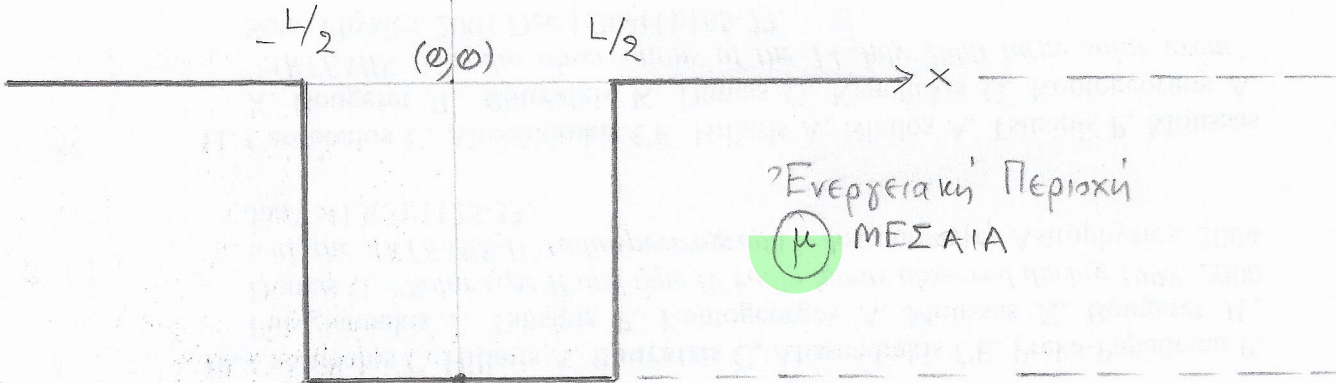




$U(x)$

Ενεργειακή περιοχή
(α) ΑΝΩΤΕΡΗ



Ενεργειακή Περιοχή
(μ) ΜΕΣΑΙΑ

Ενεργειακή Περιοχή
(β) ΚΑΤΩΤΕΡΗ

Χωρική Περιοχή
Δεξιά (I)
π.χ. Αλχ Βα₁-x Αγ

Χωρική Περιοχή
Μεσαία (II)
π.χ. ΒαΑγ

Χωρική Περιοχή
Αριστερά (III)
π.χ. Αλχ Βα₁-x Αγ

Ας εξετάσουμε αρχικώς ενέργειες $E < 0$ ("δέσμιες καταστάσεις")

Χωρικές Περιοχές (I) & (III)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) = E \psi(x) \Leftrightarrow \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0$$

αρνητική

$0 > \frac{2mE}{\hbar^2}$ θέτουμε $-q^2$ κι έστω $q > 0$. Άρα, $\psi''(x) - q^2 \psi(x) = 0$

ΔΛΜ = Δοκιμάζουμε λύσεις τής μορφής $\psi(x) = A e^{-qx} + B e^{qx}$

$$\psi'(x) = -Aq e^{-qx} + Bq e^{qx}$$

$$\psi''(x) = Aq^2 e^{-qx} + Bq^2 e^{qx}$$

$$(Aq^2 e^{-qx} + Bq^2 e^{qx}) - q^2 (A e^{-qx} + B e^{qx}) = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ ισχύει}$$

Δηλαδή αυτό το είδος οι λύσεις είναι ικανοποιητικές.

Επειδή οι $\psi(x)$ πρέπει να είναι τετραγωνικώς δλοκληρώσιμες

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_{III}(x) = A e^{-qx} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_I(x) = B e^{qx}$$

$$\Psi_I(x) = B e^{qx} \Rightarrow \Psi_I'(x) = Bq e^{qx} \quad \textcircled{I}$$

$$\Psi_{III}(x) = A e^{-qx} \Rightarrow \Psi_{III}'(x) = -Aq e^{-qx} \quad \textcircled{III}$$

χωρίς περιοχή II

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(x) - U_b \Psi(x) = E \Psi(x)$$

$$\Psi''(x) + \left(\frac{2m}{\hbar^2} (E + U_b) \right) \Psi(x) = 0$$

δείκτη ή άρνητική

εάν $E < -U_b \Leftrightarrow E + U_b < 0$

$0 > \frac{2m}{\hbar^2} (E + U_b)$ δείχνουμε $-Q^2$ κι έστω $Q > 0 \Rightarrow \Psi''(x) - Q^2 \Psi(x) = 0$

ΔΛΜ $\Psi(x) = \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}$
 $\Psi'(x) = -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx}$
 $\Psi''(x) = \Gamma Q^2 e^{-Qx} + \Delta Q^2 e^{Qx}$

$\Rightarrow \left. \begin{matrix} \Gamma Q^2 e^{-Qx} + \Delta Q^2 e^{Qx} \\ -Q^2(\Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}) \end{matrix} \right\} = 0 \Rightarrow 0 = 0$
Γράφεται

$$\left. \begin{matrix} \Psi_{II}(x) = \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx} \\ \Psi_{II}'(x) = -\Gamma Q e^{-Qx} + \Delta Q e^{Qx} \end{matrix} \right\} \textcircled{II} \textcircled{K}$$

εάν $E > -U_b \Leftrightarrow E + U_b > 0$

$0 < \frac{2m}{\hbar^2} (E + U_b)$ δείχνουμε k^2 κι έστω $k > 0 \Rightarrow \Psi''(x) + k^2 \Psi(x) = 0$

ΔΛΜ $\Psi(x) = \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}$
 $\Psi'(x) = ik\Gamma e^{ikx} - ik\Delta e^{-ikx}$
 $\Psi''(x) = -k^2\Gamma e^{ikx} - k^2\Delta e^{-ikx}$

$\left. \begin{matrix} -k^2\Gamma e^{ikx} - k^2\Delta e^{-ikx} \\ +k^2(\Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}) \end{matrix} \right\} = 0 \Rightarrow 0 = 0$
Γράφεται

ή ΔΛΜ $\Psi(x) = \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx$
 $\Psi'(x) = -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx$
 $\Psi''(x) = -\Gamma k^2 \cos kx - \Delta k^2 \sin kx$

$\left. \begin{matrix} -\Gamma k^2 \cos kx - \Delta k^2 \sin kx \\ +k^2(\Gamma \cos kx + \Delta \sin kx) \end{matrix} \right\} = 0 \Rightarrow 0 = 0$
Γράφεται

Αν εκλέξουμε

$$\left. \begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx} \\ \psi'_{II}(x) &= \Gamma ik e^{ikx} - \Delta ik e^{-ikx} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \textcircled{II} \\ \textcircled{II_1} \end{matrix}$$

ή αν εκλέξουμε

$$\left. \begin{aligned} \psi_{II}(x) &= \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx \\ \psi'_{II}(x) &= -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \textcircled{II} \\ \textcircled{II_2} \end{matrix}$$

δηλαδή για τη χωρική περιοχή \textcircled{II} έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις $\textcircled{II_1}$ ή $\textcircled{II_2}$ για τη μεσαία ενεργειακή περιοχή \textcircled{II}_k για την κατώτερη ενεργειακή περιοχή

Κατά τα γνωστά, για να βρούμε τη σωστή λύση, θα πρέπει να ταιριάζουμε τις κυματοσυναρτήσεις κ τις παραγώγους τους στα όρια των περιοχών δηλαδή σε $x = \pm L/2$.

• Ως προσπαθήσουμε να ταιριάζουμε τις \textcircled{I} , \textcircled{II}_k , \textcircled{III}

$$\left. \begin{aligned} \psi_I(-L/2) &= B e^{-qL/2} \\ \psi_{II}(-L/2) &= \Gamma e^{qL/2} + \Delta e^{-qL/2} \\ \psi'_I(-L/2) &= Bq e^{-qL/2} \\ \psi'_{II}(-L/2) &= \Gamma q e^{qL/2} - \Delta q e^{-qL/2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} B e^{-qL/2} &= \Gamma e^{qL/2} + \Delta e^{-qL/2} \\ Bq e^{-qL/2} &= \Gamma q e^{qL/2} - \Delta q e^{-qL/2} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \textcircled{I} \\ \textcircled{II} \\ \textcircled{III} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{Bq e^{-qL/2}}{B e^{-qL/2}} &= \frac{\Gamma q e^{qL/2} - \Delta q e^{-qL/2}}{\Gamma e^{qL/2} + \Delta e^{-qL/2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Gamma q e^{qL/2} + \Delta q e^{-qL/2} &= -\Gamma q e^{qL/2} + \Delta q e^{-qL/2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Gamma(q+q) e^{qL/2} &= \Delta(q-q) e^{-qL/2} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{q-q}{q+q} e^{-qL}} \oplus \end{aligned}$$

$x = L/2$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{III}\left(\frac{L}{2}\right) &= A e^{-q \frac{L}{2}} \\ \psi_{II}\left(\frac{L}{2}\right) &= \Gamma e^{-\alpha \frac{L}{2}} + \Delta e^{\alpha \frac{L}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A e^{-q \frac{L}{2}} = \Gamma e^{-\alpha \frac{L}{2}} + \Delta e^{\alpha \frac{L}{2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \psi'_{III}\left(\frac{L}{2}\right) &= -Aq e^{-q \frac{L}{2}} \\ \psi'_{II}\left(\frac{L}{2}\right) &= -\Gamma\alpha e^{-\alpha \frac{L}{2}} + \Delta\alpha e^{\alpha \frac{L}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -Aq e^{-q \frac{L}{2}} = -\Gamma\alpha e^{-\alpha \frac{L}{2}} + \Delta\alpha e^{\alpha \frac{L}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{-Aq e^{-q \frac{L}{2}}}{A e^{-q \frac{L}{2}}} = \frac{-\Gamma\alpha e^{-\alpha \frac{L}{2}} + \Delta\alpha e^{\alpha \frac{L}{2}}}{\Gamma e^{-\alpha \frac{L}{2}} + \Delta e^{\alpha \frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$-q e^{-q \frac{L}{2}} - \Delta q e^{\alpha \frac{L}{2}} = -\Gamma\alpha e^{-\alpha \frac{L}{2}} + \Delta\alpha e^{\alpha \frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\Gamma(\alpha - q) e^{-\alpha \frac{L}{2}} = \Delta(\alpha + q) e^{\alpha \frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\alpha + q}{\alpha - q} e^{\alpha L}} \oplus$$

$$\oplus \text{ και } \oplus \Rightarrow \frac{\alpha - q}{\alpha + q} e^{-\alpha L} = \frac{\alpha + q}{\alpha - q} e^{\alpha L} \Rightarrow \boxed{e^{-2\alpha L} = \frac{(\alpha + q)^2}{(\alpha - q)^2}} \oplus$$

το οποίο είναι άτοπο

$$\text{δίου } \alpha > 0 \Rightarrow e^{-2\alpha L} < 1$$

$$\text{επειδή } \frac{(\alpha + q)^2}{(\alpha - q)^2} > 1 \Leftrightarrow (\alpha + q)^2 > (\alpha - q)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + q^2 + 2\alpha q > \alpha^2 + q^2 - 2\alpha q \Leftrightarrow 4\alpha q > 0 \text{ το οποίο ισχύει δίου } \alpha > 0 \text{ και } q > 0$$

δηλαδή ~~η~~ λύση στην κατώτερη ενεργειακή περιοχή.

• Αν προσπαθήσουμε να ταυρίσουμε τις \textcircled{I} \textcircled{II} \textcircled{III} στα σύνορα $x = \pm L/2$

Οι πράξεις βρίσκονται στη σελίδα 4, οι σχέσεις $\blacksquare, \blacksquare \Rightarrow$

$$\frac{(ik + q) e^{ikL}}{(ik - q)} = \frac{(ik - q) e^{-ikL}}{(ik + q)} \Rightarrow \boxed{e^{2ikL} = \frac{(ik - q)^2}{(ik + q)^2} = \frac{-k^2 + q^2 - 2ikq}{-k^2 + q^2 + 2ikq} := \Lambda}$$

$$\xi = \frac{kL}{2} = \dots$$

$x = \frac{L}{2}$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{III}(\frac{L}{2}) &= A e^{-q \frac{L}{2}} \\ \Psi_{II}(\frac{L}{2}) &= \Gamma e^{ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik \frac{L}{2}} \end{aligned} \right\} A e^{-q \frac{L}{2}} = \Gamma e^{ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik \frac{L}{2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi'_{III}(\frac{L}{2}) &= -A q e^{-q \frac{L}{2}} \\ \Psi'_{II}(\frac{L}{2}) &= \Gamma i k e^{ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{-ik \frac{L}{2}} \end{aligned} \right\} -A q e^{-q \frac{L}{2}} = \Gamma i k e^{ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{-ik \frac{L}{2}}$$

$$(\because) \Rightarrow -q = \frac{\Gamma i k e^{ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{-ik \frac{L}{2}}}{\Gamma e^{ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{-ik \frac{L}{2}}} \Rightarrow -\Gamma q e^{ik \frac{L}{2}} - \Delta q e^{-ik \frac{L}{2}} = \Gamma i k e^{ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{-ik \frac{L}{2}}$$

$$(\Delta i k - \Delta q) e^{-ik \frac{L}{2}} = (\Gamma i k + \Gamma q) e^{ik \frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta(i k - q)}{\Gamma(i k + q)} = e^{i k L}} \Rightarrow \left\{ \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{(i k + q)}{(i k - q)} e^{i k L} \right. \quad \blacksquare$$

$x = -\frac{L}{2}$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{I}(-\frac{L}{2}) &= B e^{-q \frac{L}{2}} \\ \Psi_{II}(-\frac{L}{2}) &= \Gamma e^{-ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{+ik \frac{L}{2}} \end{aligned} \right\} B e^{-q \frac{L}{2}} = \Gamma e^{-ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{+ik \frac{L}{2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi'_{I}(-\frac{L}{2}) &= B q e^{-q \frac{L}{2}} \\ \Psi'_{II}(-\frac{L}{2}) &= \Gamma i k e^{-ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{+ik \frac{L}{2}} \end{aligned} \right\} B q e^{-q \frac{L}{2}} = \Gamma i k e^{-ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{+ik \frac{L}{2}}$$

$$(\because) \Rightarrow q = \frac{\Gamma i k e^{-ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{+ik \frac{L}{2}}}{\Gamma e^{-ik \frac{L}{2}} + \Delta e^{+ik \frac{L}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Gamma q e^{-ik \frac{L}{2}} + \Delta q e^{+ik \frac{L}{2}} = \Gamma i k e^{-ik \frac{L}{2}} - \Delta i k e^{+ik \frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$(\Delta i k + \Delta q) e^{+ik \frac{L}{2}} = (\Gamma i k - \Gamma q) e^{-ik \frac{L}{2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta(i k + q)}{\Gamma(i k - q)} = e^{-i k L}} \Rightarrow \left\{ \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{(i k - q)}{(i k + q)} e^{-i k L} \right. \quad \blacksquare$$

$$\xi := \frac{kL}{2} \Rightarrow k = \frac{2\xi}{L}$$

$$\eta := \frac{qL}{2} \Rightarrow q = \frac{2\eta}{L}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{L^2}{4} (k^2 + q^2) = \frac{L^2}{4} \left[\frac{2m}{\hbar^2} (E + U_b) - \frac{2m}{\hbar^2} E \right] = \frac{L^2}{4} \frac{2mU_b}{\hbar^2} = \frac{mU_bL^2}{2\hbar^2} := \alpha^2$$

$$\alpha^2 := \frac{mU_bL^2}{2\hbar^2}$$

σταθερό ανεξάρτητο της ενέργειας E
κι ξέχω α > 0

δηλαδή

$$\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2$$


Εκφράζει την αποτελεσματικότητα του φρέατος

Είναι ανάλογο της μάζας ή ενέργειας μάζας του σωματιδίου m

του βάθους του φρέατος U_b και

του πλάτους στο χειράκι του φρέατος L².

$$-\xi^2 + \eta^2 := \beta^2$$

Όπότε, η σχέση  =>

$$\text{όπότε } e^{\frac{2i\xi L}{L}} = \frac{-\xi^2 + \eta^2 - 2i\xi\eta}{-\xi^2 + \eta^2 + 2i\xi\eta} = \frac{\beta^2 - 2i\xi\eta}{\beta^2 + 2i\xi\eta} = \frac{(\beta^2 - 2i\xi\eta)^2}{(\beta^2 + 2i\xi\eta)(\beta^2 - 2i\xi\eta)}$$

$$e^{i4\xi} = \frac{\beta^4 - 4i\xi\eta\beta^2 - 4\xi^2\eta^2}{\beta^4 + 4\xi^2\eta^2} \Rightarrow e^{i4\xi} (\beta^4 + 4\xi^2\eta^2) = \beta^4 - 4i\xi\eta\beta^2 - 4\xi^2\eta^2$$

έν τω μεταξύ $\beta^4 + 4\xi^2\eta^2 = \xi^4 + \eta^4 - 2\xi^2\eta^2 + 4\xi^2\eta^2 = (\xi^2 + \eta^2)^2 = \alpha^4$

$$\beta^4 - 4f^2\eta^2 = \beta^4 + 4f^2\eta^2 - 8f^2\eta^2 = a^4 - 8f^2\eta^2$$

5' (4)

$$-4if\eta\beta^2 = ; \dots$$

$$\Rightarrow a^4 e^{i4f} = a^4 - 8f^2\eta^2 - 4if\eta\beta^2$$

$$a^4 \cos 4f + ia^4 \sin 4f = (a^4 - 8f^2\eta^2) + i(-4f\eta\beta^2)$$

$$\left. \begin{aligned} a^4 \cos 4f &= a^4 - 8f^2\eta^2 \\ a^4 \sin 4f &= -4f\eta\beta^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan(4f) = \frac{-4f\eta\beta^2}{a^4 - 8f^2\eta^2} \otimes$$

δίνω τα πραγματικά φαινόμενα περίηλκκα

$$\beta^4 + 4f^2\eta^2 = a^4$$

$$\beta^4 - 4f^2\eta^2 = a^4 - 8f^2\eta^2$$

$$(+)\ 2\beta^4 = 2a^4 - 8f^2\eta^2$$

$$\beta^4 = a^4 - 4f^2\eta^2$$

$$\frac{a^4 - \beta^4}{4} = f^2\eta^2$$

$$f\eta = \frac{\sqrt{a^4 - \beta^4}}{2}$$

$$a^4 - \beta^4 > 0 \Leftrightarrow a^4 > \beta^4 \Leftrightarrow \left(\frac{mV_b L^2}{2\hbar^2}\right)^2 > (\eta^2 - f^2)^2$$

$$= \left(\frac{L^2 q^2}{4} - \frac{L^2 k^2}{4}\right)^2 = \frac{L^4}{4^2} \left[-\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_b)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{\eta^2} V_b^2 \cancel{L^4}}{\cancel{\hbar^4}} > \frac{\cancel{L^4}}{4^2} \frac{\cancel{4m^2}}{\cancel{\hbar^4}} (2E + V_b)^2 \Leftrightarrow V_b^2 > 4E^2 + V_b^2 + 4EV_b$$

$$\Leftrightarrow 0 > E^2 + EV_b \Leftrightarrow 0 < E + V_b$$

$$(E < 0)$$

που ισχύει δίνω βρισκόμαστε στην ενεργειακή περιοχή ΜΕΣΩΝ

$$\text{Οπότε } \otimes \Rightarrow \tan(4f) = \frac{-4 \frac{\sqrt{a^4 - \beta^4}}{2} \cdot \beta^2}{a^4 - 8 \frac{(a^4 - \beta^4)}{4}} = \frac{-2\sqrt{a^4 - \beta^4} \cdot \beta^2}{a^4 - 2(a^4 - \beta^4)} = \frac{-2\sqrt{a^4 - \beta^4} \cdot \beta^2}{-a^4 + 2\beta^4}$$

$$\boxed{\tan(4f) = \frac{2\sqrt{a^4 - \beta^4} \cdot \beta^2}{a^4 - 2\beta^4}}$$

Για τις $\textcircled{\text{II}}$ μ_2 $\Psi_{\text{II}}(x) = \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx$

6 $\textcircled{5}$

Επειδή η δυναμική ενέργεια είναι άρτια
 θα έχουμε ένα μ_2 άρτιες & περιττές ιδιοσυναρτήσεις
 πράγμα που φαίνεται να μπορεί να το χρησιμοποιήσει
 η μορφή $\textcircled{\text{II}}$ μ_2 που αναφέρεται επί \cos (άρτιες) & \sin (περιττές)

ΕΣΤΩ ΑΡΤΙΕΣ

για $x \in$ περιοχές I & III $\Psi(-x) = \Psi(x) \Rightarrow$

δηλαδή

$\Psi_{\text{I}}(x) = \Psi_{\text{III}}(-x)$

$$\left. \begin{aligned} x > 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow B e^{-qx} = A e^{-qx} \Leftrightarrow B = A \\ x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow A e^{-qx} = B e^{-qx} \Leftrightarrow B = A \end{aligned} \right\} B = A$$

$\Psi_{\text{I}}(-x) = \Psi_{\text{III}}(x)$

για $x \in$ περιοχή II $\Psi(-x) = \Psi(x) \Leftrightarrow \Gamma \cos(-kx) + \Delta \sin(-kx) = \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx$
 $\Leftrightarrow \Gamma \cos kx - \Delta \sin kx = \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx$
 $\Leftrightarrow 2\Delta \sin kx = 0 \quad (\forall x \in \text{περιοχή II}) \Rightarrow \Delta = 0$

Οπότε έχουμε

$\Psi_{\text{I}}(x) = A e^{qx} \quad \Psi'_{\text{I}}(x) = A q e^{qx}$

$\Psi_{\text{II}}(x) = \Gamma \cos kx \quad \Psi'_{\text{II}}(x) = -\Gamma k \sin kx$

$\Psi_{\text{III}}(x) = A e^{-qx} \quad \Psi'_{\text{III}}(x) = -A q e^{-qx}$

συνέχεια Ψ & Ψ'
 στα $x = \pm L/2$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{\text{I}}(-L/2) = \Psi_{\text{II}}(-L/2) \Rightarrow A e^{-qL/2} = \Gamma \cos(kL/2) \\ \Psi'_{\text{I}}(-L/2) = \Psi'_{\text{II}}(-L/2) \Rightarrow A q e^{-qL/2} = +\Gamma k \sin(kL/2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow q = k \tan(kL/2)$$

$q = k \tan(kL/2) \Rightarrow \boxed{\tan(kL/2) = \frac{q}{k}}$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{\text{II}}(L/2) = \Psi_{\text{III}}(L/2) \Rightarrow \Gamma \cos(kL/2) = A e^{-qL/2} \\ \Psi'_{\text{II}}(L/2) = \Psi'_{\text{III}}(L/2) \Rightarrow -\Gamma k \sin(kL/2) = -A q e^{-qL/2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$-k \tan(kL/2) = -q \Rightarrow \boxed{\tan(kL/2) = \frac{q}{k}}$

δηλαδή $\boxed{\tan(kL/2) = \frac{q}{k}} \quad \text{A}$

δημοίωστε

$\xi := \frac{kL}{2} \quad \eta := \frac{qL}{2}$

$k = \frac{2\xi}{L} \quad q = \frac{2\eta}{L}$

$\xi^2 + \eta^2 = a^2 = \frac{m \sqrt{b} L^2}{2\hbar^2}$

$\eta^2 = a^2 - \xi^2 \Rightarrow \eta = \sqrt{a^2 - \xi^2}$

$\tan \xi = \frac{\eta}{\xi}$

$\boxed{\tan \xi = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi}} \quad \text{A}$

ΕΣΤΩ ΠΕΡΙΤΤΕΣ

για $x \in$ περιοχές I & III $\psi(x) = -\psi(x) \Rightarrow$

$x > 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow B e^{-qx} = -A e^{-qx} \Leftrightarrow B = -A$
 $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow A e^{+qx} = -B e^{+qx} \Leftrightarrow B = -A$ (6)

για $x \in$ περιοχή II $\psi(-x) = -\psi(x) \Rightarrow$

$\Gamma \cos(-kx) + \Delta \sin(-kx) = -\Gamma \cos kx - \Delta \sin kx \Rightarrow$

$\Gamma \cos(kx) - \Delta \sin(kx) = -\Gamma \cos(kx) - \Delta \sin(kx) \Rightarrow$

$2\Gamma \cos(kx) = 0 \quad (\forall x \in \text{περιοχή II}) \Rightarrow \Gamma = 0$

Οπότε έχουμε

$\psi_I(x) = -A e^{qx} \quad \psi'_I(x) = -Aq e^{qx}$

$\psi_{II}(x) = \Delta \sin kx \quad \psi'_{II}(x) = \Delta k \cos kx$

$\psi_{III}(x) = A e^{-qx} \quad \psi'_{III}(x) = -Aq e^{-qx}$

συνέχεια ψ & ψ'
στα $x = \pm L/2$

$\psi_I(-L/2) = \psi_{II}(-L/2) \Rightarrow -A e^{-qL/2} = \Delta \sin(kL/2)$
 $\psi'_I(-L/2) = \psi'_{II}(-L/2) \Rightarrow -Aq e^{-qL/2} = \Delta k \cos(kL/2)$ (7)

$q = -k \cot(kL/2) \Rightarrow \boxed{\tan(kL/2) = -\frac{k}{q}}$

$\psi_{III}(L/2) = \psi_{II}(L/2) \Rightarrow A e^{-qL/2} = \Delta \sin(kL/2)$
 $\psi'_{III}(L/2) = \psi'_{II}(L/2) \Rightarrow -Aq e^{-qL/2} = \Delta k \cos(kL/2)$ (8)

$-\frac{1}{q} = \frac{1}{k} \tan(kL/2) \Rightarrow \boxed{\tan(kL/2) = -\frac{k}{q}}$

δηλαδή $\boxed{\tan(kL/2) = -\frac{k}{q}} \quad \text{III}$

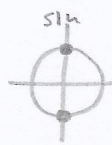
$\boxed{\tan \xi = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}} \quad \text{IV}$

Να σημειωθεί ότι τα ξ & a είναι αδιόστατα, $[\xi] = 1, [a^2] = 1$

$a^2 = \frac{m v_b L^2}{2\hbar^2}$ εκφράζει τη στέρεση ελευθερίας του σωματιδίου ($m \uparrow$ ή $v_b \uparrow$ ή $L \uparrow$)

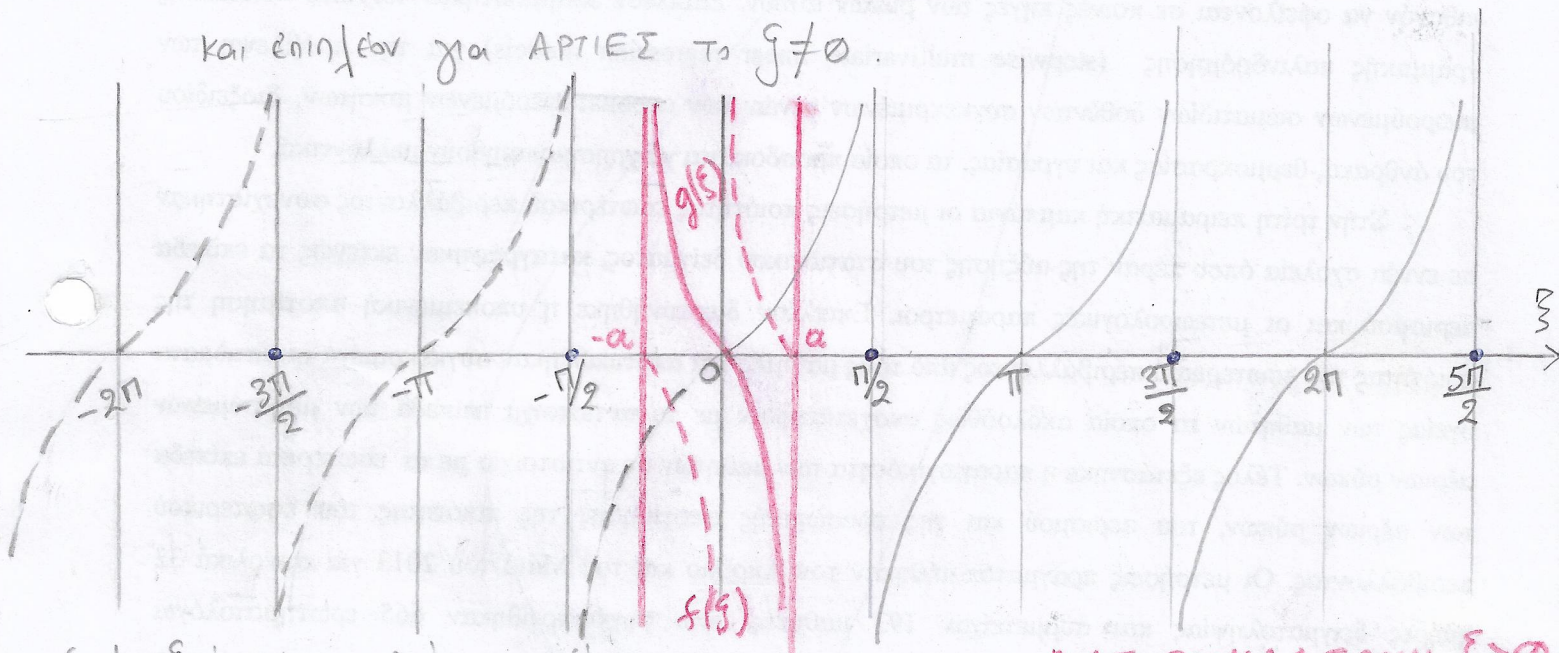
Συνοψίζοντας ΑΡΤΙΕΣ $\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{q}{k} \square$ $\tan\xi = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi} \textcircled{A}$ $\xi \textcircled{7}$

ΠΕΡΙΤΤΕΣ $\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = -\frac{k}{q} \square$ $\tan\xi = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \textcircled{B}$

 \cos ή $\tan\xi$ δεν ορίζεται για $\xi = (2l+1)\frac{\pi}{2}$ $l \in \mathbb{N}$ $k > 0 \Leftrightarrow \xi > 0$

για να ορίζεται η ρίζα θα πρέπει $a^2 - \xi^2 \geq 0 \Leftrightarrow \xi^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq \xi \leq a$

και εστιάζουν για ΑΡΤΙΕΣ το $\xi \neq 0$.



ή $\tan\xi$ εκτείνεται από $-\infty$ έως $+\infty$

ΜΑΣ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΝ $\xi > 0$

$f(\xi) = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi}$ πεδίο ορισμού $[-a, 0) \cup (0, a]$ $f(\pm a) = 0$

$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(\xi) = +\infty$ $\lim_{\xi \rightarrow 0^-} f(\xi) = -\infty$

ή $f(\xi)$ εκτείνεται από $-\infty$ έως $+\infty$

--- 2 ξεχωριστοί κλάδοι
ο ένας δε μάς ενδιαφέρει γιατί είναι σε αρνητικά ξ .

Επάνω τουλάχιστον ένα σημείο τομής των $f(\xi)$ και $\tan\xi$

$g(\xi) = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}$ πεδίο ορισμού $(-a, a)$ $g(0) = 0$ — 1 κλάδος

το ένα κομμάτι του δε μάς ενδιαφέρει γιατί είναι σε αρνητικά ξ .

$\lim_{\xi \rightarrow a} g(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{-\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \frac{-a}{0} = -\infty$

$\lim_{\xi \rightarrow -a} g(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow -a} \frac{-\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \frac{a}{0} = +\infty$

Τα πεδία ορισμού των $f(\xi)$ και $g(\xi)$ τερματίζονται σε a

ή επειδή $\xi > 0 \Rightarrow (0, a]$ για $f(\xi)$ και $(0, a)$ για $g(\xi)$

για $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \exists$ 1 σημείο τομής των $f(x)$ & $\tan x$

για $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \exists$ 1 σημείο τομής των $f(x)$ & $\tan x$
& 1 σημείο τομής των $g(x)$ & $\tan x$

για $\alpha \in [\pi, \frac{3\pi}{2}) \exists$ 2 σημεία τομής των $f(x)$ & $\tan x$
& 1 σημείο τομής των $g(x)$ & $\tan x$

για $\alpha \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \exists$ 2 σημεία τομής των $f(x)$ & $\tan x$
& 2 σημεία τομής των $g(x)$ & $\tan x$

Επομένως έχουμε τουλάχιστον 1 λύση, ενώ προτίθεται για κάθε φορά που αυξάνουμε το α κατά $\frac{\pi}{2}$. Οπότε ο αριθμός των λύσεων είναι

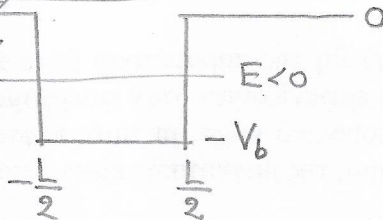
$$n = 1 + \text{Int} \left[\frac{\alpha}{\frac{\pi}{2}} \right] = 1 + \text{Int} \left[\frac{\sqrt{\frac{m^* V_b L^2}{2 \hbar^2}}}{\frac{\pi}{2}} \right] = 1 + \text{Int} \left[\sqrt{\frac{m^* V_b L^2 4}{2 \hbar^2 \pi^2}} \right]$$

$$\Rightarrow n = 1 + \text{Int} \left[\sqrt{\frac{2 m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \right]$$

$$k_w = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E + V_b)}$$

$$k_b = \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

$$\begin{cases} k_w \tan(k_w \frac{L}{2}) = k_b & \text{even solutions} \\ k_w \cot(k_w \frac{L}{2}) = -k_b & \text{odd solutions} \end{cases}$$



See
exercise 10

$$\frac{L}{2} k_w = \sqrt{\frac{2m(E + V_b)L^2}{4\hbar^2}} \Rightarrow k_w = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$$

$$\beta^2 = \frac{2m V_b L^2}{4\hbar^2}$$

$$\frac{L}{2} k_b = \sqrt{-\frac{2mEL^2}{4\hbar^2}} \Rightarrow k_b = \sqrt{\alpha^2}, \alpha > 0$$

$$\alpha^2 = -\frac{2mEL^2}{4\hbar^2}$$

$$\begin{cases} k_w \cdot \tan(k_w) = k_b \\ k_w \cdot \cot(k_w) = -k_b \end{cases}$$

$$k_w^2 = \beta^2 - k_b^2 \Rightarrow k_w^2 + k_b^2 = \beta^2$$

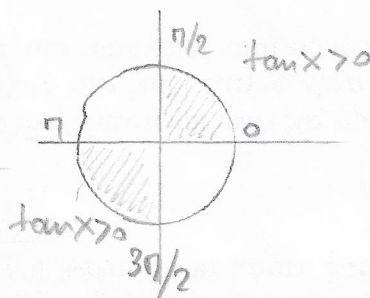
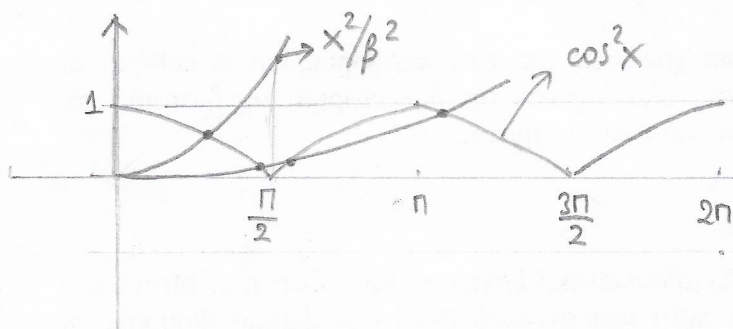
$$\begin{cases} x \tan x = \sqrt{\beta^2 - x^2} \\ x \cot x = -\sqrt{\beta^2 - x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \tan^2 x = \beta^2 - x^2 \\ x^2 \cot^2 x = \beta^2 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 (1 + \tan^2 x) = \beta^2 \\ x^2 (1 + \cot^2 x) = \beta^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \frac{1}{\cos^2 x} = \beta^2 \\ x^2 \frac{1}{\sin^2 x} = \beta^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x = \frac{x^2}{\beta^2} \\ \sin^2 x = \frac{x^2}{\beta^2} \end{cases}$$



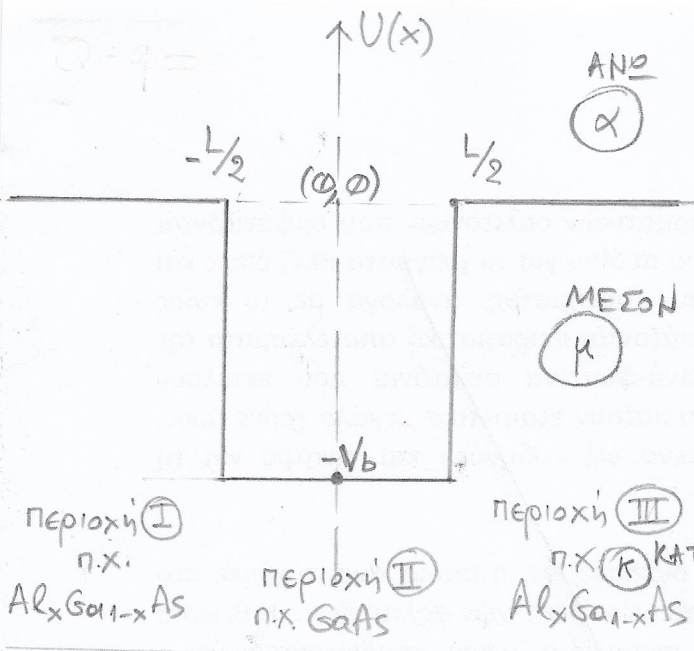
$$\left. \frac{x^2}{\beta^2} \right|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{\beta^2}$$

$$\eta(L) = 1 + \text{Int} \left[\sqrt{\frac{2m V_b L^2}{\pi \hbar^2}} \right]$$

$$\frac{\beta^2}{(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{2m V_b L^2}{\hbar^2 \pi^2}$$

$$\eta(L) = 1 + \text{Int} \left[\sqrt{\frac{\beta^2}{(\frac{\pi}{2})^2}} \right]$$

$$\eta(L) = 1 + \text{Int} \left[\frac{\beta}{\pi/2} \right]$$



Ας εξετάσουμε αρχικά ενέργειες $E < 0$.
("δέσιμες καταστάσεις")

περιοχές I & III $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) = E\psi(x) \Leftrightarrow \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0$

$0 > \frac{2mE}{\hbar^2} \stackrel{\text{θέτουμε}}{=} -q^2$ κι έστω $q > 0$

Άρα $\Delta \text{LM } \psi''(x) - q^2 \psi(x) = 0$ $\Delta \text{LM} = \text{δοκιμάζουμε λύσεις της μορφής}$

$\Delta \text{LM } \psi(x) = A e^{-qx} + B e^{qx}$
 $\psi'(x) = A(-q) e^{-qx} + B q e^{qx}$
 $\psi''(x) = A q^2 e^{-qx} + B q^2 e^{qx}$
 $\psi''(x) = q^2 \psi(x) \Rightarrow$

$q^2 \psi(x) - q^2 \psi(x) = 0$ που ισχύει
 Δηλαδή αυτού του είδους οι λύσεις είναι ικανοποιητικές

Επειδή ο $\psi(x)$ πρέπει να είναι τετραγωνικός δυνάμειος

$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_{\text{III}}(x) = A e^{-qx}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = 0 \Rightarrow \psi_{\text{I}}(x) = B e^{qx}$

$\psi_{\text{I}}(x) = B e^{qx} \Rightarrow \psi'_{\text{I}}(x) = B q e^{qx}$ (I)

$\psi_{\text{III}}(x) = A e^{-qx} \Rightarrow \psi'_{\text{III}}(x) = -A q e^{-qx}$ (III)

περιοχή II $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) - V_b \psi(x) = E \psi(x)$
 $\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_b) \psi(x) = 0$

Εάν $E > -V_b \Leftrightarrow E + V_b > 0$

$0 < \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_b) \stackrel{\text{θέτουμε}}{=} k^2$ κι έστω $k > 0$

$\Rightarrow \psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0$

$\Delta \text{LM } \psi(x) = \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}$

$\psi'(x) = \Gamma i k e^{ikx} + \Delta (-i k) e^{-ikx}$

$\psi''(x) = -k^2 \Gamma e^{ikx} - k^2 \Delta e^{-ikx}$

$\psi''(x) = -k^2 \psi(x) \Rightarrow$

$-k^2 \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0$ που ισχύει

ή $\Delta \text{LM } \psi(x) = \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx$

$\psi'(x) = -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx$

$\psi''(x) = -\Gamma k^2 \cos kx - \Delta k^2 \sin kx$

$\psi''(x) = -k^2 \psi(x) \Rightarrow$

$-k^2 \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0$ που ισχύει

Εάν $E < -V_b \Leftrightarrow E + V_b < 0$

$0 > \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_b) \stackrel{\text{θέτουμε}}{=} -Q^2$ κι έστω $Q > 0$

Αν επιλέξουμε $\psi_{\text{II}}(x) = \Gamma e^{ikx} + \Delta e^{-ikx}$
 $\psi'_{\text{II}}(x) = \Gamma i k e^{ikx} - \Delta i k e^{-ikx}$ (II)

ένω αν επιλέξουμε $\psi_{\text{II}}(x) = \Gamma \cos kx + \Delta \sin kx$
 $\psi'_{\text{II}}(x) = -\Gamma k \sin kx + \Delta k \cos kx$ (II)

$\psi''(x) - Q^2 \psi(x) = 0$
 $\Delta \text{LM } \psi(x) = \Gamma e^{-Qx} + \Delta e^{Qx}$

$\xi \acute{\alpha}\nu E = -V_b$

$$\psi_{II}''(x) = 0$$

$$\psi_{II}'(x) = c$$

$$\psi_{II}(x) = cx + d$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{II}(-\frac{L}{2}) = \psi_{III}(-\frac{L}{2}) &\Rightarrow B e^{-q\frac{L}{2}} = c(-\frac{L}{2}) + d \\ \psi_{II}'(-\frac{L}{2}) = \psi_{III}'(-\frac{L}{2}) &\Rightarrow B q e^{-q\frac{L}{2}} = c \\ \psi_{III}(\frac{L}{2}) = \psi_{II}(\frac{L}{2}) &\Rightarrow A e^{-q\frac{L}{2}} = c\frac{L}{2} + d \\ \psi_{III}'(\frac{L}{2}) = \psi_{II}'(\frac{L}{2}) &\Rightarrow -A q e^{-q\frac{L}{2}} = c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} q &= \frac{c}{c(-\frac{L}{2}) + d} \\ q &= \frac{-c}{c\frac{L}{2} + d} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{c}{c(-\frac{L}{2}) + d} = \frac{-c}{c\frac{L}{2} + d} \Rightarrow \cancel{\frac{c}{2}} + d = \cancel{\frac{c}{2}} - d \Rightarrow d = -d \Rightarrow d = 0$$

$$q = \frac{c}{c(-\frac{L}{2})} \qquad q = \frac{-c}{c\frac{L}{2}}$$

$$q = -\frac{2}{L} \qquad q = -\frac{2}{L}$$

$q = -\frac{2}{L} < 0$ ΑΤΟΠΟ δίου $q > 0$ (το συνδέεται συν $\rho \chi^2$)

δελ. δεν υπάρχει λύση για $E = -V_b \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow \int = 0$

$\xi \acute{\alpha}\nu E = 0$

$$\psi''(x) - \alpha^2 \psi(x) = 0$$

ΔΛΜ $\psi(x) = \Gamma e^{-\alpha x} + \Delta e^{\alpha x}$

$$\psi'(x) = -\Gamma \alpha e^{-\alpha x} + \Delta \alpha e^{\alpha x}$$

$$\psi''(x) = +\Gamma \alpha^2 e^{-\alpha x} + \Delta \alpha^2 e^{\alpha x}$$

$$\psi''(x) = \alpha^2 (\Gamma e^{-\alpha x} + \Delta e^{\alpha x})$$

$$\psi''(x) = \alpha^2 \psi(x) \Rightarrow$$

$$\alpha^2 \psi(x) - \alpha^2 \psi(x) = 0 \text{ που ισχύει}$$

Συνεπώς $\psi_{\pm}(x) = \Gamma e^{-\alpha x} + \Delta e^{\alpha x}$ (III) ΚΑΤΩ

$$\textcircled{II} \kappa \left\{ \begin{aligned} \psi_{\pm}(x) &= \Gamma e^{-\alpha x} + \Delta e^{\alpha x} \\ \psi'_{\pm}(x) &= -\Gamma \alpha e^{-\alpha x} + \Delta \alpha e^{\alpha x} \end{aligned} \right.$$

Διηλεκτική για την περιοχή \textcircled{II} έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις

$\textcircled{II} \mu 1$ ή $\textcircled{II} \mu 2$ για ενέργειες στο ΜΕΣΩΝ
 $\textcircled{II} \kappa$ για ενέργειες στο ΚΑΤΩ

Κατά τα γνωστά, για να βρούμε τη σωστή λύση, θα πρέπει να ταιριάζουμε τις κυματοσυναρτήσεις ή τις παραγώγους τους στα όρια των περιοχών δηλαδή στα $x = \pm L/2$.

Ας προσπαθήσουμε να ταιριάζουμε τις $\textcircled{I}, \textcircled{II} \kappa, \textcircled{III}$

$$\psi_{\pm}(-L/2) = B e^{-\alpha L/2}$$

$$\psi_{\pm}(-L/2) = \Gamma e^{+\alpha L/2} + \Delta e^{-\alpha L/2}$$

$$\left. \begin{aligned} B e^{-\alpha L/2} \\ \Gamma e^{+\alpha L/2} + \Delta e^{-\alpha L/2} \end{aligned} \right\} B e^{-\alpha L/2} = \Gamma e^{+\alpha L/2} + \Delta e^{-\alpha L/2} \quad \Rightarrow$$

$$\psi'_{\pm}(-L/2) = B \alpha e^{-\alpha L/2}$$

$$\psi'_{\pm}(-L/2) = -\Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2}$$

$$\left. \begin{aligned} B \alpha e^{-\alpha L/2} \\ -\Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2} \end{aligned} \right\} B \alpha e^{-\alpha L/2} = -\Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B \alpha e^{-\alpha L/2}}{B e^{-\alpha L/2}} = \frac{-\Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2}}{\Gamma e^{+\alpha L/2} + \Delta e^{-\alpha L/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2} = -\Gamma \alpha e^{+\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{-\alpha L/2}$$

$$\Rightarrow \Gamma(\alpha + \alpha) e^{+\alpha L/2} = \Delta(\alpha - \alpha) e^{-\alpha L/2} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\alpha - \alpha}{\alpha + \alpha} e^{-\alpha L}} \quad \oplus$$

$$\psi_{\pm}(L/2) = A e^{-\alpha L/2}$$

$$\psi_{\pm}(L/2) = \Gamma e^{-\alpha L/2} + \Delta e^{+\alpha L/2}$$

$$\left. \begin{aligned} A e^{-\alpha L/2} \\ \Gamma e^{-\alpha L/2} + \Delta e^{+\alpha L/2} \end{aligned} \right\} A e^{-\alpha L/2} = \Gamma e^{-\alpha L/2} + \Delta e^{+\alpha L/2} \quad \Rightarrow$$

$$\psi'_{\pm}(L/2) = -A \alpha e^{-\alpha L/2}$$

$$\psi'_{\pm}(L/2) = -\Gamma \alpha e^{-\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{+\alpha L/2}$$

$$\left. \begin{aligned} -A \alpha e^{-\alpha L/2} \\ -\Gamma \alpha e^{-\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{+\alpha L/2} \end{aligned} \right\} -A \alpha e^{-\alpha L/2} = -\Gamma \alpha e^{-\alpha L/2} + \Delta \alpha e^{+\alpha L/2} \quad \Rightarrow$$

$$-\cancel{A}q e^{-q\frac{L}{2}} = \frac{-\Gamma Q e^{-\frac{Q}{2}} + \Delta Q e^{\frac{Q}{2}}}{\Gamma e^{-\frac{Q}{2}} + \Delta e^{\frac{Q}{2}}} \Rightarrow$$

$$-\Gamma q e^{-\frac{Q}{2}} - \Delta q e^{\frac{Q}{2}} = -\Gamma Q e^{-\frac{Q}{2}} + \Delta Q e^{\frac{Q}{2}} \Rightarrow$$

$$\Gamma(Q-q) e^{-\frac{Q}{2}} = \Delta(Q+q) e^{\frac{Q}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{Q+q}{Q-q} e^{QL}} \oplus$$

$$\oplus \times \oplus \Rightarrow \frac{Q-q}{Q+q} e^{-QL} = \frac{Q+q}{Q-q} e^{QL} \Rightarrow \boxed{e^{-2QL} = \frac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2}}$$

το ίδιο είναι άτοπο

δίνω $\sqrt{e^{-2QL}} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{2QL}} < 1 \Leftrightarrow 1 < e^{2QL} \Leftrightarrow \ln 1 < 2QL \Leftrightarrow 0 < 2QL$
 που ίσχύει

ενώ $\frac{(Q+q)^2}{(Q-q)^2} > 1 \Leftrightarrow Q^2 + q^2 + 2Qq > Q^2 + q^2 - 2Qq \Leftrightarrow 4Qq > 0$
 που ίσχύει

δηλαδή δεν υπάρχει λύση στην ενεργειακή περιοχή ΚΑΤΩ

Ας δοκιμάσουμε στην ενεργειακή περιοχή ΜΕΣΩΝ

Για τις $\oplus \mu 1 \Rightarrow$

Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια κυματοσυναρτήσεων και πρώτων παραγώγων στα σύνορα $x = \pm L/2$ προκύπτει (δείτε σημειώσεις τις σχέσεις \boxtimes & \boxtimes)

$$\frac{(ik+q) e^{ikL}}{(ik-q)} = \frac{(ik-q) e^{-ikL}}{(ik+q)} \Rightarrow \boxed{e^{2ikL} = \frac{(ik-q)^2}{(ik+q)^2} = \frac{-k^2+q^2-2ikq}{-k^2+q^2+2ika}}$$

$$\boxed{\xi := \frac{kL}{2}} \quad \boxed{\eta := \frac{qL}{2}} \Rightarrow \xi^2 + \eta^2 = \frac{L^2}{4} \left(\frac{2m}{\hbar^2} (E+V_b) - \frac{2mE}{\hbar^2} \right) = \frac{L^2 2mV_b}{4\hbar^2} = \frac{mV_b L^2}{2\hbar^2} =: \alpha^2 \Rightarrow$$

= σταθερό, ανεξάρτητο της E κι έστω $\alpha > 0$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \boxed{\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2} \quad \boxed{-\xi^2 + \eta^2 = \beta^2}$$

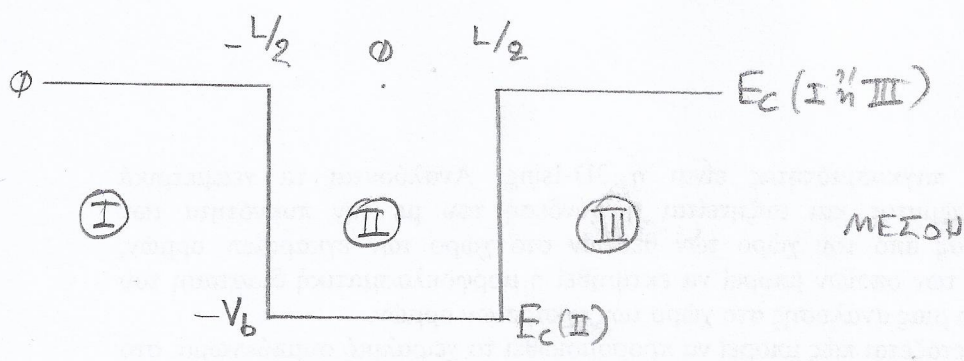
$$k = \frac{2\xi}{L} \quad q = \frac{2\eta}{L}$$

οπότε $\Lambda = \frac{-\xi^2 + \eta^2 - 2i\xi\eta}{-\xi^2 + \eta^2 + 2i\xi\eta} = \frac{\beta^2 - 2i\xi\eta}{\beta^2 + 2i\xi\eta} = \frac{(\beta^2 - 2i\xi\eta)^2}{(\beta^2 + 2i\xi\eta)(\beta^2 - 2i\xi\eta)} \Rightarrow$

$$\Lambda = \frac{\beta^4 - 4i\xi\eta\beta^2 - 4\xi^2\eta^2}{\beta^4 + 4\xi^2\eta^2} \Rightarrow e^{i4\xi} (\beta^4 + 4\xi^2\eta^2) = \beta^4 - 4i\xi\eta\beta^2 - 4\xi^2\eta^2$$

εν τώ μεταξύ $\beta^4 + 4\xi^2\eta^2 = (-\xi^2 + \eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2 = \xi^4 + \eta^4 - 2\xi^2\eta^2 + 4\xi^2\eta^2 = (\xi^2 + \eta^2)^2 = \alpha^4$

ΑΝΩ



$n \times \text{II GaAs}$
 $\text{I} \times \text{III Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$

ΜΕΣΩ

ΚΑΤΩ

$$E_c(\text{I} \text{ \& \; III}) - E_c(\text{II}) = V_b$$

Ένα κβαντικό φρέαρ εύρους L και βάθους V_b περιέχει

$$n = 1 + \text{Int} \left[\sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \right]$$

δέξιες ενεργειακές καταστάσεις ("σταθμίες").

$\text{Int}[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x .


ΑΣΚΗΣΗ

7

Θεωρήστε κβαρτινή ζελεία εκήματος ερδουχουτα παρλληλεπιδου με εσωτερικδ GaAs διασδσεων 8nm x 4nm x 4nm

και περιβλημα Al_xGa_{1-x}As με μοριακδ κδισμα x : V_b = 224meV.

Θεωρηστε καιδ προσεγγιση m* = m*(GaAs) = 0.067me.

- Ⓐ Ποσερ ενεργειακδσ σταθμερ εκει αυησ η κβαρτινη ζελεια; 
- Ⓑ Σε τι μηκος κυματου απτιστοιχη η μεταβαση απο ηη ΘΣ σην ηηΔΣ τη εν λογη κβαρτινη ζελειασ; Έσω εη μορηιτε λυση ηε μοσδλεισσε προσληγετα.
- Ⓒ Υποδδσε εη εκουμε για συλλογη απο ζελοιε κβαρτινη ζελειεσ με εια ηλεκτρονιο σην καθε μια και εη η στατιστικη Boltzmann με ιδια στατισικη βαρη περιγραφε την πιθανδτητα κεραιηψεωσ των ενεργειακδσ σταθμων.
Η θερμοκρασια εйна Ⓐ 4.2K η Ⓑ 300K
Ζυκρινετε τον αριθμδ των κβαρτινων ζελειων απο ηη ηλεκτρονιο βρικοιτα σην ΘΣ με τον αριθμδ των κβαρτινων ζελειων απο ηη ελεκτρονιο βρικοιτα σην ηηΔΣ
- Ⓓ Έσω εη η συλλογη κβ. ζελεων βρικοιτα ενασ καταλληλου ΗΜ πεδου Ζυκρινετε τον αριθμδ των κβ. ζελ. που σε χρόνο dt μεταβρουν απο ηη ΘΣ σην ηηΔΣ με εβαρτηνωμεη διαργαση dN_{1→2}^{ef} με τον αριθμδ των κβαρτινων που μεταβρουν σε χρόνο dt απο ηη ηηΔΣ σην ΘΣ με εβαρτηνωμεη διαργαση dN_{2→1}^{ef}.

Δινοιαται $\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J s}$

$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$

$k_B = 1.380 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$

↓ Ιδιο
πρωβλημα
με ο παρα κβ. ζελεια

για $L = 8 \text{ nm}$

$$\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2} \approx \frac{2 \cdot 0.067 \cdot 9 \cdot 109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 224 \cdot 10^{-3} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ eV} \cdot 64 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2}{(10) \cdot (1.054)^2 \cdot 10^{-68} \text{ J}^2 \text{ s}^2}$$

$$\approx 2523 \frac{10^{-31-3-19-18}}{10^{-68}} = 2523 \frac{10^{-71}}{10^{-68}} = 2.523$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \approx 1.59$$

$$\Rightarrow n = 1 + \text{Int}[1.59] = 2$$

για $L = 4 \text{ nm}$

$$\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2} \approx 0.63075 \Rightarrow \sqrt{\frac{2m^* V_b L^2}{\pi^2 \hbar^2}} \approx 0.79$$

$$\Rightarrow n = 1 + \text{Int}[0.79] = 1$$

Δηλαδή στο φρέαρ x χωράνε 2 στάθμες E_{1x}, E_{2x}
 στο φρέαρ y 1 στάθμη E_{1y}
 στο φρέαρ z 1 στάθμη E_{1z}

$$E_1 = E_{1x} + E_{1y} + E_{1z}$$

$$E_2 = E_{2x} + E_{1y} + E_{1z}$$

$$\Delta E = E_{2x} - E_{1x}$$

Ⓑ $h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{2x} - E_{1x} \Rightarrow \lambda = \dots$

Ⓒ
$$\left. \begin{aligned} N_j &= \frac{N_{0j}}{Z} e^{-\frac{E_j}{k_B T}} \\ N_i &= \frac{N_{0i}}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \end{aligned} \right\} \frac{N_j}{N_i} = e^{\frac{E_i - E_j}{k_B T}} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{E_1 - E_2}{k_B T}}$$

Ⓐ $dN_{1 \rightarrow 2}^{eS} = N_1 \cdot dW_{anop}^{eS} = N_1 \rho(\nu T) B_{12} dt$

$dN_{2 \rightarrow 1}^{eS} = N_2 \cdot dW_{exn}^{eS} = N_2 \rho(\nu T) B_{21} dt$

$$\frac{dN_{1 \rightarrow 2}^{eS}}{dN_{2 \rightarrow 1}^{eS}} = \frac{N_1}{N_2} = e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}$$

ΑΡΤΗΣ

$$\tan \xi = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi} \Rightarrow \xi = \dots = \xi_A$$

ΠΕΡΙΤΤΕΣ

$$\tan \xi = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \Rightarrow \xi = \dots = \xi_A$$

$$a^2 = \frac{m V_b L^2}{2 \hbar^2}$$

γνωσ

$$\xi = \frac{kL}{2}$$

↓
k

$$\frac{2m}{\hbar^2} (E + V_b) = k^2, k > 0$$

⇓
E