

Στοιχειώδης Αριθμός Κανονικών Τρόπων ΗΜ πεδίου (dN)
 ανά στοιχειώδες διάστημα συχνότητας (dν)

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$$

$$[g(\nu)] = \frac{1}{\text{Hz}} = \text{s}$$

$$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

$$\left[\frac{g(\nu)}{V} \right] = \frac{1}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{s}}{\text{m}^3}$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{g(\nu)}{V} \cdot \bar{E} \quad [\rho(\nu, T)] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}} = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3}$$

↓
 μέση ενέργεια
 κανονικού τρόπου

κλασικά

$$\bar{E} = \overline{E(T)} = \frac{M}{2} k_B T$$

M = # βαθμών
 ελευθερίας

θεώρημα
 ισοκατανομής
 ενέργειας

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{M}{2} k_B T \frac{\text{για } M=2}{M=2} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k_B T}$$

v. Rayleigh - Jeans

παλαιο-
 κβαντικά

$$\bar{E} = \overline{E(\nu, T)} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

προϋποθέσεις
 • $E_n = n h\nu$ ενέργεια "ταλαντώσεων"
 $n = 0, 1, 2, \dots$

• $\overline{E(\nu, T)} = \sum E_n \cdot P_n$

$$P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

(Maxwell-) Boltzmann (MB)
 στατιστική

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}}$$

v. Planck

♪
 ΑΣΚΗΣΗ Η -
 Σημείωση:

Αν ζητούσε $E_n = n h\nu$ βάζουμε $E_n = h\nu (n + \frac{1}{2})$ όπως συμπε-
 ρούμε σήμερα για τον κβαντικό ΑΑΤ ΔΕΝ προκύπτει ο νόμος του Planck!

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ

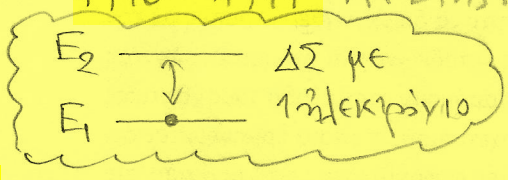
ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ - ΥΛΗΣ (ΧΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)

LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Εξαναγκασμένη Έκπομπή
ή Διεγερμένη

1916 - 1917

A. Einstein "θεωρητικά θεμέλια" του LASER



έπαι-εφαρμογή του v. Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος

Από τη φορά η απόδειξη στηρίζεται στους 3 μηχανισμούς ή διεργασίες

αλληλεπίδρασης ΗΜ ακτινοβολίας - ΔΣ

και στη στατιστική

(Maxwell) - Boltzmann

για την καρένση των σταθμών του ΔΣ από το ηλεκτρόνιο.

(Stimulated) Absorption

(Εξαναγκασμένη) Απορρόφηση

Spontaneous Emission

Αυθόρμητη Έκπομπή

Stimulated Emission

Εξαναγκασμένη Έκπομπή

← εισήχθη από τον A. Einstein

"παλαιότερα γνωστό"

Συντελεστές Einstein

γιατί MB και όχι FD;

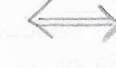
δφείλεται στο $\rho(\nu, T)$



Εξαναγκασμένο

B_{ij}

ΔΕΝ δφείλεται στο $\rho(\nu, T)$



Αυθόρμητο

A_{ij}

i αρχική στάθμη του ηλεκτρονίου
j τελική στάθμη του ηλεκτρονίου

παραύστα να συμβεί η διεργασία

$$dW_{\text{απορ}}^{εξ} = B_{12} \rho(\nu, T) dt$$

$$dW_{\text{εκπ}}^{αυθ} = A_{21} dt$$

$$dW_{\text{εκπ}}^{εξ} = B_{21} \rho(\nu, T) dt$$

ΕΡΩΤΗΣΗ για MB vs
όχι FD;
(μάλλον δεν υπάρχει FD,
σε ύψους T FD → MB,
έχουμε 1 ηλεκτρόνιο στο ΔΣ)

1905 A. Einstein έβγαλε το φαινόμενο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο υποθέτοντας ότι η κίνηση φωτός με ενέργεια $h\nu$

1926 μάλλον από τον Gilbert Newton Lewis «φωτόνιο» = κβαντο φωτός

1950-1960 κατασκευάστηκαν τα πρώτα MASER & LASER

↑
microwaves

1964 Charles Townes, Nikolay Basov, Aleksandr Prokhorov Νόμμος Φυσικής

ΣΗΜΕΡΑ...

(ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (ή διεγερμένη)) ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ
(STIMULATED) ABSORPTION

ΕΔΩ
 $\Delta \Sigma = \delta \delta \sigma \sigma \mu \mu \tau \tau$
 δύο στάθμες
 ενός ατόμου

1

$$dW_{\text{απορ}}^{\text{εξ}} = B_{12} \rho(\nu, T) dt$$

Διατήρηση Ενέργειας

$$E_1 + h\nu = E_2 + \frac{P_{\text{ατ}}^2}{2m_{\text{ατ}}} \Rightarrow h\nu \approx E_2 - E_1$$

Σταθερούμε
 αμελητέα

Διατήρηση Ορμής

$$P_{\text{φ}} = P_{\text{ατ}} \Rightarrow \frac{h\nu}{c} = P_{\text{ατ}} \Rightarrow P_{\text{ατ}} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$c = \lambda \nu \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

E_2 —————

————— E_2

φωτόνιο
 $\Rightarrow E_{\text{φ}} = h\nu, P_{\text{φ}} = \frac{h\nu}{c}$

$\rightarrow P_{\text{ατ}}$

E_1 —————
 ηλεκτρόνιο

————— E_1

(A) ΥΠΟΘΕΤΟΥΜΕ
 ΑΡΧΙΚΩΣ
 ΑΚΙΝΗΤΟ

(T)

Ας ελέγξουμε αν πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου $\frac{P_{\text{ατ}}^2}{2m_{\text{ατ}}}$ μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα, σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου $E_{\text{φ}}$.

$$\Lambda := \frac{\frac{P_{\text{ατ}}^2}{2m_{\text{ατ}}}}{E_{\text{φ}}} = \frac{\frac{h^2}{\lambda^2} \frac{1}{2m_{\text{ατ}}}}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{h}{2m_{\text{ατ}} \lambda c}$$

Για να μεγαλώσει το Λ θα πρέπει ή $m_{\text{ατ}}$ να μειωθεί.

Ας πάρουμε λοιπόν το μικρότερο δυνατό άτομο, το άτομο του υδρογόνου.

$$m_e \approx 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p \approx 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_{\text{ατ}} \approx m_p + m_e$$

$$m_{\text{ατ}} \approx 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

↑ υπάρχει κι ένα μικρό "έλλειμμα μάζας", δηλαδή η ενέργεια συνδέσεως του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου στο άτομο.

Ας πάρουμε ένα τυπικό πράσινο φωτόνιο με $\lambda \approx 500 \text{ nm}$

$$\Lambda = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2 \cdot 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 500 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \approx 1.320 \cdot 10^{-9}$$

Όπότε, πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου.

Για ποίο μήκος κύματος λ , στο άτομο του υδρογόνου, θα μπορούσε ο λήγος Λ να γίνει ίσος με 0.05; (2)

$$\Lambda = \frac{h}{2\lambda c m_{\text{ατ}}} = 0.05 \Rightarrow \lambda = \frac{h}{2 c m_{\text{ατ}} 0.05} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 0.05}$$

$$\Rightarrow \lambda \approx 13.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 13.2 \text{ fm}$$

Αυτό είναι ένα εξαιρετικά μικρότερο μήκος κύματος

π.χ. ακτίνες γ $\lambda_{\gamma} \lesssim 10 \text{ pm} = 10 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 10^{-11} \text{ m}$

ενώ εδώ βρήκαμε $\underline{13.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 13.2 \text{ fm}}$

Διάμετροι πυρήνα υδρογόνου 1.75 fm

Ούρατου 15 fm

Άρα, η υπόθεσή μας, να θεωρήσουμε αμελητέα την κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου

$$\frac{p_{\text{ατ}}^2}{2 m_{\text{ατ}}}$$

σε σχέση με

την ενέργεια του απορροφούμενου φωτονίου $E_{\text{φ}}$

είναι αωστή

σχεδόν σε όλο το ΗΜ φάσμα.

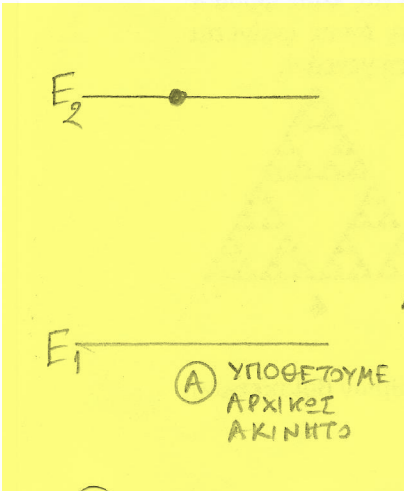
**ΑΥΘΟΡΜΗΤΗ ΕΚΠΟΜΠΗ
SPONTANEOUS EMISSION**

3

$$dW_{εκμ}^{αυθ} = A_{21} \cdot dt$$

energy level lifetime
χρόνος ζωής της στάθμης 2
(το ηλεκτρόνιο από τη στάθμη 2
αφαιρούμε στη στάθμη 1)

τ_2 ή τ



$$E_\gamma = h\nu$$

$$P_\gamma = \frac{h\nu}{c}$$

$$1 := A_{21} \cdot \tau_2 \text{ ή } A_{21} \cdot \tau$$

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{A_{21}}$$

ανδοτικός σπινός ...

το άτομο θα κινείται
προς την αντίθετη
κατεύθυνση με το φως

Διατήρηση Ενέργειας

$$E_2 = E_1 + E_\gamma + \frac{P_{ατ}^2}{2m_{ατ}} \Rightarrow h\nu \approx E_2 - E_1$$

αγνεία

Διατήρηση Ορμής

$$0 = P_{ατ} + P_\gamma \Rightarrow P_{ατ} = -P_\gamma$$

- Τα φωτόνια εκπέμπονται σε τυχαία κατεύθυνση, δηλαδή χωρίς κατευθυντικότητα (without directionality)
- με τυχαία φάση, δηλαδή χωρίς συνοχή (incoherence)

συνοχή (coherence) ή συμφωνία, συμπερικύτωση
= σταθερή σχέση μεταξύ των φάσεων των κυμάτων

coherent
συνεκτικός

incoherent
μη συνεκτικός

↓
π.χ. laser

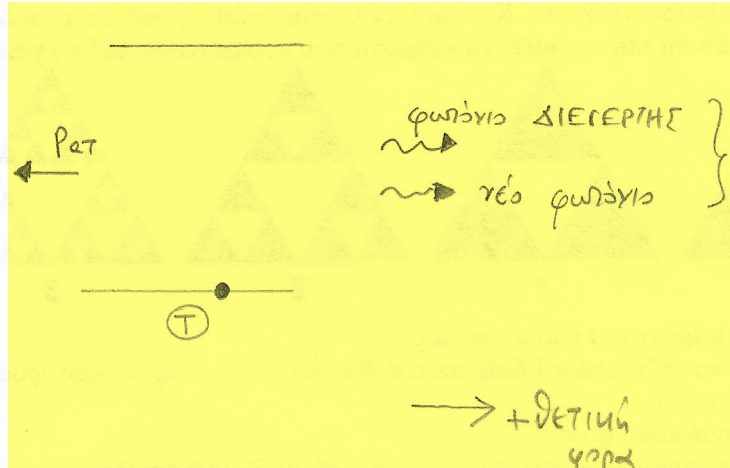
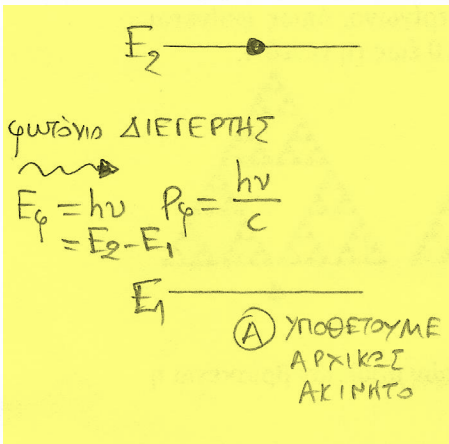
π.χ. φωτεινή πηγή πυρακτωσέω
incandescent light source

ή LED Light Emitting Diode

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (3) ΔΙΕΓΕΡΜΕΝΗ ΕΚΠΟΜΠΗ
STIMULATED EMISSION

A. Einstein
"Zur Quantentheorie der
Strahlung"
1916, 1917 4

$$dW_{εκπ}^{εf} = B_{21} \rho(\nu T) dt$$



"ΚΛΕΝΟΙ"
δύο φωτόνια με ίδια
ένέργεια
όρμη (κατεύθυνση)
φάση
πόλωση

- * Ίδια ενέργεια \Rightarrow μονοχρωματικότητα (monochromaticity)
- * Ίδια όρμη (κατεύθυνση) \Rightarrow κατευθυντικότητα (directionality)
- * Ίδια φάση \Rightarrow συνοχή (coherence)
- * Ίδια πόλωση \Rightarrow πολωμένο φως (polarized light) *
- * υπάρχουν και οι άλλοι μηχανισμοί στο παιχνίδι...

- \rightarrow τα περί φάσεως & πόλωσης \neq στο άρθρο του Einstein
- \rightarrow τα φωτόνια είναι μποζόνια και άρα μπορούν να έχουν ίδια ενέργεια, όρμη (κατεύθυνση), φάση, πόλωση

\rightarrow χρειάζεται η υπόθεση ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ ενέργειας $E_φ = E_2 - E_1 = h\nu$ δεν παθαίνει τίποτε κατά τη διάρκεια της εξαναγκασμένης εκπομπής

- \rightarrow θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ καθορίζει τη φάση, την πόλωση & τη διεύθυνση των νέων εκπνεόμενων φωτονίων όπως σε μία εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης καθορίζει τη φάση, την πόλωση & τη διεύθυνση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης

Διατήρηση Ενέργειας

$$E_2 + \cancel{E_\varphi} = E_1 + \cancel{E_\varphi} + E_{\varphi'} + \frac{P_{\text{αετ}}}{2\omega_{\text{αετ}}} \xrightarrow{\text{αμελητέο}}$$

5

$$\Rightarrow E_{\varphi'} = E_2 - E_1 = E_\varphi \Rightarrow$$

Τα φωτόνια έχουν ίδια ενέργεια \rightarrow μονοχρωματικότητα

Διατήρηση Ορμής

$$\cancel{P_\varphi} = \cancel{P_\varphi} + P_{\varphi'} + P_{\text{αετ}} \Rightarrow P_{\varphi'} = -P_{\text{αετ}}$$

Έχουμε ήδη υποδείξει πώς το νέο φωτόνιο θα κινηθεί στην κατεύθυνση του φωτός ΔΙΕΓΕΡΤΗ

$$\Rightarrow P_{\varphi'} > 0 \quad (\text{θετική αλγεβρική τιμή}) \quad \underline{\text{ίδια κατεύθυνση}}$$

$$(\text{μέτρο}) P_{\varphi'} = \frac{E_{\varphi'}}{c} = \frac{E_\varphi}{c} = P_\varphi \quad \underline{\text{ίδια μέτρο}}$$

\Rightarrow τα φωτόνια έχουν ίδια ορμή

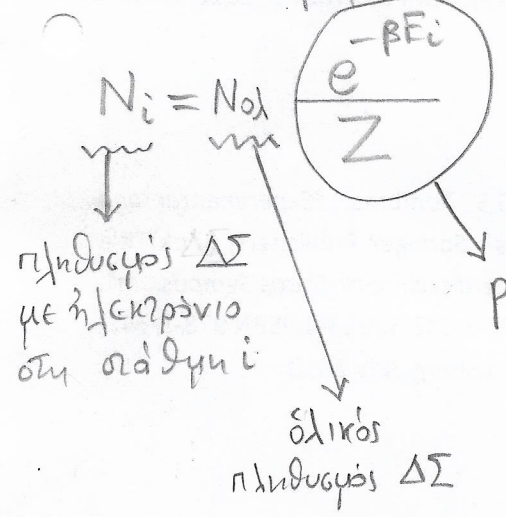
ΕΞΑΓΩΓΗ του νόμου Planck από τους μηχανισμούς αλληλεπίδρασης ΗΜ ακτινοβολίας - ΔΣ και τη στατιστική (Maxwell) - Boltzmann.

Σχέση συντελεστών Einstein A και B

Μελετάμε την αλληλεπίδραση συλλογής ΔΣ - ΗΜ ακτινοβολίας σε θερμοδυναμική ισορροπία.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ (Maxwell) - Boltzmann

① χωρίς διαφορετικά στατιστικά βάρη



② με διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$N_i = N_0 \lambda \frac{g_i e^{-\beta E_i}}{Z}$$

P_i πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη στάθμη i στο ΔΣ

g_i στατιστικό βάρος της E_i

$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$ συνάρτηση επιμερισμού
 partition function $Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i}$

Θερμοδυναμική ισορροπία \Rightarrow σε χρόνο dt $dN_{1 \rightarrow 2} = dN_{2 \rightarrow 1} \Rightarrow$

$N_1 dW_{1 \rightarrow 2} = N_2 dW_{2 \rightarrow 1} \Rightarrow$

$\frac{N_0 \lambda e^{-\beta E_1}}{Z} g_1 dW_{\text{απορ}}^{\text{εξ}} = \frac{N_0 \lambda e^{-\beta E_2}}{Z} g_2 (dW_{\text{εκπ}}^{\text{εξ}} + dW_{\text{αυθ}}^{\text{εκπ}}) \Rightarrow$

$g_1 e^{-\beta E_1} B_{12} \rho(\nu, T) dt = e^{-\beta E_2} g_2 (B_{21} \rho(\nu, T) dt + A_{21} dt) \Rightarrow$

$g_1 e^{-\beta E_1} B_{12} \rho(\nu, T) - e^{-\beta E_2} g_2 B_{21} \rho(\nu, T) = e^{-\beta E_2} g_2 A_{21} \Rightarrow$

$$\rho(\nu, T) = \frac{g_2 A_{21} e^{-\beta E_2}}{g_1 B_{12} e^{-\beta E_1} - g_2 B_{21} e^{-\beta E_2}} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} e^{\beta(E_2 - E_1)} - 1}$$

Όμως,
 $\lim_{T \rightarrow \infty} \rho(\nu, T) = \infty$
 π.χ. από το πείραμα

1 Αν χωρίσουμε την πειραματική συμπεριφορά, την οποία έβγαζε ο νόμος Planck

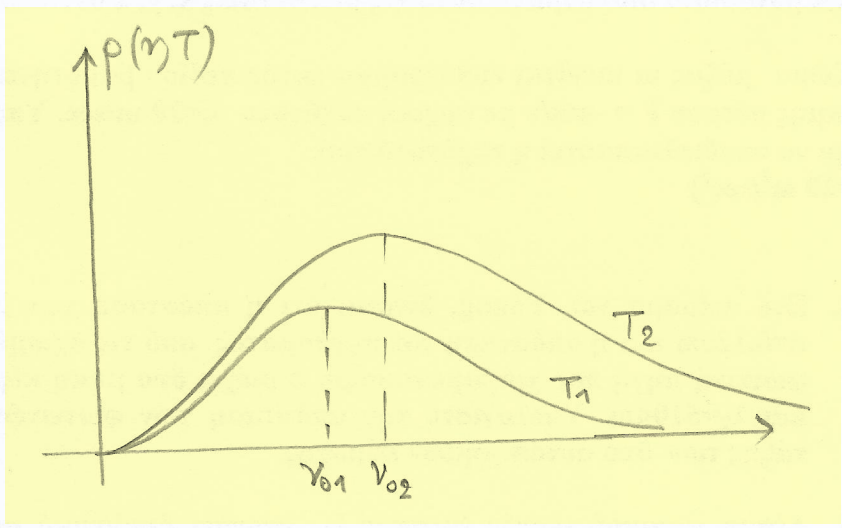
$$\rightarrow \frac{\rho(\nu, T_2)}{\rho(\nu, T_1)} = \frac{e^{\frac{h\nu}{k_B T_1} - 1}}{e^{\frac{h\nu}{k_B T_2} - 1}} > 1$$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T} - 1}}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T_1} - 1} > e^{\frac{h\nu}{k_B T_2} - 1} \Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T_1}} > e^{\frac{h\nu}{k_B T_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T_1} > \frac{1}{T_2} \Leftrightarrow T_2 > T_1$$

δηλαδή μεγαλύτερη θερμοκρασία οδηγεί σε μεγαλύτερο $\rho(\nu, T)$, $\forall \nu$.



2 Έκδοχα, από το νόμο μετατόπισης Wien στη μορφή
 $\nu_0 = (\text{σταθ}) \cdot T$
 $\nu_0 \approx 58.789 \frac{\text{GHz}}{\text{K}} \cdot T$

$\Rightarrow \{ T \uparrow \Rightarrow \nu_0 \uparrow \}$ όπως δείχνουμε και στο σχήμα

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \beta \rightarrow 0$$

$$\rho \rightarrow \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} - 1} = \infty$$

"Αρα, $\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} = 1 \Rightarrow \boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}}$

"Αν $g_2 = g_1$ ή χωρίς στατιστικά βάρη $\Rightarrow B_{12} = B_{21} := B$
 $A_{21} := A$

$$\rho(\nu, T) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} \cdot e^{\beta(E_2 - E_1)} - 1}$$

σύνκλιση \Rightarrow

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}}$$

$$\boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}}$$

$$\boxed{h\nu = E_2 - E_1}$$