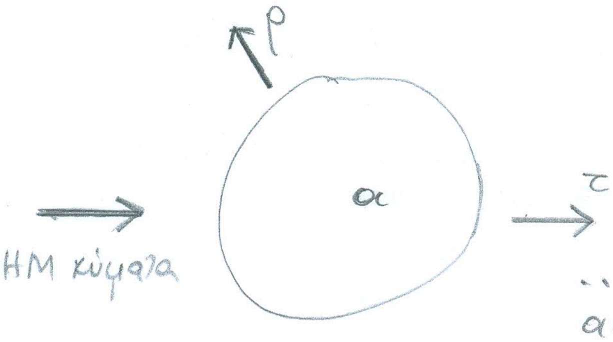
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

ΜΕΛΑΝ ΣΩΜΑ κ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ



$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

...απορροφήσεως absorption... ...ανακλάσεως reflection... ...διελεύσεως transmission...

συντελεστής... ...coefficient

α: Το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που απορροφάται από το σώμα

ρ: » ανακλάται »

τ: » διέρχεται »

μέλαν σώμα (black body) ένα εξιδανικευμένο σώμα, το οποίο απορροφά όλη την προσπίπτουσα σε αυτό ΗΜ ακτινοβολία, ανεξαρτήτως συχνότητας και ανεξαρτήτως γωνίας προσπτώσεως.

(μαύρο)

δηλαδή $\rho = 0$, $\tau = 0$, $\alpha = 1$ ∀ συχνότητα, ∀ γωνία προσπτώσεως

Αν ίσχυαν μόνο τα παραπάνω, τότε λόγω της συνεχούς απορροφήσεως ενέργειας, η θερμοκρασία του σώματος θα αυξανόταν συνεχώς.

Έτσι, ένα μέλαν σώμα, το οποίο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία (άρα και σε σταθερή θερμοκρασία) θα πρέπει να επαν-εκπέμπει ΗΜ ακτινοβολία, η οποία καλείται ακτινοβολία μέλανος σώματος black-body radiation, έτσι ώστε να διατηρείται το ενεργειακό ισοζύγιο.

Η ακτινοβολία μέλανος σώματος γίνεται σύμφωνα με το νόμο του Planck ούτως ώστε το φάσμα της εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία δηλ. $\rho(\nu, T)$

ανεξαρτήτως: σχήματος, συστάσεως του μέλανος σώματος, γωνίας εκπομπής

Ένα μέλαν σώμα, σε θερμοδυναμική ισορροπία, έχει τις <u>αξιοσημείωτες ιδιότητες</u>:

(Ι1) είναι <u>ιδανικός εκπομπός</u>, δηλ. εκπέμπει σε κάθε συχνότητα τουλάχιστον ίση ενέργεια εκπέμπει οποιοδήποτε άλλο σώμα ταυτόσημης θερμοκρασίας.

(Ι2) είναι <u>ισότροπος εκπομπός</u>, δηλ. η ακτινοβολία του διασπείρεται ισοτρόπως, ανεξαρτήτως κατευθύνσεως

Τα πραγματικά σώματα εκπέμπουν κλάσμα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος

<u>συντελεστής εκπομπής ή εκπεμπότης</u> emission coefficient or emissivity ϵ — Το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας, το οποίο επαν-εκπέμπεται από το σώμα

εξ ορισμού $\epsilon_{\text{μέλανος σώματος σε θερμοδυν. ισορ.}} := 1$

δηλ. συνοψίζοντας για το μέλαν σώμα σε θερμοδυν. ισορροπία ισχύει $a=1,\ \rho=0,\ \tau=0,\ \epsilon=1$

γκρίζο σώμα gray body $\epsilon<1$, a, ρ, τ

λευκό σώμα white body $\rho=1$ $a=0$ $\tau=0$

αδιαφανές σώμα opaque body $\tau=0$ $a+\rho=1$

διαφανές σώμα transparent body $\tau=1$ $a=0$ $\rho=0$

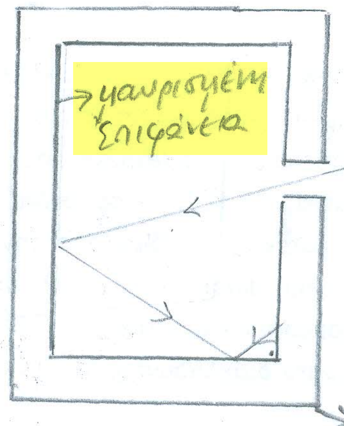
<u>ενεργός θερμοκρασία</u> effective temperature ενός σώματος π.χ. αστέρος, πλανήτου, κλπ

είναι η θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος, το οποίο θα εξέπεμπε την ίδια συνολική (δηλ. ολοκληρωμένη σε όλες τις συχνότητες) ένταση ακτινοβολίας I $\left([I]=\frac{W}{m^2}\right)$

Προσεγγιστική πραγμάτωση μέλανος σώματος

κοιλότητα με οπή
cavity with a hole

photonics: "cavity"
(cavity with a hole)



1898
1901 Otto Lummer κ Ferdinand Kurlbaum

σήμερα ∃ ενδιαφέρον για σχεδόν μέλανα σώματα (near-black bodies)

εφαρμογές
απόκρυψη (ραντάρ)
συλλέκτες ηλ. ενέργειας
ανιχνευτές υπέρυθρης ακτινοβ.
π.χ.
τηλεσκόπια, κάμερες (ως αντιανακλαστικές επιφάνειες για τη μείωση του διάχυτου ή αδέσποτου φωτός)

Προσεγγιστικά μέλανα σώματα
αιθάλη
απλό μαύρο χρώμα $\alpha \leq 0.975$
super black $\alpha \simeq 0.996$ $\rho = 0.004$
Vantablack (με νανοσωλήνες C) $\alpha = 0.9996$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \qquad \text{ν. Planck}$$

$$[\rho(\nu, T)] = \frac{J}{m^3\, Hz}$$

Πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας, μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία

$\rho(\nu,T)\,d\nu$

$$[\rho(\nu,T)\,d\nu] = \frac{J}{m^3}$$

$$[\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$$

Νόμος του Planck και σύγκριση με τις προσεγγίσεις Rayleigh-Jeans κ Wien

(«Υπεριώδης καταστροφή» κ «Πρόβλημα μακρινού υπερύθρου»)

ένα από τα ζητήματα που αποκάλυψε τη κβάντωση της ΗΜ ακτινοβολίας

$$\rho_{RJ}(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} = \rho_{RJ}$$

Rayleigh-Jeans
κλασική φυσική, 1900

$$\rho_W(\nu,T) = \frac{a\nu^3}{e^{b\nu/T}} \quad \frac{\text{σταθερές}}{\text{από ν. Planck}} \quad \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}} = \rho_W$$

Wien
πειραματικό ταίριασμα (ελληνιστί fitting) στις υψηλές συχνότητες
1896

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1} = \rho$$

Planck
παλαιά κβαντική μηχανική, 1900
συμπίπτει με τα πειραματικά δεδομένα για όλες τις συχνότητες και θερμοκρασίες

$$x := \frac{h\nu}{k_BT}$$

(είναι >0) για μη μηδενική συχνότητα

$$\rho_{RJ} = \rho_0\, x^2 \qquad \mathcal{A}_{RJ} = \mathbb{R}_+$$

πεδία ορισμού – φυσικού ενδιαφέροντος

$$\rho_W = \rho_0\, \frac{x^3}{e^x} \qquad \mathcal{A}_W = \mathbb{R}_+$$

$$\rho = \rho_0\, \frac{x^3}{e^x-1} \qquad \mathcal{A} = \mathbb{R}_+^*$$

$$\rho_0 := \frac{8\pi}{h^2}\left(\frac{k_BT}{c}\right)^3 \qquad [\rho_0] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$$

υπεριώδης καταστροφή — ultraviolet catastrophe (μετάφραση: σε υψηλές συχνότητες)

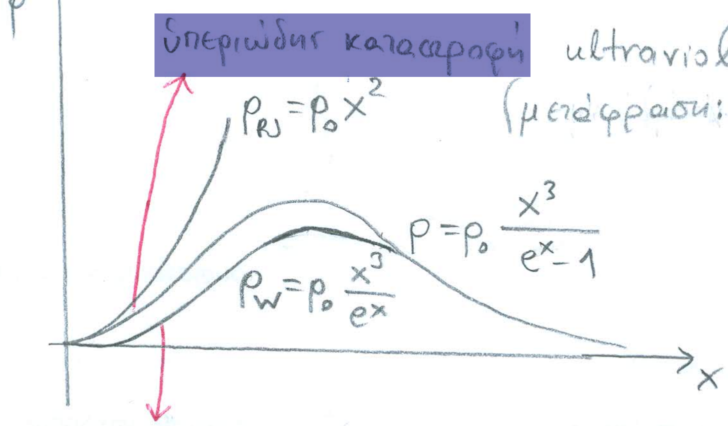


Figure 2.5

πρόβλημα μακρινού υπερύθρου (μετάφραση: σε χαμηλές συχνότητες)
far infrared problem

Οι ονομασίες αυτές έχουν σχέση με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα γύρω στο 1900 και είναι με αυτή την έννοια παραπλανητικές

$$x := \frac{h\nu}{k_B T}$$

Όμως, η περιοχή όπου αρχίζουν οι αποκλίσεις, εξαρτάται προφανώς από τη θερμοκρασία του μέλανος σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ Συμβατικά στην περιοχή του ΗΜ φάσματος "μακρινό υπέρυθρο" (far infrared, FIR) έχουμε μήκος κύματος $25\,\mu m < \lambda < 1000\,\mu m$. Βρείτε σε τι $x = \frac{h\nu}{k_B T}$ αντιστοιχεί το FIR, για θερμοκρασία (α') 300K δηλαδή περίπου τη θερμοκρασία ενός ζώου, (β') 6000K δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ηλίου, (γ') 6K.

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{h\nu}{k_B T},\ c = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \frac{ch}{x k_B T} \\ 25\,\mu m < \lambda < 1000\,\mu m \end{array}\right\} \Rightarrow 25\,\mu m < \frac{ch}{x k_B T} < 1000\,\mu m \Rightarrow$$

$$\frac{ch}{k_B T \cdot 1000\,\mu m} < x < \frac{ch}{k_B T \cdot 25\,\mu m}$$

$$\frac{hc}{k_B} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\,Js\ \ 3 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{1.380 \cdot 10^{-23}\,JK^{-1}} \simeq 14.404 \cdot 10^{-3}\,Km$$

(α') 300K $\Rightarrow 0.048 < x < 1.921$

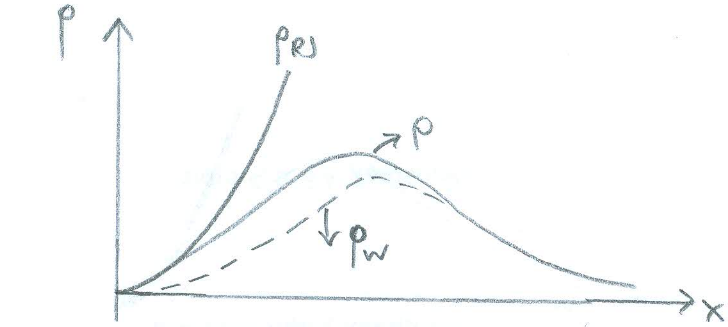
(β') 6000K $\Rightarrow 0.0024 < x < 0.09605$

$x_{χαμ} < x < x_{υψ}$

(γ') 6K $\Rightarrow 2.4 < x < 96.05$

x_{LOW} x_{HIGH}

ΑΣΚΗΣΗ FIR $25\mu m < \lambda < 1000\mu m$



Ποιά πρέπει να είναι η θερμοκρασία μέλανος σώματος T : $p_W = 0.5p$ για το άνω και το κάτω όριο της περιοχής FIR;

(δηλαδή «να υπάρχει πρόβλημα στο μακρινό υπέρυθρο»)

ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε $p_W = 0.5p \Rightarrow p_0 \frac{x^3}{e^x} = 0.5\, p_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow e^x - 1 = 0.5\, e^x \Rightarrow$

$$0.5e^x = 1 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2 \simeq 0.693}$$

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}, \quad c = \lambda\nu \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{ch}{x k_B T}} \qquad \boxed{\frac{hc}{k_B} \simeq 14.404 \cdot 10^{-3}\, Km}$$

$$25\,\mu m < \frac{ch}{x k_B T} < 1000\,\mu m \Rightarrow$$

$$\frac{hc}{x k_B\, 1000\mu m} < T < \frac{hc}{x k_B\, 25\mu m}$$

$$\frac{14.404 \cdot 10^{-3} K\cancel{m}}{\ln 2\, \cancel{1000}\, \cancel{10^{-6}} \cancel{m}} < T < \frac{14.404\, 10^{-3}\, Km}{\ln 2 \cdot 25 \cdot 10^{-6} m}$$

$$\frac{14.404}{0.693} K < T < \frac{14.404}{0.693} \cdot 40\, K$$

$$\boxed{21\,K \lesssim T \lesssim 831\,K}$$

Δύο διατυπώσεις του νόμου Stefan-Boltzmann

(1) ως προς την πυκνότητα ενέργειας $\mathcal{E}(T)$

(2) ως προς την ένταση ακτινοβολίας I

$$[\mathcal{E}(T)] = \frac{J}{m^3}$$

$$[I] = \frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$$

(1)

$\mathcal{E}(T) = aT^4$
πυκνότητα ενέργειας
$\frac{J}{m^3}$
κοιλότητα μέλανος σώματος θερμοκρασίας T

$$\mathcal{E}(T) := \int_0^\infty \rho(\nu, T)\, d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$$

$$x := \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{x k_B T}{h} \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx$$

$$\mathcal{E}(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \left(\frac{k_B T}{h}\right) \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{\pi^4/15}$$

$$\mathcal{E}(T) = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3} \cdot T^4$$

ή $$\boxed{\mathcal{E}(T) = aT^4} \qquad a \simeq 7.5657 \cdot 10^{-16} \frac{J}{m^3 K^4}$$

(2)

$I = \sigma T^4$

ενέργεια που εκπέμπεται ανά μονάδα επιφανείας & ανά μονάδα χρόνου

$\frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$

κοιλότητα μέλανος σώματος θερμοκρασίας T

$$\boxed{\Phi_\sigma = \frac{n}{4}\langle u \rangle}$$

ροή σωματιδίων

από κινητική θεωρία αερίων (δεδομένο)

κρούσεων στα τοιχώματα ανά μονάδα επιφανείας και ανά μονάδα χρόνου

$$[\Phi_\sigma] = \frac{1}{m^3} \cdot \frac{m}{s} = \frac{1}{m^2 \cdot s}$$

ροή φωτονίων

$$\boxed{\Phi_\gamma = \frac{n}{4} c}$$

$$\boxed{\langle h\nu \rangle = \frac{\mathcal{E}(T)}{n}}$$ μέση ενέργεια φωτονίου

ένταση εξερχόμενης ΗΜ ακτινοβολίας

$$\boxed{I = \Phi_\gamma \langle h\nu \rangle}$$

Άρα $$I = \frac{n}{4} c \frac{\mathcal{E}(T)}{n} \Rightarrow \boxed{I = \frac{c}{4}\mathcal{E}(T)}$$

$$I = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4$$

ή $$\boxed{I = \sigma T^4} \qquad \sigma \simeq 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Νομος Μετατοπισεως Wien

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$\boxed{\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1}}$$
v. Planck

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2(e^x-1) - x^3 e^x}{(e^x-1)^2} = \rho_0 x^2 \frac{3(e^x-1) - x e^x}{(e^x-1)^2}$$

άν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει $\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow$ (αφού $x \neq 0$) $3(e^x-1) = x e^x$

φαίνεται ότι $x_0 \sim 3$

ακριβέστερα, αριθμητικά βρίσκουμε

ή και με online grapher $x_0 \simeq 2.821439$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_B T} \simeq 2.821439 \Rightarrow \nu_0 \simeq \left(58.789 \frac{GHz}{K}\right) \cdot T \quad \text{ή} \quad \frac{\nu_0}{T} \simeq 58.789 \frac{GHz}{K}$$

Figure 2.18

"νόμος μετατόπισεως" τού ν_0 συναρτήσει τού T

$$\boxed{\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x}}$$
v. Wien

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2 e^x - x^3 e^x}{e^{2x}} = \rho_0 x^2 \frac{3e^x - x e^x}{e^{2x}} = \rho_0 x^2 \frac{3-x}{e^x}$$

άν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει $\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow$ (για $x \neq 0$) $x_0 = 3$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_B T} = 3 \Rightarrow \nu_0 = 3\frac{k_B}{h} T \quad \text{ή} \quad \frac{\nu_0}{T} \simeq 62.510 \frac{GHz}{K}$$

"νόμος μετατοπίσεως" τού ν_0 συναρτήσει τού T

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε πώς στο σημείο x_0 ή $\frac{d^2\rho_w}{dx^2} < 0$, ώστε πράγματι να έχουμε μέγιστο. Χρησιμοποιήστε το v. Wien $\rho_w = \rho_0 \frac{x^3}{e^x}$

$$\frac{d^2\rho_w}{dx^2} = \rho_0 \frac{(6x - 3x^2)e^x - (3x^2 - x^3)e^x}{e^{2x}} = \rho_0 \frac{6x - 3x^2 - 3x^2 + x^3}{e^x} = \rho_0 \frac{6x - 6x^2 + x^3}{e^x}$$

$$\frac{d^2\rho_w}{dx^2} = \rho_0 x \frac{x^2 - 6x + 6}{e^x} \quad \text{και για } x = x_0 = 3 \Rightarrow \frac{d^2\rho_w}{dx^2} = \rho_0 \cdot 3 \cdot \frac{9 - 18 + 6}{e^3} < 0$$

>> Simlarly for Plpanck's law.

Νόμος τού Planck στη μορφή $\rho(\lambda,T)$

$$\int_0^\infty \rho(\lambda,T)\,d\lambda \underset{\text{ορισμό}}{\overset{\text{προσοχή}}{:=}} \int_0^\infty \rho(\nu,T)\,d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}\,d\nu$$

προσοχή στον ορισμό

$$[\rho(\lambda,T)d\lambda] = \frac{J}{m^3}$$

$$[\rho(\nu,T)\,d\nu] = \frac{J}{m^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{[\rho(\lambda,T)] = \frac{J}{m^3\cdot m}}$$

$$\boxed{[\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz}}$$

$$c = \lambda\nu \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = (-1)c\lambda^{-2}$$

$$\int_0^\infty \rho(\lambda,T)\,d\lambda := \frac{8\pi h \cancel{c^2}}{\cancel{c^3}}\,c\int_\infty^0 \frac{1}{\lambda^3}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}\frac{(-1)}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$= 8\pi hc\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_BT}-1}\,d\lambda \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\cdot\left(e^{hc/\lambda k_BT}-1\right)}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Τα $\rho(\nu,T)$, $\rho(\lambda,T)$ δεν έχουν ίδιες μονάδες μετρήσεως (δεν είναι ίδια μεγέθη)

Ορίζουμε $\boxed{\psi := \frac{hc}{\lambda k_BT}}$ και $\rho_0' := 8\pi\frac{(k_BT)^5}{(hc)^4}$

$$\boxed{\rho(\psi) = \rho_0'\frac{\psi^5}{e^\psi - 1}}$$

ν. Planck

$$[\rho_0'] = \frac{J^5}{(Js)^4 m^4}\frac{s^4}{} = \frac{J}{m^4} = \frac{J}{m^3\cdot m}$$

αν ψάχνουμε ακρότατα, θα πρέπει $\frac{d\rho}{d\psi} = 0$

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \rho_0'\frac{5\psi^4(e^\psi-1)-\psi^5e^\psi}{(e^\psi-1)^2}$$

$$\Rightarrow \psi^4\left\{5(e^\psi-1)-\psi e^\psi\right\} = 0$$

$$\Rightarrow (\text{για } \psi\neq 0) \quad 5(e^\psi-1) = \psi e^\psi$$

φαίνεται ότι $\psi_0 \sim 5$

ή και με online grapher

ακριβέστερα, αριθμητικά βρίσκουμε $\psi_0 \simeq 4.965114$

$$\frac{hc}{\lambda_0 k_BT} \simeq 4.965114 \Rightarrow \lambda_0\cdot T \simeq 2.897772\cdot 10^{-3}\,mK$$

"νόμος μετατοπίσεως" τού λ_0 συναρτήσει τού T

$$\boxed{\rho_w(\psi) = \rho_0' \frac{\psi^5}{e^\psi}}$$

v. Wien

$$\frac{d\rho_w}{d\psi} = \rho_0' \frac{5\psi^4 e^\psi - \psi^5 e^\psi}{e^{2\psi}} \rightarrow \rho_0' \psi^4 \frac{5-\psi}{e^\psi} = \rho_0' \frac{5\psi^4 - \psi^5}{e^\psi}$$

και $\frac{d\rho_w}{d\psi} = 0 \Rightarrow$ (για $\psi \neq 0$) $5e^\psi = \psi e^\psi \Rightarrow$

$\psi_0 = 5$

$$\frac{hc}{\lambda_0 k_B T} = 5 \Rightarrow \lambda_0 \cdot T = 2.877554 \text{ mK}$$

"νόμος μετατοπίσεως" του λ_0 συναρτήσει του T

Ο νόμος μετατοπίσεως του Wien παρήχθη από τον Wilhelm Wien το 1893 στη μορφή $\lambda_0 \cdot T = \text{σταθερά}$

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε πως στο σημείο ψ_0 η $\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} < 0$, ώστε πράγματι να έχουμε μέγιστο. Χρησιμοποιήστε το v. Wien $\rho_w = \rho_0' \frac{\psi^5}{e^\psi}$

$$\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' \frac{(20\psi^3 - 5\psi^4)e^\psi - (5\psi^4 - \psi^5)e^\psi}{e^{2\psi}} = \rho_0' \frac{20\psi^3 - 10\psi^4 + \psi^5}{e^\psi}$$

$$\frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' \psi^3 \frac{20 - 10\psi + \psi^2}{e^\psi}$$ και για $\psi = \psi_0 = 5 \Rightarrow \frac{d^2\rho_w}{d\psi^2} = \rho_0' \cdot 5^3 \frac{20 - 50 + 25}{e^5} < 0$