ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ της αλληλεπιδράσεως ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ — ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ

Στην ημικλασική προσέγγιση για το ΗΜ πεδίο χρησιμοποιούσαμε τη γλώσσα των ανυσματικών μεγεθών $\vec{E}, \vec{B}$.

Υποθέσαμε το πλάτος του $\vec{E}$ (και του $\vec{B}$) σταθερό:

η απορρόφηση ή η εκπομπή να μην επηρεάζει το πλάτος του πεδίου.

Για να ισχύει κάτι τέτοιο θα πρέπει η ΗΜ ακτινοβολία να είναι πυκνή.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων

Πρέπει να βρεθεί μια έκφραση της Χαμιλτονιανής του ΗΜ πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων αντί της γλώσσας των $\vec{E}, \vec{B}$.

χρειαζόμαστε

- $\boxed{\hat{H}_{HM}}$
- $\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma}}$
- $\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma - HM}}$

ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΣΠΙΝΟΡΕΣ

Σπίνορας (spinor) Σπίνωρ = διάνυσμα στήλη

για ΔΣ έχει 2 συνιστώσες $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

για ΤΣ έχει 3 συνιστώσες $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

ορισμοί

$|\ \rangle = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ απουσία ηλεκτρονίου στο ΔΣ, ενέργεια μηδενική

$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$ ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη, ενέργεια E_1

$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle$ ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη, ενέργεια E_2

$A^\dagger$ ερμιτιανός συζυγής or Hermitian conjugate, conjugate transpose or Hermitian transpose, $(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}$, $\dagger$ dagger στιλέτο

$E_2 - E_1 = \hbar\Omega$

$\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{S}_+^\dagger = \hat{S}_-$

$\hat{S}_+|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ καμία δράση $\quad \hat{S}_+|0\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_+|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |2\rangle$ Το ανέβαζει $\quad \hat{S}_+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$

$\hat{S}_+|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ Το πετάει έξω $\quad \hat{S}_+|\uparrow\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ καμία δράση $\quad \hat{S}_-|0\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$ Το πετάει έξω $\quad \hat{S}_-|1\rangle = |0\rangle$

$\hat{S}_-|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$ Το κατεβάζει $\quad \hat{S}_-|2\rangle = |1\rangle$

$\hat{S}_+$ Τελεστής αναβιβάσεως raising operator $\qquad \hat{S}_-$ Τελεστής καταβιβάσεως lowering operator πίνακες Pauli — και σχέσεις τους με τους $\hat{S}_+, \hat{S}_-$

$$\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad \hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\quad \hat{\sigma}_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

- $[\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y]=2i\hat{\sigma}_z$ καθώς και οι κυκλικές εναλλαγές της

π.χ. $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}=2i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

- $\hat{\sigma}_x^2=\hat{\sigma}_y^2=\hat{\sigma}_z^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\hat{I}$

- $\{\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y\}=\{\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z\}=\{\hat{\sigma}_z,\hat{\sigma}_x\}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\hat{0}$

Δηλαδή οι πίνακες Pauli αντιμετατίθενται.

π.χ. $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y+\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x=\hat{0}\Rightarrow\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y=-\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x$

$\hat{\sigma}_y\cdot\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_z\cdot\hat{\sigma}_y=\hat{0}\Rightarrow\hat{\sigma}_y\cdot\hat{\sigma}_z=-\hat{\sigma}_z\cdot\hat{\sigma}_y$

$\hat{\sigma}_z\cdot\hat{\sigma}_x+\hat{\sigma}_x\cdot\hat{\sigma}_z=\hat{0}\Rightarrow\hat{\sigma}_z\cdot\hat{\sigma}_x=-\hat{\sigma}_x\cdot\hat{\sigma}_z$

π.χ. $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$

$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$

- $\hat{S}_+\hat{S}_-=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\hat{S}_-\hat{S}_+=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\hat{S}_+\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_+=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\hat{I}$ ή $\{\hat{S}_+,\hat{S}_-\}=\hat{I}$

$\hat{S}_+\hat{S}_--\hat{S}_-\hat{S}_+=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\hat{\sigma}_z$ ή $[\hat{S}_+,\hat{S}_-]=\hat{\sigma}_z$

$\hat{S}_++\hat{S}_-=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\hat{\sigma}_x$

$\hat{S}_+-\hat{S}_-=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}=i\hat{\sigma}_y$

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{S}_+ \hat{S}_- &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_- \hat{S}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ldots$$ μόλις τα είπαμε...

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{I}}$$

Μπορούμε να το γράψουμε και στη μορφή $\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{\mathbb{I}}$

$\{A, B\} = AB + BA$ άγκιστρο Poisson ή αντιμεταθέτης

anticommutator

$[A, B] = AB - BA$ μεταθέτης commutator

όταν $\{A, B\} = 0 \Rightarrow AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA$

αντιμεταθετική ιδιότητα

anticommutative property

όταν $[A, B] = 0 \Rightarrow AB - BA = 0 \Rightarrow AB = BA$

μεταθετική ιδιότητα

commutative property

<u>Οι τελεστές καταστροφής-δημιουργίας / καταβιβάσεως-αναβιβάσεως</u>

σχέσεις αντιμεταθέσεως ακολουθούν των φερμιονίων π.χ. τα ηλεκτρόνια

anticommutative relations fermions electrons

σχέσεις μεταθέσεως ακολουθούν των μποζονίων π.χ. τα φωτόνια

commutative relations bosons photons

Η Χαμιλτονιανή του ΔΣ είναι

$$\hat{H}_{ΔΣ} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+ = E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$$

αφού

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = E_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ιδιοάνυσμα ιδιοτιμή ιδιοάνυσμα

$$\underline{\quad\quad} \; E_2 = E_1 + \hbar\Omega$$
$$\underline{\quad\quad} \; E_1$$

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \end{pmatrix} = E_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ιδιοάνυσμα ιδιοτιμή ιδιοάνυσμα

$$\hat{H}_{ΔΣ} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+$$

Αν θέσουμε $E_1 = 0 \Rightarrow E_2 = \hbar\Omega$ γίνεται

$\underline{\quad\quad}$ $E_2 = \hbar\Omega$

$\underline{\quad\quad}$ E_1 μηδέν

$$\hat{H}_{ΔΣ} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-$$

Αν θέσουμε

$\underline{\quad\quad}$ E_2

μηδέν $\quad E_2 = +\frac{\hbar\Omega}{2} \quad E_1 = -\frac{\hbar\Omega}{2}$

$\underline{\quad\quad}$ E_1

$$\hat{H}_{ΔΣ} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_+ \hat{S}_- - \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_- \hat{S}_+ = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\hat{H}_{ΔΣ} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{\sigma}_z$ ή μορφή του $\hat{H}_{ΔΣ}$ στο άρθρο των Jaynes-Cummings

Ὁ τελεστής $\hat{S}_+\hat{S}_-$ μετρᾶ τὸν ἀριθμό τῶν ἠλεκτρονίων στην ΑΝΩ ΣΤΑΘΜΗ

άφοῦ

$$\hat{S}_+\hat{S}_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_+\hat{S}_-|\uparrow\rangle=1|\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_+\hat{S}_-|\downarrow\rangle=0|\downarrow\rangle$$

Ὁ τελεστής $\hat{S}_-\hat{S}_+$ μετρᾶ τὸν ἀριθμό τῶν ἠλεκτρονίων στην ΚΑΤΩ ΣΤΑΘΜΗ

άφοῦ

$$\hat{S}_-\hat{S}_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_-\hat{S}_+|\uparrow\rangle=0|\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_-\hat{S}_+|\downarrow\rangle=1|\downarrow\rangle$$

ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$(\hat{S}_+)^\dagger=\hat{S}_-$$

$$\{\hat{S}_+,\hat{S}_+^\dagger\}=\{\hat{S}_+,\hat{S}_-\}=\hat{S}_+\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_+=\hat{\mathbb{I}}$$

$$\{\hat{S}_-,\hat{S}_-^\dagger\}=\{\hat{S}_-,\hat{S}_+\}=\hat{S}_-\hat{S}_++\hat{S}_+\hat{S}_-=\hat{\mathbb{I}}$$

$$\{\hat{S}_+,\hat{S}_+\}=\hat{S}_+\hat{S}_++\hat{S}_+\hat{S}_+=2\hat{S}_+\hat{S}_+=2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}:=\hat{O}$$

$$\{\hat{S}_-,\hat{S}_-\}=\hat{S}_-\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_-=2\hat{S}_-\hat{S}_-$$

$$=2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\hat{O}$$

Ὁ $\hat{S}_+$ εἶναι τελεστὴς ἀναβιβάσεως (raising operator)
διότι ἀναβιβάζει τὸ ἠλεκτρόνιο
δημιουργῶντας ἐνέργεια $\hbar\Omega$
ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία
τελεστὴς δημιουργίας (creation operator)

Ὁ $\hat{S}_-$ εἶναι τελεστὴς καταβιβάσεως (lowering operator)
διότι καταβιβάζει τὸ ἠλεκτρόνιο
καταστρέφοντας ἐνέργεια $\hbar\Omega$
ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία
τελεστὴς καταστροφῆς (annihilation operator)

Ἐπειδὴ τὰ ἠλεκτρόνια εἶναι φερμιόνια,
ἰσχύει ἡ ἀπαγορευτικὴ ἀρχὴ τοῦ Pauli
δηλ. μποροῦμε νὰ ἔχουμε μόνο ἕνα ἠλεκτρόνιο με ἐνέργεια $\hbar\Omega$
(ἀγνοοῦμε τὸ spin σὲ ὅλο αὐτὸ τὸ μάθημα)

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΦΕΡΜΙΟΝΙΩΝ π.χ. ηλεκτρονίων

$\hat{a}_i$ τελεστής καταστροφής φερμιονίου στην κατάσταση i

$\hat{a}_i^\dagger$ τελεστής δημιουργίας φερμιονίου στην κατάσταση i

Για τα φερμιόνια ισχύουν οι σχέσεις αντιμεταθέσεως

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$$

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0 \Rightarrow \{\hat{a}_r^\dagger, \hat{a}_r^\dagger\} = 0 \Rightarrow 2\hat{a}_r^\dagger\hat{a}_r^\dagger = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{a}_r^\dagger\hat{a}_r^\dagger = 0}}$$

το οποίο σημαίνει ότι <u>δεν</u> μπορούμε να βάλουμε δύο φερμιόνια στην ίδια κατάσταση, το οποίο είναι η απαγορευτική αρχή Pauli.

συχνά καλείται τελεστής δημιουργίας στη Κβαντική Μηχανική
creation operator

<u>τελεστής αναβιβάσεως</u>
<u>raising operator</u>
<u>lowering operator</u>
<u>τελεστής καταβιβάσεως</u>

} <u>ladder operators</u>
τελεστές κλίμακας

<u>γραμμική άλγεβρα</u>
<u>linear algebra</u>

συχνά καλείται τελεστής καταστροφής στη Κβαντική Μηχανική
annihilation operator

Σε πολλές περιοχές της Φυσικής κ της Χημείας, η χρήση αυτών των τελεστών αντί κυματοσυναρτήσεων λέγεται <u>δεύτερη κβάντωση</u> <u>second quantization</u>

ΔΣ

στοιχειώδεις διεγέρσεις από τη θεμελιώδη κατάσταση

elementary excitations from the ground state

άνω

$$|x\rangle = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$$

κάτω

αριστερά $\longrightarrow$ δεξιά

$$\langle x| = (\alpha^* \ \ \beta^*)$$

$$|\downarrow\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} \qquad \langle\downarrow| = \langle 1| = (0 \ \ 1)$$

$$\langle\downarrow|\downarrow\rangle = (0 \ \ 1)\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = 1$$

$$|\uparrow\rangle = |2\rangle = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} \qquad \langle\uparrow| = \langle 2| = (1 \ \ 0)$$

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = (1 \ \ 0)\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = 1$$

μετά

$$\hat{a}_{12}^{\dagger} := |\uparrow\rangle\langle\downarrow| = |2\rangle\langle 1| = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}} \underset{1\times 2}{(0 \ \ 1)} = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \hat{S}_+$$

πρώτα

$$\hat{a}_{12} := |\downarrow\rangle\langle\uparrow| = |1\rangle\langle 2| = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}} \underset{1\times 2}{(1 \ \ 0)} = \begin{pmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \hat{S}_-$$

Άρα η Χαμιλτονιανή $\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_-$ γράφεται και

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{a}_{12}^{\dagger}\hat{a}_{12} = \hbar\Omega|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow| = \hbar\Omega|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$= \hbar\Omega|2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2| = \hbar\Omega|2\rangle\langle 2|$$

$$= \hbar\Omega\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}(0 \ 1)\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}(1 \ 0) = \hbar\Omega\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε τις εναλλακτικές γραφές $= \hbar\Omega\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\hat{S}_+\hat{S}_- = \hbar\Omega\hat{a}_{12}^{\dagger}\hat{a}_{12} = \hbar\Omega|\uparrow\rangle\langle\uparrow| = \hbar\Omega|2\rangle\langle 2| = \hbar\Omega\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}(1 \ \ 0) = \hbar\Omega\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hbar\Omega & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

Γενικώς: $\boxed{\hat{a}_{\mu\nu} := |\mu\rangle\langle\nu| \iff \hat{a}_{\mu\nu}^{\dagger} = |\nu\rangle\langle\mu|}$

$$\hat{a}_{12}^{+}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle = \underset{2\times1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}\underset{1\times2}{\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$

$$\hat{a}_{12}^{+}|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$

$$\hat{a}_{12}^{+}|0\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$

$$\hat{a}_{12}|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \ldots = |\downarrow\rangle$$

$$\hat{a}_{12}|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \ldots = |0\rangle$$

$$\hat{a}_{12}|0\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|0\rangle = \ldots = |0\rangle$$

παρομοίως θα γράφαμε

$$\hat{a}_{21} := |2\rangle\langle1| = \hat{a}_{12}^{+}$$

$$\hat{a}_{21}^{+} := |1\rangle\langle2| = \hat{a}_{12}$$

ΤΣ

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \langle x| = (\alpha^* \ \beta^* \ \gamma^*)$$

Γενικώς:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}_{\mu\nu} &= |\mu\rangle\langle\nu| \\ \hat{a}^{+}_{\mu\nu} &= |\nu\rangle\langle\mu| \end{aligned}}$$

στοιχειώδεις διεγέρσεις από τη θεμελιώδη κατάσταση

elementary excitations from the ground state

$$\hat{a}^{+}_{12} := |2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12} := |1\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13} := |3\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}(0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13} := |1\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{12}|1\rangle = |2\rangle\langle 1|1\rangle = |2\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}|2\rangle = |1\rangle\langle 2|2\rangle = |1\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13}|1\rangle = |3\rangle\langle 1|1\rangle = |3\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}|3\rangle = |1\rangle\langle 3|3\rangle = |1\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13}|3\rangle = |3\rangle\langle 1|3\rangle = |0\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}^{+}|3\rangle = |2\rangle\langle 1|3\rangle = |2\rangle \cdot 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}|3\rangle = |1\rangle\langle 2|3\rangle = |1\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}^{+}|2\rangle = |3\rangle\langle 1|2\rangle = |3\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}|2\rangle = |1\rangle\langle 3|2\rangle = |1\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{H}_{TI} = \hbar\Omega_{12}\,\hat{a}^{\dagger}_{12}\hat{a}_{12} + \hbar\Omega_{13}\,\hat{a}^{\dagger}_{13}\hat{a}_{13}}$$

$$= \hbar\Omega_{12}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} + \hbar\Omega_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$= \hbar\Omega_{12}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \hbar\Omega_{13}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\hbar\Omega_{13}&0&0\\0&\hbar\Omega_{12}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{H}_{TI} &= \hbar\Omega_{12}|2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2| + \hbar\Omega_{13}|3\rangle\langle 1|1\rangle\langle 3|\\ &= \hbar\Omega_{12}|2\rangle\langle 2| + \hbar\Omega_{13}|3\rangle\langle 3|\end{aligned}}$$

$$\hat{a}_{23} = |2\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(1\;0\;0) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{a}_{23}|3\rangle = |2\rangle$$

$$\hat{a}^{\dagger}_{23} = |3\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(0\;1\;0) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{a}^{\dagger}_{23}|2\rangle = |3\rangle$$

$$\hat{a}_{21} = |2\rangle\langle 1| = \hat{a}^{\dagger}_{12} \qquad \hat{a}_{31} = |3\rangle\langle 1| = \hat{a}^{\dagger}_{13}$$

$$\hat{a}^{\dagger}_{21} = |1\rangle\langle 2| = \hat{a}_{12} \qquad \hat{a}^{\dagger}_{31} = |1\rangle\langle 3| = \hat{a}_{13}$$

$$\hat{a}_{32} = |3\rangle\langle 2| = \hat{a}^{\dagger}_{23}$$

$$\hat{a}^{\dagger}_{32} = |2\rangle\langle 3| = \hat{a}_{23}$$