ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΝ ΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ.

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ RABI.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ (RWA, Rotating Wave Approximation)

Είχαμε καταλήξει στο Γραμμικό Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων 1ης τάξεως

$$\boxed{\dot{C}_{k'}(t) = \frac{-i}{\hbar}\sum_{k} C_k(t)\, e^{i(\Omega_{k'}-\Omega_k)t}\, U_{\varepsilon k'k}(t)}$$

0

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + U_\varepsilon(\vec{r},t)$$

$$i\hbar\frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\vec{r},t)$$

$$\Psi(\vec{r},0) = \Phi(r) = \text{γνωστή}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_k f_k \Phi_k(\vec{r})$$

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_k C_k(t)\, e^{-i\Omega_k t}\,\Phi_k(\vec{r})$$

$$\hat{H}_0\Phi_k(\vec{r}) = E_k\Phi_k(\vec{r})$$

$$E_k = \hbar\Omega_k$$

Θα το λύσουμε για ΔΣ

Ορίζουμε $\Omega := \Omega_2 - \Omega_1 = \dfrac{E_2 - E_1}{\hbar}$

Είχαμε βρει επίσης

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = \begin{cases} -\wp\,\varepsilon_0\cos\omega t, & k\neq k' \\ 0, & k = k' \end{cases}$$

$$\wp = \wp_z = \wp_{z21} = -e z_{21} = -e z_{12} = \wp_{z12}$$

κάναμε την προσέγγιση διπόλου, $\vec{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0\hat{z}\cos\omega t$

τη δικαιολογήσαμε για $|\vec{r}|\sim a_0$ και οπτικά μήκη κύματος $(\lambda >> a_0)$

ω: η κυκλική συχνότητα του μονοχρωματικού, πολωμένου ηλεκτρικού κύματος

$k'=1$

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{i}{\hbar}C_1(t)\,\overbrace{e^{i(\Omega_1-\Omega_1)t}}^{1}\,\overbrace{U_{\varepsilon 11}(t)}^{0} - \frac{i}{\hbar}C_2(t)\,e^{i(\Omega_1-\Omega_2)t}\,U_{\varepsilon 12}(t)$$

$$\dot{C}_1(t) = +\frac{i}{\hbar}C_2(t)\,e^{-i\Omega t}\,\wp\,\varepsilon_0\cos\omega t = \frac{i\wp\varepsilon_0}{\hbar}C_2(t)\,e^{-i\Omega t}\cos\omega t$$

$k'=2$

$$\dot{C}_2(t) = -\frac{i}{\hbar}C_1(t)\,e^{i(\Omega_2-\Omega_1)t}\,U_{\varepsilon 21}(t) - \frac{i}{\hbar}C_2(t)\,\overbrace{e^{i(\Omega_2-\Omega_2)t}}^{1}\,\overbrace{U_{\varepsilon 22}(t)}^{0}$$

$$\dot{C}_2(t) = +\frac{i}{\hbar}C_1(t)\,e^{i\Omega t}\,\wp\,\varepsilon_0\cos\omega t = \frac{i\wp\varepsilon_0}{\hbar}C_1(t)\,e^{i\Omega t}\cos\omega t$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

$$\dot{C}_1(t) = \frac{i\wp E_0}{2\hbar} C_2(t)\, e^{-i\Omega t}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

$$\dot{C}_2(t) = \frac{i\wp E_0}{2\hbar} C_1(t)\, e^{i\Omega t}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$$

ή

$$\dot{C}_1(t) = \frac{i\wp E_0}{2\hbar}\left[e^{i(\omega-\Omega)t} + \cancelto{\text{RWA } 0}{e^{-i(\omega+\Omega)t}}\right]\cdot C_2(t)$$

$$\dot{C}_2(t) = \frac{i\wp E_0}{2\hbar}\left[\cancelto{\text{RWA } 0}{e^{i(\omega+\Omega)t}} + e^{-i(\omega-\Omega)t}\right]\cdot C_1(t)$$

$$\boxed{\Delta := \omega - \Omega}$$
αποσυντονισμός
detuning

Αν το ω του ΗΜ πεδίου ταιριάζει αρκετά με την ενεργειακή διαφορά των δύο σταθμών $\Omega := \Omega_2 - \Omega_1$

$$\omega \sim \Omega := \Omega_2 - \Omega_1$$

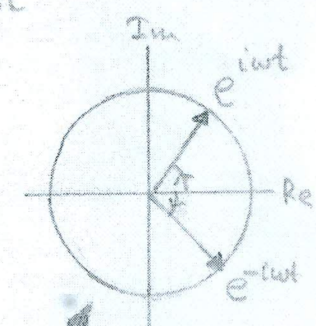
χωρίς να είναι υποχρεωτικό να ταυτίζονται...

$\Rightarrow$ $\omega + \Omega$ μεγάλο <u>υψίσυχνο</u>

$\omega - \Omega$ μικρό <u>χαμηλόσυχνο</u>

Οι όροι $e^{-i(\omega+\Omega)t}$ και $e^{i(\omega+\Omega)t}$ είναι γρήγοροι όροι

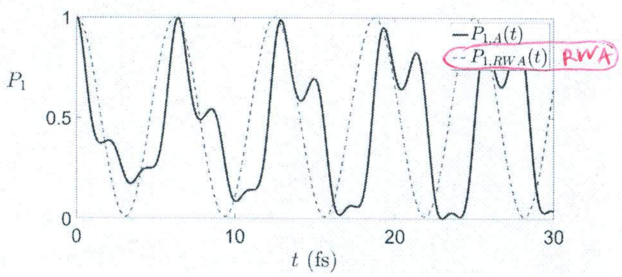
Άρα, σε οποιαδήποτε αξιοσημείωτη χρονική κλίμακα, οι γρήγορες αυτές ταλαντώσεις θα έχουν, κατά μέσο όρο, μηδενική ή περίπου μηδενική επίδραση στο αποτέλεσμα.
(ΥΠΟΘΕΣΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΤΙΚΗ...)



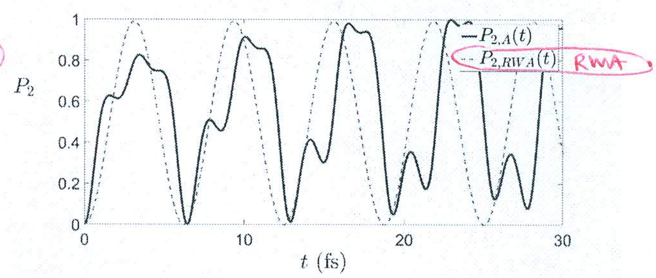
<u>προέλευση ονόματος</u>

RWA Rotating Wave Approximation ; Αγνοούμε αυτούς
Προσέγγιση Περιστρεφόμενου Κύματος τους γρήγορους όρους

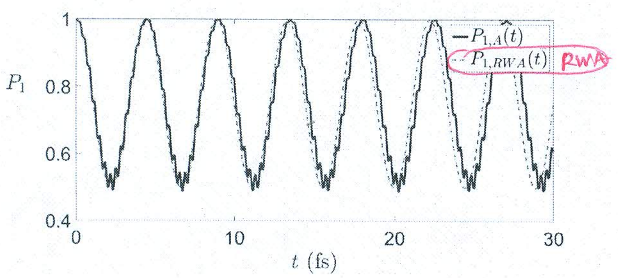
$$\boxed{\begin{aligned}\dot{C}_1(t) &= \frac{i\wp E_0}{2\hbar} e^{i\Delta t}\, C_2(t) \\ \dot{C}_2(t) &= \frac{i\wp E_0}{2\hbar} e^{-i\Delta t}\cdot C_1(t)\end{aligned}}$$



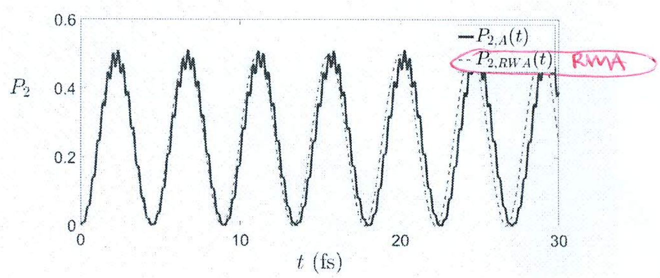
(i) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 0.1fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 1fs^{-1}$ *και* $\Omega = 0.9fs^{-1}$.



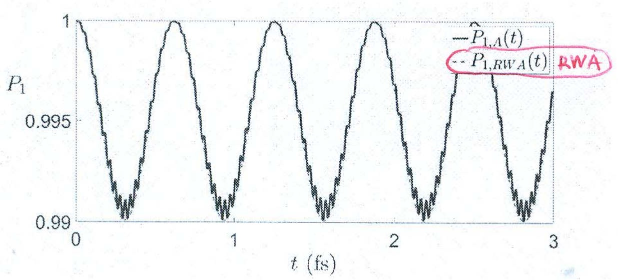
(ii) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 0.1fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 1fs^{-1}$ *και* $\Omega = 0.9fs^{-1}$.



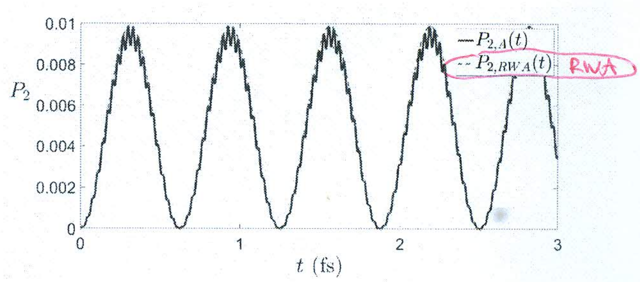
(iii) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 1fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 10fs^{-1}$ *και* $\Omega = 9fs^{-1}$.



(iv) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 1fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 10fs^{-1}$ *και* $\Omega = 9fs^{-1}$.



(v) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 10fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 100fs^{-1}$ *και* $\Omega = 90fs^{-1}$.



(vi) $\Omega_R = 1fs^{-1}$ *και* $\Delta = 10fs^{-1}$, *όπου* $\omega = 100fs^{-1}$ *και* $\Omega = 90fs^{-1}$.

Σχήμα 4.1 *Ταλαντώσεις Rabi για την περίπτωση όπου το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη, στην αρχή του χρόνου για διαφορετικά Δ, για την κάτω στάθμη ή στάθμη 1 (αριστερά) και την άνω στάθμη ή στάθμη 2 (δεξιά).*

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{i}{2}\,\Omega_R\, e^{i\Delta t}\cdot C_2(t)$$

$$\dot{C}_2(t) = -\frac{i}{2}\,\Omega_R\, e^{-i\Delta t}\cdot C_1(t)$$

χρονικώς εξαρτημ. συντελεστές

(μολύβι αν $\wp > 0$)

(μπλε αν $\wp < 0$)

ορίσαμε

$\Delta := \omega - \Omega$ αποσυντονισμός detuning

$\Omega_R := \frac{-\wp \mathcal{E}_0}{\hbar}$ >0 συχνότητα Rabi >0

Δ εκφράζει την διαφορά μεταξύ ω ΗΜ πεδίου και $\Omega := \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$

1 • Το $\mathcal{E}_0$ εκφράζει το πόσο ισχυρό είναι το πεδίο, δηλ. το πλάτος του πεδίου

2 • Το $\wp$ εκφράζει το κατά πόσο το πεδίο εμπλέκει τις δύο στάθμες

$\xrightarrow[\bullet 2]{\bullet 1}$ Το Ω_R εκφράζει την ισχύ της διαταραχής κι ορίζεται πάντοτε θετικό.

---

a Θα κάνουμε ένα μετασχηματισμό για να πάρουμε σύστημα διαφ. εξισώσεων με χρονικώς ανεξάρτητους συντελεστές

(M)
$$\begin{cases} C_1(t) = \mathbb{C}_1(t)\, e^{\frac{i\Delta t}{2}} \Rightarrow \dot{C}_1(t) = \dot{\mathbb{C}}_1(t)\, e^{\frac{i\Delta t}{2}} + \mathbb{C}_1(t)\,\frac{i\Delta}{2}\, e^{\frac{i\Delta t}{2}} \\ C_2(t) = \mathbb{C}_2(t)\, e^{-\frac{i\Delta t}{2}} \Rightarrow \dot{C}_2(t) = \dot{\mathbb{C}}_2(t)\, e^{-\frac{i\Delta t}{2}} + \mathbb{C}_2(t)\left(-\frac{i\Delta}{2}\right) e^{-\frac{i\Delta t}{2}} \end{cases}$$

$$\dot{\mathbb{C}}_1(t)\,\cancel{e^{\frac{i\Delta t}{2}}} + \mathbb{C}_1(t)\,\frac{i\Delta}{2}\,\cancel{e^{\frac{i\Delta t}{2}}} = -\frac{i}{2}\,\Omega_R\,\cancel{e^{i\Delta t}}\;\mathbb{C}_2(t)\,\cancel{e^{-\frac{i\Delta t}{2}}}$$

$$\dot{\mathbb{C}}_2(t)\,\cancel{e^{-\frac{i\Delta t}{2}}} + \mathbb{C}_2(t)\left(-\frac{i\Delta}{2}\right)\cancel{e^{-\frac{i\Delta t}{2}}} = -\frac{i}{2}\,\Omega_R\,\cancel{e^{-i\Delta t}}\;\mathbb{C}_1(t)\,\cancel{e^{\frac{i\Delta t}{2}}}$$

$$\dot{\mathbb{C}}_1(t) = -\frac{i\Delta}{2}\,\mathbb{C}_1(t) - \frac{i\Omega_R}{2}\,\mathbb{C}_2(t)$$

$$\dot{\mathbb{C}}_2(t) = -\frac{i\Omega_R}{2}\,\mathbb{C}_1(t) + \frac{i\Delta}{2}\,\mathbb{C}_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbb{C}}_1(t) \\ \dot{\mathbb{C}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & -\frac{i\Omega_R}{2} \\ -\frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1(t) \\ \mathbb{C}_2(t) \end{bmatrix}$$

σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{i\Omega_R}{2} e^{i\Delta t} \\ \frac{i\Omega_R}{2} e^{-i\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix}$$

Το σύστημα λύνεται με 3 διαφορετικούς τρόπους a, b, c

a → ΗΤΣΧ μεθ. ΙΔ-ΙΤ

b → ΧΕ

c → Newton

ΛΥΣΗ ΤΟΥ ⊛

Εισάγουμε το διάνυσμα

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{C}_1(t) \\ \dot{C}_2(t) \end{bmatrix}$$

και ορίζουμε

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} -\frac{i\Delta}{2} & -\frac{i\Omega_R}{2} \\ -\frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2} \end{bmatrix} := -iA \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{2} & +\frac{\Omega_R}{2} \\ +\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2} \end{bmatrix}$$

Οπότε το ⊛ γράφεται

$$\dot{\vec{x}}(t) = \tilde{A}\vec{x}(t) = -iA\vec{x}(t)$$

Ας δοκιμάσουμε λύσεις της μορφής

$$\vec{x}(t) = \vec{v}\, e^{\tilde{\lambda} t}$$

$$\vec{v}\tilde{\lambda}\cancel{e^{\tilde{\lambda}t}} = \tilde{A}\vec{v}\cancel{e^{\tilde{\lambda}t}}$$

$$\tilde{A}\vec{v} = \tilde{\lambda}\vec{v}$$

ή $\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$ με $\tilde{\lambda} := -i\lambda$

Δηλαδή το όλο θέμα ανάγεται σε ένα πρόβλημα ιδιοανυσμάτων - ιδιοτιμών από τη λύση του οποίου θα προκύψουν

τα ιδιοανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ και

οι αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_1, λ_2

Έχοντας ελέγξει ότι τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, η λύση του προβλήματος είναι

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{2} \sigma_k \vec{v}_k e^{-i\lambda_k t}} \qquad \tilde{\lambda}_k = -i\lambda_k$$

Από τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τα σ_k

Πρώτα πρώτα, όμως, θα βρούμε τις ιδιοτιμές

$$A\vec{u}=\lambda\vec{u} \Rightarrow A\vec{u}=\lambda I\vec{u} \Rightarrow (A-\lambda I)\vec{u}=0$$

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\Delta}{2} & +\frac{\Omega_R}{2}\\ +\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\Delta}{2}-\lambda & +\frac{\Omega_R}{2}\\ +\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2}-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\det=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}\frac{\Delta}{2}-\lambda & +\frac{\Omega_R}{2}\\ +\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2}-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$-\left(\frac{\Delta}{2}-\lambda\right)\left(\frac{\Delta}{2}+\lambda\right)-\frac{\Omega_R^2}{4}=0 \Rightarrow$$

$$-\left(\frac{\Delta^2}{4}-\lambda^2\right)-\frac{\Omega_R^2}{4}=0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2=\frac{\Omega_R^2}{4}+\frac{\Delta^2}{4}=\frac{\Omega_R^2+\Delta^2}{4}$$

$$\boxed{\lambda_{2,1}=\pm\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}}$$

Στην περίπτωση συντονισμού $(\Delta=0)$

$$\boxed{\lambda_{2,1}=\pm\frac{|\Omega_R|}{2}=\pm\frac{\Omega_R}{2}}$$

ορίζεται πάντοτε θετικό $\Omega_R>0$

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε <u>αρχικές συνθήκες</u> $C_1(0)=1$, $C_2(0)=0$

λόγω της (M)

$C_1(0)=1$ $C_2(0)=0$ $\Leftarrow$ αρχικώς το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κάτω στάθμη

ΛΥΣΗ για $\Delta=0$

$$\lambda_{2,1} = \pm\frac{|\Omega_R|}{2} = \pm\frac{\Omega_R}{2}$$ Ω_R πάντοτε θετική

• για $\lambda_1 = -\frac{\Omega_R}{2}$

$$① \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & \frac{\Omega_R}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\Omega_R}{2}U_{11} - \frac{\Omega_R}{2}U_{21} = 0 \\ -\frac{\Omega_R}{2}U_{11} + \frac{\Omega_R}{2}U_{21} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{11} = U_{21} = k$$

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \qquad \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = 1 \Rightarrow 2|k|^2 = 1 \underset{\pi.\chi.}{\Rightarrow} k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\vec{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ το ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -\frac{\Omega_R}{2}$

• για $\lambda_2 = \frac{\Omega_R}{2}$

$$① \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Omega_R}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -\frac{\Omega_R}{2}U_{12} - \frac{\Omega_R}{2}U_{22} = 0 \\ -\frac{\Omega_R}{2}U_{12} - \frac{\Omega_R}{2}U_{22} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$U_{12} = -U_{22} = k$$

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix} \qquad \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = 1 \Rightarrow 2|k|^2 = 1 \underset{\pi.\chi.}{\Rightarrow} k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\vec{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ το ιδιοάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = \frac{\Omega_R}{2}$

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{2} \sigma_k \vec{v}_k e^{-i\lambda_k t} =$$

$$= \sigma_1 \vec{v}_1 e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2 \vec{v}_2 e^{-i\lambda_2 t}$$

$$= \sigma_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{+i\frac{\Omega_R}{2}t} + \sigma_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t} \Rightarrow$$

$(\Delta=0)$

$$\begin{bmatrix} C_1(t) \cancel{e^{-\frac{i\Delta t}{2}}} \\ C_2(t) \cancel{e^{\frac{i\Delta t}{2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\Omega_R t}{2}} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\Omega_R t}{2}} \\ \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}} e^{\frac{i\Omega_R t}{2}} - \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i\Omega_R t}{2}} \end{bmatrix}$$

$C_1(0)=1 \quad C_2(0)=0$ αρχική συνθήκη

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sqrt{2}} \\ 0 &= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \quad \sigma_1=\sigma_2=\sigma \text{ και } \frac{2\sigma}{\sqrt{2}}=1 \Rightarrow \sigma=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi$

$e^{-i\phi}=\cos\phi-i\sin\phi$

$\cos\phi=\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}$

$i\sin\phi=\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2}$

Οπότε,

$$C_1(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{i\Omega_R t}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{i\Omega_R t}{2}}=\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$$C_2(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{i\Omega_R t}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{i\Omega_R t}{2}}=i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

ΑΡΑ

$$P_1(t)=|C_1(t)|^2=\cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$$P_2(t)=|C_2(t)|^2=\sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y \mp \sin x \sin y$

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$\cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}$$

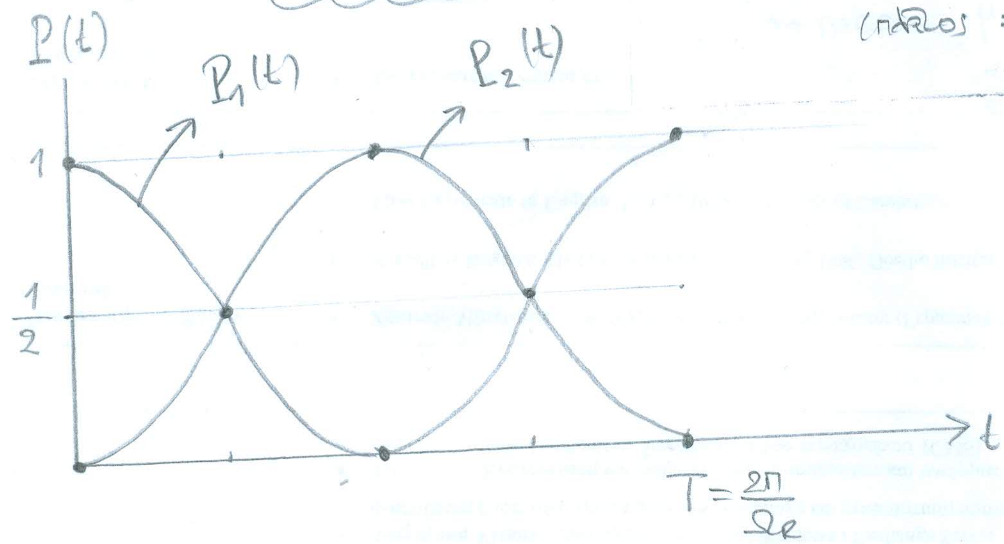
$$|c_1(t)|^2 = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \doteq \frac{\cos(\Omega_R t)+1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\Omega_R t)$$

$$|c_2(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = 1-\cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(\Omega_R t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_R}$$ περίοδος ταλαντώσεων

στο συντονισμό ($\Delta = 0$)

$$\mathcal{A} = 1$$ μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως
maximum transfer percentage
(πλάτος $= \mathcal{A}/2$)



$$\langle |c_1(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle |c_2(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2}$$

maximum transfer rate

$$p := \frac{\mathcal{A}_2}{T} = \frac{1\,\Omega_R}{2\pi} = \frac{\Omega_R}{2\pi}$$

ορισμός

t_{2mean} $$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\Omega_R t_{2mean}) \Rightarrow \cos(\Omega_R \cdot t_{2mean}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega_R t_{2mean} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{2mean} = \frac{\pi}{2\Omega_R}$$

μέσος ρυθμός μεταβιβάσεως
mean transfer rate

$$k := \frac{\langle |c_2(t)|^2 \rangle}{t_{2mean}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2\Omega_R}} = \frac{\Omega_R}{\pi} \qquad \frac{k}{\frac{\mathcal{A}_2}{T}} = 2 \Rightarrow k = 2\,\frac{\mathcal{A}_2}{T}$$

εκφράζει το μεταβιβαζόμενο ποσοστό, αλλά και τη χρονική κλίμακα του φαινομένου

ΑΣΚΗΣΗ

Χρησιμοποιώντας τη γενική λύση του ΔΣ, αποδείξτε πως για αρχική τοποθέτηση του ηλεκτρονίου στην κάτω στάθμη (1), το μέγιστο ποσοστό μεταβιβάσεως στην άνω στάθμη (2) είναι $4\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}$.

$$\vec{x}(t)=\sum_{k=1}^{2}\sigma_k\vec{u}_k e^{-i\lambda_k t} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \end{bmatrix} = \sigma_1\vec{u}_1 e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2\vec{u}_2 e^{-i\lambda_2 t}$$

$$\begin{bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 u_{11} e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2 u_{12} e^{-i\lambda_2 t} \\ \sigma_1 u_{21} e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2 u_{22} e^{-i\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

$$|A_1(t)|^2 = \left(\sigma_1 u_{11} e^{-i\lambda_1 t} + \sigma_2 u_{12} e^{-i\lambda_2 t}\right)\left(\sigma_1^* u_{11}^* e^{i\lambda_1 t} + \sigma_2^* u_{12}^* e^{i\lambda_2 t}\right)$$

$$|A_1(t)|^2 = |\sigma_1|^2 |u_{11}|^2 + \sigma_1 u_{11}\sigma_2^* u_{12}^* e^{i(\lambda_2-\lambda_1)t} + \sigma_2 u_{12}\sigma_1^* u_{11}^* e^{i(\lambda_1-\lambda_2)t} + |\sigma_2|^2|u_{12}|^2$$

Αν $\sigma_k, \vec{u}_k$ είναι πραγματικά

$$e^{ix} + e^{-ix} = \begin{matrix} \cos x + i\sin x \\ \cos x - i\sin x \end{matrix} = 2\cos x$$

$$|A_1(t)|^2 = \sigma_1^2 u_{11}^2 + \sigma_2^2 u_{12}^2 + 2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}\cos[(\lambda_2-\lambda_1)t]$$

$$\omega = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$|A_1(t)|^2 = \sigma_1^2 u_{11}^2 + \sigma_2^2 u_{12}^2 + 2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}\cos\omega t$$

$$\frac{2\pi}{T} = \lambda_2 - \lambda_1$$

$$1 = \sigma_1^2 u_{11}^2 + \sigma_2^2 u_{12}^2 + 2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}$$ Αρχική Συνθήκη

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$|A_1(t)|^2 = 1 - 2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12} + 2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}\cos\omega t$$

$$|A_1(t)|^2 = 1 + 2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}(\cos\omega t - 1)$$

$$-1 \le \cos\omega t \le 1$$

$$-2 \le \cos\omega t - 1 \le 0$$

$$-4\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12} \le 2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}(\cos\omega t - 1) \le 0$$

$$1 - 4\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12} \le 1 + 2\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}(\cos\omega t - 1) \le 1$$

$$1 - 4\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12} \le |A_1(t)|^2 \le 1$$

$$\Rightarrow p = \text{maximum transfer percentage} = 4\sigma_1 u_{11}\sigma_2 u_{12}$$