$$E_m = \frac{M_m \omega_m^2}{2} q_m^2 + \frac{M_m}{2} \dot{q}_m^2 = \frac{M_m \omega_m^2}{2} q_m^2 + \frac{p_m^2}{2M_m}$$

ενέργεια m τρόπου

q_m γεν. θέση

$\dot{q}_m$ γεν. ταχύτητα

p_m γεν. ορμή

$$\boxed{\hat{H}_{HM,m} = \frac{M_m \omega_m^2}{2} \hat{q}_m^2 + \frac{\hat{p}_m^2}{2M_m}}$$

Χαμιλτονιανή m τρόπου

$$\boxed{E_{m,n_m} = \hbar \omega_m \left(n_m + \frac{1}{2}\right)}$$

ιδιοενέργειες m τρόπου

$m \in \mathbb{N}^*$ $\quad n_m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\hat{q}_m = q_m} \quad \boxed{\hat{p}_m = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_m}} \quad \boxed{[\hat{q}_m, \hat{p}_m] = i\hbar}$$

Εισάγουμε τους τελεστές

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m \hbar \omega_m}} (M_m \omega_m \hat{q}_m + i \hat{p}_m)$$

"καταστροφής"

$$\hat{a}_m^+ = \frac{1}{\sqrt{2M_m \hbar \omega_m}} (M_m \omega_m \hat{q}_m - i \hat{p}_m)$$

"δημιουργίας"

Ισχύει η ιδιότητα

$$\boxed{[\hat{a}_m, \hat{a}_m^+] = \hat{a}_m \hat{a}_m^+ - \hat{a}_m^+ \hat{a}_m = 1}$$

Απόδ.

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{2M\hbar\omega} (M\omega\hat{q} + i\hat{p})(M\omega\hat{q} - i\hat{p})$$

$$- \frac{1}{2M\hbar\omega} (M\omega\hat{q} - i\hat{p})(M\omega\hat{q} + i\hat{p}) =$$

$$= \frac{1}{2M\hbar\omega} \Big(\cancel{M^2\omega^2\hat{q}^2} + \cancel{\hat{p}^2} - M\omega\hat{q}i\hat{p} + i\hat{p}M\omega\hat{q} - \cancel{M^2\omega^2\hat{q}^2} - \cancel{\hat{p}^2} - M\omega\hat{q}i\hat{p} + i\hat{p}M\omega\hat{q} \Big)$$

β

$$= \frac{1}{2M\hbar\omega}\left(-2M\omega i\,\hat q\hat p + 2i\hat p M\omega\hat q\right) = \frac{1}{\hbar}\left(-i\hat q\hat p + i\hat p\hat q\right)$$

$$= \frac{1}{\hbar}(-i)\left(\hat q\hat p - \hat p\hat q\right) = \frac{-i}{\hbar}[\hat q,\hat p] = \frac{-i}{\hbar}\,i\hbar = 1 \Rightarrow [\hat a,\hat a^{\dagger}] = 1$$

$$\hat a_m^{+} + \hat a_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}\,2M_m\omega_m\hat q_m = \sqrt{\frac{2M_m\omega_m}{\hbar}}\,\hat q_m \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat q_m = \sqrt{\frac{\hbar}{2M_m\omega_m}}\left(\hat a_m^{+} + \hat a_m\right)}$$

$$\hat a_m^{+} - \hat a_m = \frac{1}{\sqrt{2M_m\hbar\omega_m}}(-2i)\hat p_m = (-i)\sqrt{\frac{2}{M_m\hbar\omega_m}}\,\hat p_m \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat p_m = i\sqrt{\frac{M_m\hbar\omega_m}{2}}\left(\hat a_m^{+} - \hat a_m\right)}$$

ΑΡΑ

$$\hat H_{HM,m} = \frac{M_m\omega_m^2}{2}\hat q_m^2 + \frac{\hat p_m^2}{2M_m} = \frac{\cancel{M_m}\omega_m^{\cancel{2}}}{2}\,\frac{\hbar}{2\cancel{M_m\omega_m}}\left(\hat a_m^{+} + \hat a_m\right)\left(\hat a_m^{+} + \hat a_m\right)$$

$$+ \frac{1}{2\cancel{M_m}}(-1)\frac{\cancel{M_m}\hbar\omega_m}{2}\left(\hat a_m^{+} - \hat a_m\right)\left(\hat a_m^{+} - \hat a_m\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega_m}{4}\left(\cancel{\hat a_m^{+}\hat a_m^{+}} + \hat a_m^{+}\hat a_m + \hat a_m\hat a_m^{+} + \cancel{\hat a_m\hat a_m} - \cancel{\hat a_m^{+}\hat a_m^{+}} + \hat a_m^{+}\hat a_m + \hat a_m\hat a_m^{+} - \cancel{\hat a_m\hat a_m}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}&\hat H_{HM,m} = \frac{\hbar\omega_m}{4}\left(2\hat a_m^{+}\hat a_m + 2\hat a_m\hat a_m^{+}\right) = \frac{\hbar\omega_m}{2}\left(\hat a_m^{+}\hat a_m + \hat a_m\hat a_m^{+}\right)\\ &\text{Αλλά}\quad [\hat a_m,\hat a_m^{+}] = \hat a_m\hat a_m^{+} - \hat a_m^{+}\hat a_m = 1 \Rightarrow \hat a_m\hat a_m^{+} = 1 + \hat a_m^{+}\hat a_m\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\hat H_{HM,m} = \frac{\hbar\omega_m}{2}\left(2\hat a_m^{+}\hat a_m + 1\right) \Rightarrow \boxed{\hat H_{HM,m} = \hbar\omega_m\left(\hat a_m^{+}\hat a_m + \frac{1}{2}\right)}$$

όπως $\boxed{E_{m,n_m} = \hbar\omega_m\left(n_m + \frac{1}{2}\right)}$

Αν ονομάσουμε $|n_m\rangle$ την κατάσταση του ΗΜ πεδίου με n_m αριθμό φωτονίων στον ΗΜ τρόπο m

$$\hat H_{HM,m}|n_m\rangle = E_{m,n_m}|n_m\rangle$$

$$\hbar\omega_m\left(\hat a_m^\dagger \hat a_m + \frac{1}{2}\right)|n_m\rangle = \hbar\omega_m\left(n_m + \frac{1}{2}\right)|n_m\rangle$$

$$\hat a_m^\dagger \hat a_m |n_m\rangle = n_m |n_m\rangle$$

Άρα ο τελεστής $\hat N_m = \hat a_m^\dagger \hat a_m$ μετρά τον αριθμό των φωτονίων στον ΗΜ τρόπο m.

$$[A+B,C] = [A,C] + [B,C]$$
$$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$$

$$\hat H = \kappa \hat q^2 + \lambda \hat p^2$$
$$\hat a = \mu \hat q + \nu \hat p$$
$$\hat a^\dagger = \mu \hat q - \nu \hat p$$

με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$[\hat H, \hat a] = -\hbar\omega\hat a \qquad [\hat H, \hat a^\dagger] = \hbar\omega\hat a^\dagger$$

$$\hat H\hat a|n\rangle - \hat a\hat H|n\rangle = -\hbar\omega\hat a|n\rangle$$
$$\hat H\hat a|n\rangle - E_n\hat a|n\rangle = -\hbar\omega\hat a|n\rangle$$
$$\hat H\hat a|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\hat a|n\rangle$$

ιδιοκατάσταση με ενέργεια κατεβασμένη κατά ħω (ένα φωτόνιο λιγότερο)

$$\Rightarrow \hat a|n\rangle = \xi|n-1\rangle$$

$$\hat H\hat a^\dagger|n\rangle - \hat a^\dagger\hat H|n\rangle = \hbar\omega\hat a^\dagger|n\rangle$$
$$\hat H\hat a^\dagger|n\rangle - E_n\hat a^\dagger|n\rangle = \hbar\omega\hat a^\dagger|n\rangle$$
$$\hat H\hat a^\dagger|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\hat a^\dagger|n\rangle$$

ιδιοκατάσταση με ενέργεια ανεβασμένη κατά ħω (ένα φωτόνιο περισσότερο)

$$\Rightarrow \hat a^\dagger|n\rangle = \rho|n+1\rangle$$

... πρέξεις

γ

$$[\hat{H},\hat{a}] = -\hbar\omega\,\hat{a}$$

$$[\hat{H},\hat{a}]|n\rangle = -\hbar\omega\,\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - \hat{a}\hat{H}|n\rangle = -\hbar\omega\,\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle - \hat{a}E_n|n\rangle = -\hbar\omega\,\hat{a}|n\rangle$$

$$\hat{H}\,\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)\,\hat{a}|n\rangle$$

$\downarrow$

ιδιοκατάσταση με ενέργεια κατεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο λιγότερο)

$$\hat{a}|n\rangle = \xi\,|n-1\rangle$$

$$[\hat{H},\hat{a}^{+}] = \hbar\omega\,\hat{a}^{+}$$

$$[\hat{H},\hat{a}^{+}]|n\rangle = \hbar\omega\,\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^{+}|n\rangle - \hat{a}^{+}\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\,\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\hat{H}\hat{a}^{+}|n\rangle - \hat{a}^{+}E_n|n\rangle = \hbar\omega\,\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$$\hat{H}\,\hat{a}^{+}|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)\,\hat{a}^{+}|n\rangle$$

$\downarrow$

ιδιοκατάσταση με ενέργεια ανεβασμένη κατά $\hbar\omega$ (ένα φωτόνιο περισσότερο)

$$\hat{a}^{+}|n\rangle = \rho\,|n+1\rangle$$

Δ ΙΔΙΟ

$$[\hat{H},\hat{a}] = [\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\tfrac{1}{2}),a] = \hbar\omega\,[\hat{a}^+\hat{a}+\tfrac{1}{2},\hat{a}] =$$

$$= \hbar\omega\left([\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}] + [\tfrac{1}{2},\hat{a}]\right) = \hbar\omega\,[\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}] =$$

$$= \hbar\omega\left(\underbrace{[\hat{a}^+,\hat{a}]}_{-1}\hat{a} + \hat{a}^+\underbrace{[\hat{a},\hat{a}]}_{0}\right) = -\hbar\omega\hat{a}$$

$$[\hat{H},\hat{a}^+] = [\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\tfrac{1}{2}),\hat{a}^+] = \hbar\omega\left[\hat{a}^+\hat{a}+\tfrac{1}{2},\hat{a}^+\right] =$$

$$= \hbar\omega\left([\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}^+] + [\tfrac{1}{2},\hat{a}^+]\right) = \hbar\omega\,[\hat{a}^+\hat{a},\hat{a}^+]$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}^+\underbrace{[\hat{a},\hat{a}^+]}_{1} + \underbrace{[\hat{a}^+,\hat{a}^+]}_{0}\hat{a}\right) = \hbar\omega\hat{a}^+$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{a}|n\rangle = \xi|n-1\rangle \\ \langle n|\hat{a}^{\dagger} = \xi^{*}\langle n-1|\end{array}\right\} \Rightarrow \langle n|a^{\dagger}a|n\rangle = |\xi|^2\langle n-1|n-1\rangle \Rightarrow$$

$$n\langle n|n\rangle = |\xi|^2\langle n-1|n-1\rangle \Rightarrow |\xi|^2 = n \Rightarrow \xi \overset{\pi.\chi.}{=} \sqrt{n}$$

$$\boxed{\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle}$$

$$[a,a^{\dagger}] = 1 \Rightarrow aa^{\dagger} = 1 + a^{\dagger}a$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \rho|n+1\rangle \\ \langle n|a = \rho^{*}\langle n+1|\end{array}\right\} \Rightarrow \langle n|aa^{\dagger}|n\rangle = |\rho|^2\langle n+1|n+1\rangle$$

$$\langle n|(1+a^{\dagger}a)|n\rangle = |\rho|^2\langle n+1|n+1\rangle$$

$$(1+n) = |\rho|^2 \quad \Rightarrow \pi.\chi. \quad \rho = \sqrt{n+1}$$

$$\boxed{\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle}$$

$$\hat{a}_m^\dagger |n_m\rangle = \sqrt{n_m+1}\,|n_m+1\rangle$$

$$\hat{a}_m |n_m\rangle = \sqrt{n_m}\,|n_m-1\rangle$$

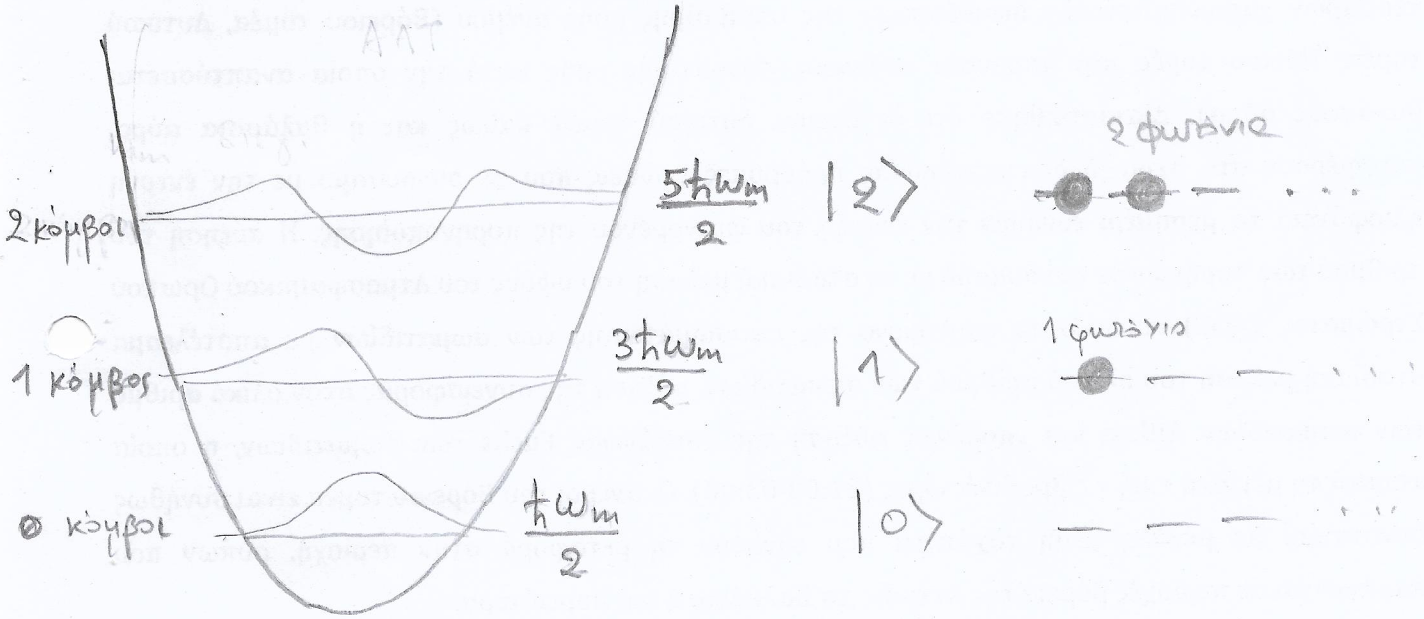
$$\hat{a}_m |0\rangle = 0$$

$$\langle n_m | l_m\rangle = \delta_{nl}$$

Η θεμελιώδης κατάσταση $|0\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί στο κενό κανένα μποζόνιο (φωτόνιο)

Η 1η διεγερμένη κατάσταση $|1\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{3\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί σε 1 μποζόνιο (φωτόνιο)

Η 2η διεγερμένη κατάσταση $|2\rangle$ με ιδιοενέργεια $\frac{5\hbar\omega_m}{2}$ αντιστοιχεί σε 2 μποζόνια (φωτόνια)



\# φωτονίων = \# κόμβων της ιδιοσυνάρτησης του ΑΑΤ

Με τη βοήθεια των τελεστών καταστροφής κ δημιουργίας μπορούμε να γράψουμε

$$\hat{E}_x^m(z,t) = \left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left(\hat{a}_m^+ + \hat{a}_m\right)$$

$$\hat{B}_y^m(z,t) = \frac{i}{c}\left(\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \left(\hat{a}_m^+ - \hat{a}_m\right)$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΜΠΟΖΟΝΙΩΝ

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_\ell] = 0$$

$$[\hat{a}_m^+, \hat{a}_\ell^+] = 0$$

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_\ell^+] = \delta_{m\ell}$$