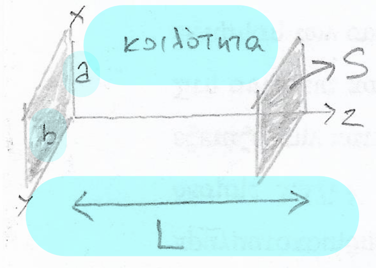
ΔΙΑΜΗΚΕΙΣ ΤΡΟΠΟΙ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑΣ ΕΝΤΟΣ ΕΥΡΟΥΣ ΓΡΑΜΜΗΣ (ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ) ΕΚΠΟΜΠΗΣ

ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ

Εντός της κοιλότητος υποστηρίζονται ΗΜ τρόποι m: η κυκλική τους συχνότητα να είναι



$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}$, $m \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$

$\nu_m = \frac{mc}{2L}$, $m \in \mathbb{N}^*$ συχνότητα $\frac{c}{\lambda_m} = \frac{mc}{2L} \Rightarrow$

$V = L \cdot S$

$L = m \cdot \frac{\lambda_m}{2}$, $m \in \mathbb{N}^*$ (στάσιμα κύματα...)

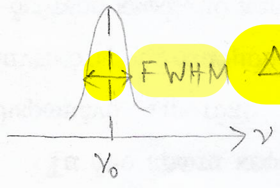
Επειδή συνήθως $a, b << L$ και οι τρόποι αυτοί εξήχθησαν θέτοντας συνοριακές συνθήκες κατά μήκος του άξονα z που συνδέει τα δύο κάτοπτρα ονομάζονται διαμήκεις τρόποι (longitudinal modes)

Εύρος γραμμής (εξαναγκασμένης) εκπομπής

π.χ. ερυθρή γραμμή @ laser He-Ne, έχει κεντρικό μήκος κύματος

$\lambda_0 = 632.8$ nm $\Rightarrow$

$\nu_0 \simeq 0.474 \times 10^{15}$ Hz $= 0.474$ PHz



$\Delta\nu_0^{FWHM} \simeq 1.7$ GHz

$\simeq 0.474$ PHz

ενώ το FWHM της είναι $\Delta\nu_0^{FWHM} \simeq 1.7$ GHz $= 1.7 \times 10^9$ Hz

$$\frac{\Delta\nu_0^{FWHM}}{\nu_0} \simeq \frac{1.7 \text{ GHz}}{0.474 \text{ PHz}} \simeq 3.6 \times 10^{-6}$$

δηλαδή η ερυθρή γραμμή είναι αρκετά λεπτή

ΕΡΩΤΗΜΑ

∃ υποστηριζόμενοι από την κοιλότητα διαμήκεις ΗΜ τρόποι m, οι οποίοι να εμπίπτουν στη συχνοτική περιοχή της ν_0, η οποία έχει εύρος $\Delta\nu_0^{FWHM}$;

$\nu_m = \frac{mc}{2L}$, $m \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$ $\Delta\nu_{m,m+1} = \frac{c}{2L}$ συχνοτική απόσταση διαδοχικών διαμήκων ΗΜ τρόπων m, m+1

π.χ. για $L = 0.4$ m $\frac{c}{2L} = \frac{3 \cdot 10^8}{0.8}$ Hz $= \frac{3}{8} \cdot 10^9$ Hz $= 0.375$ GHz $= 375$ MHz

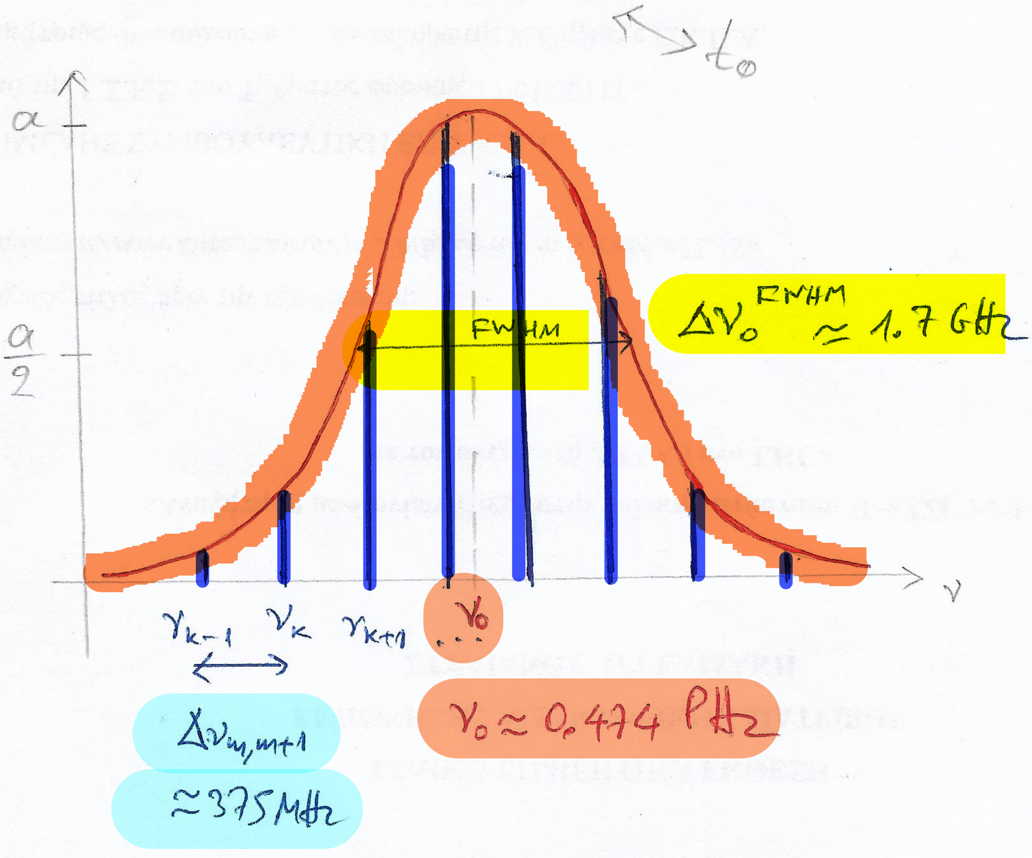
Άρα μέσα στο FWHM της ν_0, $\Delta\nu_0^{FWHM}$, χωράνε

$$\left[\frac{\Delta\nu_0^{FWHM}}{\Delta\nu_{m,m+1}}\right] \simeq \left[\frac{1.7\ \text{GHz}}{375\ \text{MHz}}\right] = \left[4.53\overline{3}\right] = 4$$

ακέραιο μέρος

Δηλαδή βλέπουμε ότι μέσα στο εύρος της γραμμής (εξαναγκασμένης εκπομπής) εμπίπτουν αρκετοί διαμήκεις τρόποι (αλλά και εγκάρσιοι...)

Το εύρος κάθε διαμήκους (αλλά και εγκάρσιου...) ΗΜ τρόπου είναι $\Delta\nu_m^{FWHM} \simeq 1$ MHz με 10 MHz



ΣΤΑΣΙΜΑ ΗΜ ΚΥΜΑΤΑ σε 3Δ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ

standing EM waves in a 3D cavity

ΔΙΑΜΗΚΕΙΣ ΤΡΟΠΟΙ κ **ΕΓΚΑΡΣΙΟΙ ΤΡΟΠΟΙ**

longitudinal modes — transverse modes

TE (transverse electric) mode εγκάρσιος ηλεκτρικός τρόπος

$\nexists \vec{E} \parallel \vec{k}$ (διεύθυνση διαδόσεως)

TM (transverse magnetic) mode εγκάρσιος μαγνητικός τρόπος

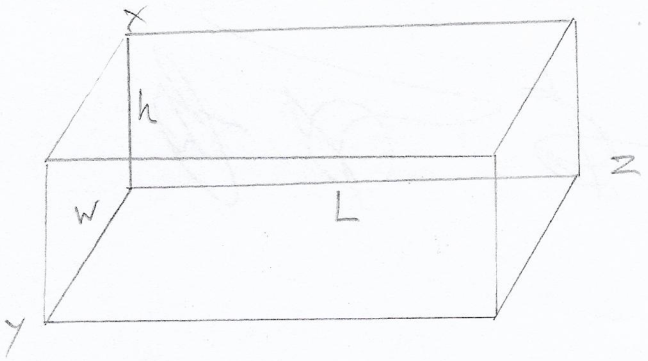
$\nexists \vec{B} \parallel \vec{k}$ (διεύθυνση διαδόσεως)

TEM (transverse electromagnetic) mode εγκάρσιος ηλεκτρομαγνητικός τρόπος

$\nexists \vec{E}, \nexists \vec{B} \parallel \vec{k}$ (διεύθυνση διαδόσεως)

Εδώ έχουμε TEM (λογίζοντας ως διεύθυνση διαδόσεως την παράλληλη στη μακριά διάσταση της κοιλότητας, δηλ. τον άξονα z, λεγόμενο και οπτικό άξονα)

Είχαμε εξετάσει την ορθογώνια κοιλότητα



$$E_x = E_{x0}\cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\,e^{-i\omega t}$$

$$E_y = E_{y0}\sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\,e^{-i\omega t}$$

$$E_z = E_{z0}\sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\,e^{-i\omega t}$$

$$B_x = \frac{i}{\omega}\left(E_{y0}k_z - E_{z0}k_y\right)\sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\,e^{-i\omega t}$$

$$B_y = \frac{i}{\omega}\left(E_{z0}k_x - E_{x0}k_z\right)\cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\,e^{-i\omega t}$$

$$B_z = \frac{i}{\omega}\left(E_{x0}k_y - E_{y0}k_x\right)\cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\,e^{-i\omega t}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad k_x = \frac{m_x \pi}{a_x} \qquad k_y = \frac{m_y \pi}{a_y} \qquad k_z = \frac{m_z \pi}{a_z}$$

$$m_x, m_y, m_z \in \mathbb{Z}$$

$m_x, m_y, m_z \in \mathbb{N}$ απορροφώντας την αλλαγή προσήμου στα E_{x0}, E_{y0}, E_{z0}

- $m_x := p$ $\quad m_y := q$ $\quad m_z := m$ αριθμοί τρόπων node numbers

- όχι άνω του ενός να μηδενίζεται ταυτοχρόνως (αλλιώς θάνατος) με βάση τις άνωθεν εξισώσεις

$$\omega_{pqm} = \pi c\sqrt{\left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{q}{w}\right)^2 + \left(\frac{m}{L}\right)^2}$$

ορθογώνια κοιλότητα

$$\nu_{pqm} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{q}{w}\right)^2 + \left(\frac{m}{L}\right)^2}$$

Γ

$$\omega_{pqm} = \pi c \sqrt{\frac{p^2+q^2}{a^2} + \frac{m^2}{L^2}}$$

Τετραγωνική κοιλότητα

$a = w = h$

$$\nu_{pqm} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{p^2+q^2}{a^2} + \frac{m^2}{L^2}}$$

$$\omega_{pqm} = \frac{\pi c}{a} \sqrt{p^2+q^2+m^2}$$

κυβική κοιλότητα

$a = w = h = L$

$$\nu_{pqm} = \frac{c}{2a} \sqrt{p^2+q^2+m^2}$$

p	q	m	$\frac{2a\nu}{c}$	ΗΜ πεδίο
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	1	$\sqrt{2}$	$\neq 0$
1	1	1	$\sqrt{3}$	$\neq 0$
2	0	0	2	0
2	1	0	$\sqrt{5}$	$\neq 0$

...

Τετραγωνική κοιλότητα

$$\nu_{pqm} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{p^2+q^2}{a^2} + \frac{m^2}{L^2}} = \frac{c}{2}\,\frac{m}{L}\sqrt{1 + \frac{p^2+q^2}{a^2}\cdot\frac{L^2}{m^2}}$$

$$= \frac{c}{2}\,\frac{m}{L}\sqrt{1 + \frac{p^2+q^2}{m^2}\cdot\frac{L^2}{a^2}}$$

$$= \frac{c}{2}\cdot\frac{m}{L}\sqrt{1+x}$$

όπου

$$\boxed{x = \frac{p^2+q^2}{m^2}\left(\frac{L}{a}\right)^2}$$

π.χ. Laser He-Ne $\lambda_0 = 632.8\ \text{nm}$ $\quad \nu_0 = 0.474\ \text{PHz}$ $\quad L = 0.4\ \text{m}$

Ας προσπαθήσουμε να κάνουμε μια εκτίμηση της τάξεως μεγέθους του m.

Αν είχαμε μόνο διαμήκεις τρόπους (1Δ πρόβλημα)

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L} \qquad \nu_m = \frac{mc}{2L} \qquad \frac{1}{\lambda_m} = \frac{m}{2L} \Leftrightarrow L = m\frac{\lambda_m}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{ΘΕΛΟΥΜΕ}\\ \nu_m \sim \nu_0\end{array}}$$

$$\frac{mc}{2L} \sim 0.474\ \text{PHz}$$

$$m \sim \frac{2L\cdot 0.474\ \text{PHz}}{c} = \frac{2\cdot 0.4\text{m}\ 0.474\ \text{PHz}}{3\cdot 10^8\ \text{m/s}}$$

$$m \sim \frac{0.8\cdot 0.474}{3}10^7 = 0.1264\cdot 10^7 \rightarrow$$

$$\boxed{m \simeq 1.264\cdot 10^6}$$

$$\boxed{m^2 \simeq 1.6\times 10^{12}}$$

E

για $\underline{a = 1mm}$ $\left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4\cdot 10^{-1}}{10^{-3}}\right)^2 = 160000$

για $\underline{a = 2\ mm}$ $\left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4\cdot 10^{-1}}{2\cdot 10^{-3}}\right)^2 = 40000$

για $\underline{a = 4\ mm}$ $\left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4\cdot 10^{-1}}{4\cdot 10^{-3}}\right)^2 = 10000$

για $\underline{a = 10\ mm}$ $\left(\frac{L}{a}\right)^2 = \left(\frac{4\cdot 10^{-1}}{10^{-2}}\right)^2 = 1600$

- Άρα, για μικρά $p, q \simeq 0, 1, 2, \ldots \Longrightarrow x$ μικρό

οπότε, μπορούμε να κάνουμε ένα ανάπτυγμα Taylor

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots \simeq 1 + \frac{x}{2}$$

Οπότε

$$\nu_{pqm} \simeq \frac{c}{2}\frac{m}{L}\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

$$\nu_{pqm} \simeq \frac{c}{2}\frac{m}{L} + \frac{c}{2}\frac{m}{L}\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2+q^2}{m^2}\left(\frac{L}{a}\right)^2$$

$$\boxed{\nu_{pqm} \simeq \frac{mc}{2L} + \frac{cL}{4a^2}\,\frac{p^2+q^2}{m}}$$

$$\boxed{\nu_{00m} \simeq \frac{mc}{2L} = \nu_m}$$ οι οποίες είναι οι συχνότητες των διαμήκων τρόπων στο 1Δ πρόβλημα

Βεβαίως, στο 3Δ πρόβλημα, αν δύο από τους αριθμούς τρόπων μηδενίζονται, έχουμε μηδενισμό του ΗΜ πεδίου στην κοιλότητα.

Οι τρόποι με $p \neq 0$ ή $q \neq 0$ λέγονται εγκάρσιοι τρόποι (transverse modes)

Η συχνοτική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών εγκαρσίων τρόπων π.χ. μεταβάλλοντας μόνο το p, με συγκεκριμένα q, m, είναι λοιπόν

$$\Delta\nu_{p,p+1} \approx \frac{cL}{4a^2}\,\frac{(p+1)^2-p^2}{m} = \frac{cL}{4a^2}\,\frac{2p+1}{m}$$

π.χ. για $L=0.4\,m$ και $a=4\,mm$

$$\Delta\nu_{p,p+1} = \frac{3\cdot10^8\cdot 4\cdot10^{-1}}{4\cdot16\cdot10^{-6}}\,\frac{2p+1}{m} = \frac{3\cdot10^{13}}{16\,m}(2p+1)$$

$$m \simeq 1.264\cdot10^6$$

$$\Delta\nu_{p,p+1} \approx 0.148\cdot\frac{10^{13}}{10^6}(2p+1) = 1.5\cdot10^6\,(2p+1)\ Hz$$

$$= 1.5\,(2p+1)\ MHz$$

$$\Delta\nu_{p,p+1} \simeq 1.5\,(2p+1)\ MHz$$

$$\Delta\nu_{m,m+1} = \frac{c}{2L} = 375\ MHz$$

για $p=1$ $\quad \Delta\nu_{p,p+1} \simeq 4.5\ MHz$

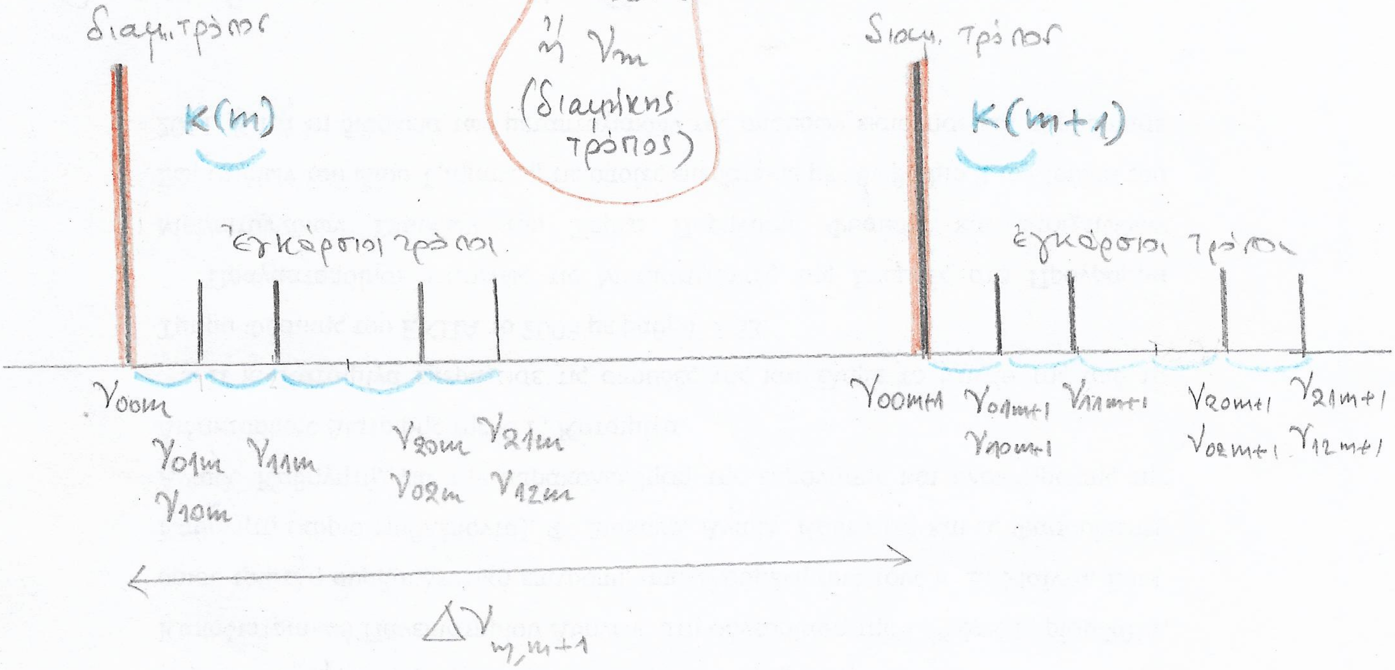
$$\Delta\nu_{m,m+1} \gg \Delta\nu_{p,p+1}$$

Η συχνοτική απόσταση των διαμήκων τρόπων είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη συχνοτική απόσταση των εγκαρσίων τρόπων.

Z

$$\nu_{pqm} \approx \underbrace{\frac{mc}{2L}}_{\nu_{00m}} + \overbrace{\frac{cL}{4a^2}}^{K(m)}\,\frac{p^2+q^2}{m} \Rightarrow \dots$$

ν_{00m} ή ν_m (διαμήκης τρόπος)



$$\nu_{pqm} \simeq \nu_{00m} + K(m)\cdot(p^2+q^2)$$

$$\nu_{10m}\ (\nu_{01m}) \simeq \nu_{00m} + K(m)$$

$$\nu_{11m} \simeq \nu_{00m} + 2\cdot K(m)$$

$$\nu_{20m}\ (\nu_{02m}) = \nu_{00m} + 4\cdot K(m)$$

$$\nu_{21m}\ (\nu_{12m}) = \nu_{00m} + 5\cdot K(m)$$