$$

$$\nu_{m_x,m_y,m_z} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{a_z}\right)^2}$$



$$\omega_{pqm} = \pi c \sqrt{\left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{q}{w}\right)^2 + \left(\frac{m}{L}\right)^2}$$

$$\boxed{\nu_{pqm} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{q}{w}\right)^2 + \left(\frac{m}{L}\right)^2}}$$

Βεβαίως, στο 3Δ πρόβλημα, αν δύο από τους αριθμούς τρόπων μηδενίζονται, έχουμε μηδενισμό του ΗΜ πεδίου στην κοιλότητα

Αν όμως έχουμε τετραγωνική κοιλότητα (tetragonal cavity) με $h=w=a$

$$\nu_{pqm} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{p^2+q^2}{a^2} + \frac{m^2}{L^2}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{L^2(p^2+q^2)m^2}{a^2 L^2 m^2} + \frac{m^2}{L^2}}$$

$$\nu_{pqm} = \frac{cm}{2L}\sqrt{\frac{L^2}{a^2}\frac{p^2+q^2}{m^2} + 1} \Rightarrow \boxed{\nu_{pqm} = \frac{mc}{2L}\sqrt{1+x}}$$

όπου

$$\boxed{x = \frac{L^2}{a^2}\,\frac{p^2+q^2}{m^2}}$$

Το x είναι στην πράξη πολύ μικρό. Επί παραδείγματι, έστω ότι αναφερόμαστε σε ένα laser He-Ne με «κεντρικό» μήκος κύματος $\lambda_{EP} = \lambda_0 = 632.8\,nm$ και μήκος $L = 0.4\,m$

$\nu_0 \simeq 0.474\,PHz$

$\left(\frac{L}{a}\right)^2$

για $a = 1\,mm \Rightarrow \left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4\cdot 10^{-1}}{10^{-3}}\right)^2 = 160000$

για $a = 2\,mm \Rightarrow \left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4\cdot 10^{-1}}{2\cdot 10^{-3}}\right)^2 = 40000$

για $a = 4\,mm \Rightarrow \left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4\cdot 10^{-1}}{4\cdot 10^{-3}}\right)^2 = 10000$

για $a = 10\,mm \Rightarrow \left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4\cdot 10^{-1}}{10^{-2}}\right)^2 = 1600$

m^2

Αν είχαμε μόνο διαμήκεις τρόπους (1Δ πρόβλημα)

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L} \Rightarrow 2\cancel{\pi}\nu_m = \frac{m\cancel{\pi}c}{L} \Rightarrow \nu_m = \frac{mc}{2L}$$

$$\nu_m = \frac{mc}{2L} \sim \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \Rightarrow m\lambda_0 \sim 2L$$

$$m \sim \frac{2L}{\lambda_0} = \frac{2\cdot 0.4\,m}{632.8\,nm} \simeq 1.264\times 10^6$$

$$m^2 \sim 1.598\times 10^{12}$$

Άρα για μικρά $p,q \simeq 0,1,2,\ldots$ το x είναι μικρό, οπότε μπορούμε π.χ. να κάνουμε ένα ανάπτυγμα Taylor

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots \simeq 1 + \frac{x}{2}$$

Άρα

$$\nu_{pqm} \approx \frac{mc}{2L}\left(1+\frac{1}{2}\frac{L^2}{a^2}\frac{p^2+q^2}{m^2}\right) = \frac{mc}{2L} + \frac{\cancel{m}c}{4\cancel{L}}\frac{L^{\cancel{2}}}{a^2}\frac{p^2+q^2}{m^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{\nu_{pqm} \approx \frac{mc}{2L} + \frac{cL}{4a^2}\frac{p^2+q^2}{m}}$$

$$\boxed{\nu_{00m} \approx \frac{mc}{2L} = \nu_m}$$

συχνότητες διαμηκών τρόπων (longitudinal modes) τού 1Δ προβλήματος

Βεβαίως, στο 3Δ πρόβλημα, άν δύο από τους αριθμούς τρόπων μηδενίζονται, έχουμε μηδενισμό τού ΗΜ πεδίου στην κοιλότητα.

Οί τρόποι με $p \neq 0$ ή $q \neq 0$ λέγονται έγκάρσιοι τρόποι (transverse modes).

Ἡ συχνοτική άπόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών έγκαρσίων τρόπων π.χ. μεταβάλλονται μόνο το p με συγκεκριμένα q και m είναι λοιπόν

$$\Delta\nu_{p,p+1} \approx \frac{cL}{4a^2}\frac{q^2+(p+1)^2}{m} - \frac{q^2+p^2}{m} = \frac{cL}{4a^2m}(p+1+p)(p+1-p)$$

$$\boxed{\Delta\nu_{p,p+1} \approx \frac{cL}{4a^2}\frac{(2p+1)}{m}}$$

π.χ. για $L=0.4m$, $a=4mm$

$$\Delta\nu_{p,p+1} \approx \frac{3\times10^8 \cancel{m}\, 4\cdot10^{-1} \cancel{m}}{4\cdot4^2\, s\cdot10^{-6}\cancel{m^2}}\frac{(2p+1)}{m} \approx \frac{3}{16}\times10^{13}\,Hz$$

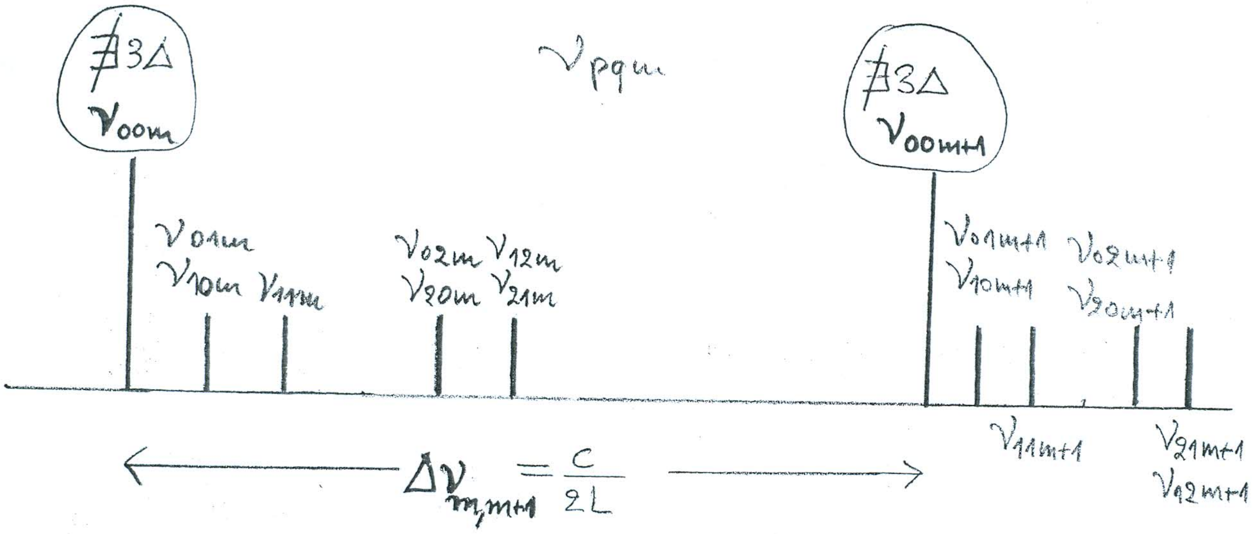
$m \sim 1.264\times10^6$

$$\Delta\nu_{p,p+1} \approx \frac{3}{16}\cdot10^{13}\frac{(2p+1)}{1.264\times10^6} \sim \frac{3\cdot4}{16\cdot5}\times10^7(2p+1)\,Hz$$

$$\Delta\nu_{p,p+1} \approx \frac{3}{20}\times10^7(2p+1)\,Hz \Rightarrow \boxed{\Delta\nu_{p,p+1} \approx 1.5\,(2p+1)\,MHz}$$

Θυμόμαστε τώρα ότι $\Delta\nu_{m,m+1} = \dfrac{c}{2L} = 375MHz$

$L=0.4m$



Διαμήκεις και έγκάρσιοι τρόποι ν_{pqm} σε όρθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα

ν_{00m} διαμήκεις τρόποι (longitudinal modes)

ν_{pqm} ($p \neq 0$ ή $q \neq 0$) έγκάρσιοι τρόποι (transverse modes)

Κάποια γενική όνοματολογία τρόπων

TE transverse electric έγκάρσιοι ήλεκτρικοί
χωρίς ήλεκτρικό πεδίο στη διεύθυνση διαδόσεως

TM transverse magnetic έγκάρσιοι μαγνητικοί
χωρίς μαγνητικό πεδίο στη διεύθυνση διαδόσεως

TEM transverse electromagnetic έγκάρσιοι ήλεκτρομαγνητικοί
χωρίς ήλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στη διεύθυνση διαδόσεως

Με βάση την προσεγγιστική σχέση $\nu_{pqm} \approx \frac{mc}{2L} + \frac{cL^2 m}{2\,2a^2 m^2 L}(p^2+q^2)$

$$\nu_{pqm} \simeq \nu_m + \nu_m \frac{L^2}{2a^2 m^2}(p^2+q^2)$$

Άρα για το ίδιο m

$p=1, q=0$ ή $p=0, q=1$	$p^2+q^2=1$
$p=1, q=1$	$p^2+q^2=2$
$p=2, q=0$ ή $p=0, q=2$	$p^2+q^2=4$
$p=2, q=1$ ή $p=1, q=2$	$p^2+q^2=5$
	⋮