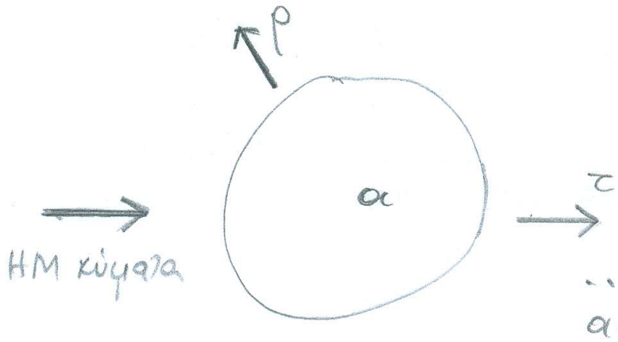
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

ΜΕΛΑΝ ΣΩΜΑ κ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ



$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

... απορροφήσεως absorption...

... ανακλάσεως reflection...

... διελεύσεως transmission...

συντελεστής... ...coefficient

α: το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που απορροφάται από το σώμα

ρ: » ανακλάται »

τ: » διέρχεται »

μέλαν σώμα (black body) (μαύρο) ένα εξιδανικευμένο σώμα, το οποίο απορροφά όλη την προσπίπτουσα σε αυτό ΗΜ ακτινοβολία, ανεξαρτήτως συχνότητας και ανεξαρτήτως γωνίας προσπτώσεως.

δηλαδή $\rho = 0$, $\tau = 0$, $\alpha = 1$ ∀ συχνότητα, ∀ γωνία προσπτώσεως

Αν ίσχυαν μόνο τα παραπάνω, τότε λόγω της συνεχούς απορροφήσεως ενέργειας, η θερμοκρασία του σώματος θα αυξανόταν συνεχώς.

Έτσι, ένα μέλαν σώμα, το οποίο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία (άρα και σε σταθερή θερμοκρασία) θα πρέπει να επαν-εκπέμπει ΗΜ ακτινοβολία, η οποία καλείται ακτινοβολία μέλανος σώματος (black-body radiation), έτσι ώστε να διατηρείται το ενεργειακό ισοζύγιο.

Η ακτινοβολία μέλανος σώματος γίνεται σύμφωνα με το νόμο του Planck, ούτως ώστε το φάσμα της εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία δηλ. $\rho(\nu, T)$

ανεξαρτήτως: σχήματος, συστάσεως του μέλανος σώματος, γωνίας εκπομπής

"Ενα μέλαν σώμα, σε θερμοδυναμική ισορροπία, έχει τις άξιοσημείωτες ιδιότητες:

(I1) είναι ιδανικός εκπομπός, δηλ. εκπέμπει σε κάθε συχνότητα τουλάχιστον όση ενέργεια εκπέμπει οιοδήποτε άλλο σώμα ταυτόσημης θερμοκρασίας.

(I2) είναι ισότροπος εκπομπός, δηλ. ή άκτινοβολία του διασπείρεται ισοτρόπως, ανεξαρτήτως κατευθύνσεως

Τα πραγματικά σώματα εκπέμπουν κλάσμα τής ακτινοβολίας μέλανος σώματος

συντελεστής εκπομπής ή εκπεμπότης / emission coefficient or emissivity ϵ — Το ποσοστό τής HM ακτινοβολίας, το όποιο έπαν-εκπέμπεται από το σώμα

έξ ορισμού $\epsilon_{\text{μέλανος σώματος σε θερμοδυν. ισορρ.}} = 1$

δηλ. συνοψίζονται για το μέλαν σώμα σε θερμοδυν. ισορροπία ισχύει $a=1$, $\rho=0$, $\tau=0$, $\epsilon=1$

γκρίζο σώμα gray body $\epsilon<1$, a, ρ, τ

λευκό σώμα white body $\rho=1$ $a=0$ $\tau=0$

αδιαφανές σώμα opaque body $\tau=0$ $a+\rho=1$

διαφανές σώμα transparent body $\tau=1$ $a=0$ $\rho=0$

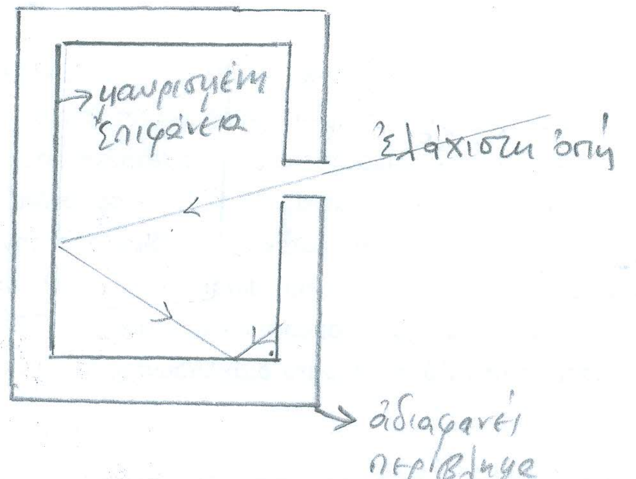
ενεργός θερμοκρασία / effective temperature ενός σώματος π.χ αστέρος, πλανήτου, κλπ

είναι ή θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος, το όποιο θα έξέπεμπε την ίδια συνολική (δηλ. ολοκληρωμένη σε όλες τις συχνότητες) ένταση ακτινοβολίας I $\left([I] = \frac{W}{m^2} \right)$

Προσεγγιστική πραγμάτωση μέλανος σώματος

κοιλότητα με οπή
cavity with a hole

photonics: "cavity"
(cavity with a hole)



1898
1901 Otto Lummer κ Ferdinand Kurlbaum

σήμερα ∃ ενδιαφέρον για
σχεδόν μέλανα σώματα
(near-black bodies)

εφαρμογές
απόκρυψη (radar)
συλλέκτες ηλ. ενέργειας
ανιχνευτές υπέρυθρης ακτινοβ.
τηλεσκόπια, κάμερες (ως π.χ. αντιανακλαστικές επιφάνειες για τη μείωση του διάχυτου ή αδέσποτου φωτός)

Προσεγγιστικά μέλανα σώματα
αιθάλη
απλό μαύρο χρώμα $\alpha \leq 0.975$
super black $\alpha \simeq 0.996$ $\rho = 0.004$
Vantablack (με νανοσωλήνες C) $\alpha = 0.9996$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$ ν. Planck

$$[\rho(\nu, T)] = \frac{J}{m^3\, Hz}$$

Πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία

Νόμος του Planck και σύγκριση με τις προσεγγίσεις Rayleigh-Jeans κ Wien

(«Υπεριώδης καταστροφή» κ «Πρόβλημα μακρινού υπερύθρου»)

$\rho(\nu,T)\,d\nu$

$$[\rho(\nu,T)d\nu] = \frac{J}{m^3}$$

$$[\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$$

ένα από τα ζητήματα που αποκάλυψε τη κβάντωση της ΗΜ ακτινοβολίας

$$\rho_{RJ}(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} = \rho_{RJ}$$

Rayleigh-Jeans
κλασική φυσική, 1900

$$\rho_W(\nu,T) = \frac{a\nu^3}{e^{b\nu/T}} \quad \frac{\text{σταθερές}}{\text{από ν. Planck}} \quad \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T}} = \rho_W$$

Wien
πειραματικό ταίριασμα (ελληνιστί fitting) στις υψηλές συχνότητες
1896

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T}-1} = \rho$$

Planck
παλαιά κβαντική μηχανική, 1900
συμπίπτει με τα πειραματικά δεδομένα για όλες τις συχνότητες και θερμοκρασίες

$$x := \frac{h\nu}{k_B T}$$ (είναι >0) για μη μηδενική συχνότητα

πεδία ορισμού - φυσικού ενδιαφέροντος

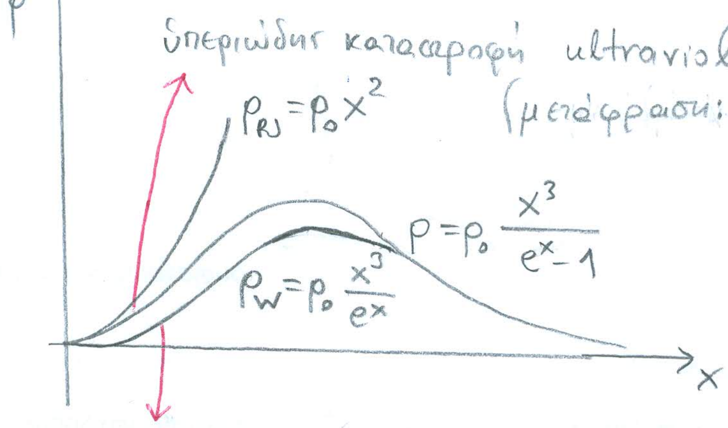
$$\rho_{RJ} = \rho_0\, x^2 \qquad \mathcal{A}_{RJ} = \mathbb{R}_+$$

$$\rho_W = \rho_0\,\frac{x^3}{e^x} \qquad \mathcal{A}_W = \mathbb{R}_+$$

$$\rho = \rho_0\,\frac{x^3}{e^x-1} \qquad \mathcal{A} = \mathbb{R}_+^*$$

$$\rho_0 := \frac{8\pi}{h^2}\left(\frac{k_B T}{c}\right)^3 \qquad [\rho_0] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$$

υπεριώδης καταστροφή ultraviolet catastrophe (μετάφραση: σε υψηλές συχνότητες)



πρόβλημα μακρινού υπερύθρου (μετάφραση: σε χαμηλές συχνότητες)
far infrared problem

Οι ονομασίες αυτές έχουν σχέση με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα γύρω στο 1900 και είναι με αυτή την έννοια παραπλανητικές

$$x := \frac{h\nu}{k_B T}$$

Όμως, η περιοχή όπου αρχίζουν οι αποκλίσεις, εξαρτάται προφανώς από τη θερμοκρασία του μέλανος σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ Συμβατικά στην περιοχή του ΗΜ φάσματος "μακρινό υπέρυθρο" (far infrared, FIR) έχουμε μήκος κύματος $25\,\mu m < \lambda < 1000\,\mu m$. Βρείτε σε τι $x=\frac{h\nu}{k_B T}$ αντιστοιχεί το FIR, για θερμοκρασία (α') 300K δηλαδή περίπου τη θερμοκρασία ενός ζώου, (β') 6000K δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ηλίου, (γ') 6K.

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{h\nu}{k_B T},\ c=\lambda\nu \Rightarrow \lambda=\dfrac{ch}{x k_B T} \\ 25\,\mu m < \lambda < 1000\,\mu m \end{array}\right\} \Rightarrow 25\,\mu m < \frac{ch}{x k_B T} < 1000\,\mu m \Rightarrow$$

$$\frac{ch}{k_B T \cdot 1000\,\mu m} < x < \frac{ch}{k_B T \cdot 25\,\mu m}$$

$$\frac{hc}{k_B} = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,Js\ 3\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{1.380\cdot 10^{-23}\,JK^{-1}} \simeq 14.404\cdot 10^{-3}\,Km$$

(α') 300K $\Rightarrow$ $0.048 < x < 1.921$

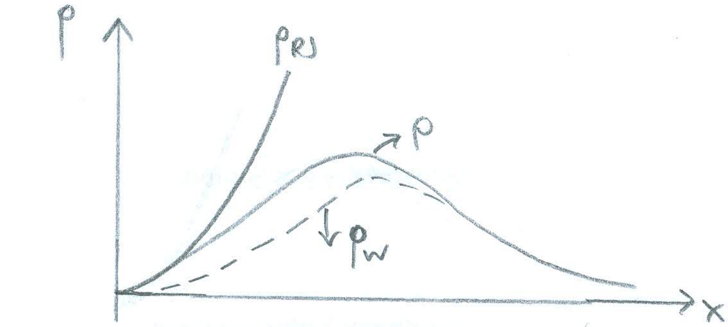
(β') 6000K $\Rightarrow$ $0.0024 < x < 0.09605$

$x_{\chi\alpha\mu} < x < x_{\upsilon\psi}$

(γ') 6K $\Rightarrow$ $2.4 < x < 96.05$

x_{LOW} x_{HIGH}

ΑΣΚΗΣΗ FIR $25\mu m < \lambda < 1000\mu m$



Ποιά πρέπει να είναι η θερμοκρασία μέλανος σώματος T : $\rho_W = 0.5\rho$ για το άνω και το κάτω όριο της περιοχής FIR;

(δηλαδή «να υπάρχει πρόβλημα στο μακρινό υπέρυθρο»)

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε $\rho_W = 0.5\rho \Rightarrow \rho_0 \dfrac{x^3}{e^x} = 0.5\,\rho_0 \dfrac{x^3}{e^x-1} \Rightarrow e^x - 1 = 0.5\,e^x \Rightarrow$

$$0.5e^x = 1 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2 \simeq 0.693}$$

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}, \quad c = \lambda\nu \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{ch}{x k_B T}} \qquad \boxed{\frac{hc}{k_B} \simeq 14.404 \cdot 10^{-3}\,Km}$$

$$25\,\mu m < \frac{ch}{x k_B T} < 1000\,\mu m \Rightarrow$$

$$\frac{hc}{x k_B 1000\mu m} < T < \frac{hc}{x k_B 25\mu m}$$

$$\frac{14.404 \cdot 10^{-3} K\cancel{m}}{\ln 2\, \cancel{1000} \cdot \cancel{10^{-6}} \cancel{m}} < T < \frac{14.404\, 10^{-3}\,Km}{\ln 2 \cdot 25 \cdot 10^{-6} m}$$

$$\frac{14.404}{0.693} K < T < \frac{14.404}{0.693} \cdot 40\,K$$

$$\boxed{21\,K \lesssim T \lesssim 831\,K}$$

Δύο διατυπώσεις τοῦ νόμου Stefan–Boltzmann
(1) ὡς πρὸς την πυκνότητα ἐνέργειας $\mathcal{E}(T)$
(2) ὡς πρὸς την ἔνταση ἀκτινοβολίας I

$$[\mathcal{E}(T)] = \frac{J}{m^3}$$

$$[I] = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2}$$

(1)

$\mathcal{E}(T) = aT^4$

πυκνότητα ἐνέργειας

$\frac{J}{m^3}$

κοιλότητα μέλανος σώματος θερμοκρασίας T

$$\mathcal{E}(T) := \int_0^\infty \rho(\nu, T)\, d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}\, d\nu$$

$$x := \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{x k_B T}{h} \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx$$

$$\mathcal{E}(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \left(\frac{k_B T}{h}\right) \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx}_{\pi^4/15}$$

$$\mathcal{E}(T) = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3} \cdot T^4$$

ἤ $\boxed{\mathcal{E}(T) = aT^4}$ $\quad a \simeq 7.5657 \cdot 10^{-16} \frac{J}{m^3 K^4}$

(2)

$I = \sigma T^4$

ἐνέργεια που ἐκπέμπεται ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας κ ἀνὰ μονάδα χρόνου

$\frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$

κοιλότητα μέλανος σώματος θερμοκρασίας T

$\boxed{\Phi_\sigma = \frac{n}{4} \langle u \rangle}$ ἀπὸ κινητική θεωρία ἀερίων (δεδομένο)

ροή σωματιδίων

κρούσεων στα τοιχώματα ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας και ἀνὰ μονάδα χρόνου

$$[\Phi_\sigma] = \frac{1}{m^3} \cdot \frac{m}{s} = \frac{1}{m^2 \cdot s}$$

ροή φωτονίων

$\boxed{\Phi_\gamma = \frac{n}{4} c}$

$\boxed{\langle h\nu \rangle = \frac{\mathcal{E}(T)}{n}}$ μέση ἐνέργεια φωτονίου

ἔνταση ἐξερχόμενης ΗΜ ἀκτινοβολίας $\boxed{I = \Phi_\gamma \langle h\nu \rangle}$

Ἄρα $I = \frac{n}{4} c \frac{\mathcal{E}(T)}{n} \Rightarrow \boxed{I = \frac{c}{4} \mathcal{E}(T)}$

$$I = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4$$

ἤ $\boxed{I = \sigma T^4}$ $\quad \sigma \simeq 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

ΝΟΜΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΣ Wien

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$\boxed{\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1}} \quad \text{ν. Planck}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2(e^x-1) - x^3 e^x}{(e^x-1)^2} = \rho_0 x^2 \frac{3(e^x-1) - x e^x}{(e^x-1)^2}$$

ἀν ψάχνουμε ἀκρότατα, θα πρέπει $\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow$ (ἀφοῦ $x \neq 0$) $3(e^x - 1) = x e^x$

φαίνεται ὅτι $x_0 \sim 3$

ἀκριβέστερα, ἀριθμητικά βρίσκουμε

ἤ και με online grapher $x_0 \simeq 2.821439$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_B T} \simeq 2.821439 \Rightarrow \nu_0 \simeq \left(58.789 \frac{GHz}{K}\right) \cdot T \quad \text{ἤ} \quad \frac{\nu_0}{T} \simeq 58.789 \frac{GHz}{K}$$

"νόμος μετατόπισεως" τοῦ ν_0 συναρτήσει τοῦ T

$$\boxed{\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x}} \quad \text{ν. Wien}$$

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2 e^x - x^3 e^x}{e^{2x}} = \rho_0 x^2 \frac{3e^x - x e^x}{e^{2x}} = \rho_0 x^2 \frac{3 - x}{e^x}$$

ἀν ψάχνουμε ἀκρότατα, θα πρέπει $\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow$ (για $x \neq 0$) $x_0 = 3$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_B T} = 3 \Rightarrow \nu_0 = 3 \frac{k_B}{h} T \quad \text{ἤ} \quad \frac{\nu_0}{T} \simeq 62.510 \frac{GHz}{K}$$

"νόμος μετατόπισεως" τοῦ ν_0 συναρτήσει τοῦ T

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε πώς στο σημείο x_0 ἡ $\frac{d^2\rho_w}{dx^2} < 0$, ὥστε πράγματι να ἔχουμε μέγιστο. Χρησιμοποιῆστε το ν. Wien $\rho_w = \rho_0 \frac{x^3}{e^x}$

$$\frac{d^2\rho_w}{dx^2} = \rho_0 \frac{(6x - 3x^2)e^x - (3x^2 - x^3)e^x}{e^{2x}} = \rho_0 \frac{6x - 3x^2 - 3x^2 + x^3}{e^x} = \rho_0 \frac{6x - 6x^2 + x^3}{e^x}$$

$$\frac{d^2\rho_w}{dx^2} = \rho_0 x \frac{x^2 - 6x + 6}{e^x} \quad \text{και για } x = x_0 = 3 \Rightarrow \frac{d^2\rho_w}{dx^2} = \rho_0 \cdot 3 \cdot \frac{9 - 18 + 6}{e^3} < 0$$

Νόμος τοῦ Planck στη μορφή $\rho(\lambda,T)$

προσοχή στον ορισμό

$$\int_0^\infty \rho(\lambda,T)\,d\lambda := \int_0^\infty \rho(\nu,T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu$$

$$[\rho(\lambda,T)d\lambda] = \frac{J}{m^3}$$

$$[\rho(\nu,T)d\nu] = \frac{J}{m^3}$$

$$\Downarrow$$

$$[\rho(\lambda,T)] = \frac{J}{m^3\cdot m}$$

$$[\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz}$$

$$c = \lambda\nu \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = (-1)c\lambda^{-2}$$

$$\int_0^\infty \rho(\lambda,T)\,d\lambda := \frac{8\pi h\,\cancel{c^3}}{\cancel{c^3}}\,c\int_\infty^0 \frac{1}{\lambda^3}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}\,\frac{(-1)}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$= 8\pi hc\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}\,d\lambda \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\cdot\left(e^{hc/\lambda k_BT}-1\right)}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: τα $\rho(\nu,T)$, $\rho(\lambda,T)$ δεν έχουν ίδιες μονάδες μετρήσεως (δεν είναι ίδια μεγέθη)

Ορίζοντας $\psi := \dfrac{hc}{\lambda k_BT}$ και $\rho_0' := 8\pi\dfrac{(k_BT)^5}{(hc)^4}$

$$\boxed{\rho(\psi) = \rho_0'\,\frac{\psi^5}{e^\psi - 1}}$$

ν. Planck

$$[\rho_0'] = \frac{J^5\,s^4}{(Js)^4\,m^4} = \frac{J}{m^4} = \frac{J}{m^3\cdot m}$$

αν ψάχνουμε άκρότατα, θα πρέπει $\dfrac{d\rho}{d\psi} = 0$

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \rho_0'\,\frac{5\psi^4(e^\psi-1) - \psi^5 e^\psi}{(e^\psi-1)^2}$$

$$\Rightarrow \psi^4\left\{5(e^\psi-1) - \psi e^\psi\right\} = 0$$

$\Rightarrow$ (για $\psi \neq 0$) $\quad 5(e^\psi - 1) = \psi e^\psi$

φαίνεται ότι $\psi_0 \sim 5$ ή και με online grapher

ἀκριβέστερα, ἀριθμητικὰ βρίσκουμε $\psi_0 \simeq 4.965114$

$$\frac{hc}{\lambda_0 k_BT} \simeq 4.965114 \Rightarrow \lambda_0 T \simeq 2.897772\cdot 10^{-3}\,mK$$

"νόμος μετατοπίσεως" τοῦ λ_0 συναρτήσει τοῦ T

$$\boxed{\rho_w(\psi) = \rho_0' \frac{\psi^5}{e^\psi}}$$

v. Wien

$$\frac{d\rho_w}{d\psi} = \rho_0' \frac{5\psi^4 e^\psi - \psi^5 e^\psi}{e^{2\psi}} \to \rho_0' \psi^4 \frac{5-\psi}{e^\psi} = \rho_0' \frac{5\psi^4 - \psi^5}{e^\psi}$$

και $\frac{d\rho_w}{d\psi} = 0 \Rightarrow$ (για $\psi \neq 0$) $5e^\psi = \psi e^\psi \Rightarrow$

$$\psi_0 = 5$$

$$\frac{hc}{\lambda_0 k_B T} = 5 \Rightarrow \lambda_0 \cdot T = 2.877554 \text{ mK}$$

"νόμος μετατοπίσεως" του λ_0 συναρτήσει του T

(Ο νόμος μετατοπίσεως του Wien παράχθη από τον Wilhelm Wien το 1893

στη μορφή $\lambda_0 \cdot T = \text{σταθερά}$

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε πως στο σημείο ψ_0 η $\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} < 0$, ώστε πράγματι να έχουμε μέγιστο. Χρησιμοποιήστε το ν. Wien $\rho_w = \rho_0' \frac{\psi^5}{e^\psi}$

$$\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' \frac{(20\psi^3 - 5\psi^4)e^\psi - (5\psi^4 - \psi^5)e^\psi}{e^{2\psi}} = \rho_0' \frac{20\psi^3 - 10\psi^4 + \psi^5}{e^\psi}$$

$$\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' \psi^3 \frac{20 - 10\psi + \psi^2}{e^\psi}$$ και για $\psi = \psi_0 = 5 \Rightarrow \frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' \cdot 5^3 \frac{20 - 50 + 25}{e^5} < 0$