$$\boxed{\dot{C}_{k'}(t) = -\frac{i}{\hbar}\sum_k C_k(t)\, e^{i(\Omega_{k'}-\Omega_k)t}\, U_{\varepsilon k'k}(t)}$$

ΔΣ $\Omega := \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$

προσέγγιση διπόλου

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = \begin{cases} -\wp\,\mathcal{E}_0 \cos\omega t, & k \neq k' \\ \emptyset, & k = k' \end{cases}$$

$$\wp := \wp_{z12} = -eZ_{12} = -eZ_{21} = \wp_{z21}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0\,\hat{z}\cos\omega t$$

για $k'=1$, $k'=2$

$$\dot{C}_1(t) = i\Omega_R\, C_2(t)\, e^{-i\Omega t}\cos\omega t$$

$$\dot{C}_2(t) = i\Omega_R\, C_1(t)\, e^{i\Omega t}\cos\omega t$$

$\Omega_R := \frac{\wp\mathcal{E}_0}{\hbar}$ (άν $\wp > \emptyset$)

$\Omega_R := \frac{-\wp\mathcal{E}_0}{\hbar}$ (άν $\wp < \emptyset$)

ορίζεται πάντοτε θετική

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

RWA

$$\dot{C}_1(t) = i\Omega_R\, C_2(t)\, e^{i(\omega-\Omega)t}$$

$$\dot{C}_2(t) = i\Omega_R\, C_1(t)\, e^{-i(\omega-\Omega)t}$$

$\Delta := \omega - \Omega$ detuning

αποσυντονισμός

$$\dot{C}_1(t) = i\Omega_R\, e^{i\Delta t}\, C_2(t)$$

$$\dot{C}_2(t) = i\Omega_R\, e^{-i\Delta t}\, C_1(t)$$

ή

$$\begin{bmatrix}\dot{C}_1(t)\\ \dot{C}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\emptyset & i\Omega_R e^{i\Delta t}\\ i\Omega_R e^{-i\Delta t} & \emptyset\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1(t)\\ C_2(t)\end{bmatrix}$$

Το σύστημα λύνεται με πολλούς τρόπους

a μετασχηματισμός, μέθοδος ιδιοτιμών – ιδιοανυσμάτων

b επιπλέον παραγώγιση και χαρακτηριστικό πολυώνυμο

c προσεγγιστική μέθοδος Newton

d Νικόλαος Σούρλας

a

$$\left.\begin{aligned} C_1(t) &:= \mathcal{C}_1(t)\, e^{i\frac{\Delta}{2}t} \\ C_2(t) &:= \mathcal{C}_2(t)\, e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \end{aligned}\right\}\text{μετασχηματισμός}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathcal{C}}_1(t)\\ \dot{\mathcal{C}}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i\frac{\Delta}{2} & i\frac{\Omega_R}{2}\\ i\frac{\Omega_R}{2} & i\frac{\Delta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{C}_1(t)\\ \mathcal{C}_2(t)\end{bmatrix}$$

$\dot{\vec{x}}(t)$ $\quad \tilde{A} := -iA$ $\quad \vec{x}(t)$

$$\left.\begin{aligned} \text{ΔΔΜ}\ \vec{x}(t) &= \vec{u}\, e^{\tilde{\lambda}t} \\ \tilde{\lambda} &= -i\lambda \end{aligned}\right\}\quad A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

$$A\vec{u}=\lambda\vec{u} \qquad A=\begin{bmatrix}\frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2}\\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2}\end{bmatrix}$$

$\vec{u}_1$ ιδιοάνυσμα με ιδιοτιμή λ_1 μερική λύση $\vec{u}_1\, e^{-i\lambda_1 t}$

$\vec{u}_2$ ιδιοάνυσμα με ιδιοτιμή λ_2 μερική λύση $\vec{u}_2\, e^{-i\lambda_2 t}$

αν $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ γραμμικώς ανεξάρτητα η γενική λύση θα είναι

$$\boxed{\vec{x}(t)=\sum_{k=1}^{2}\sigma_k \vec{u}_k\, e^{-i\lambda_k t}}$$

από τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε τα σ_k

Εύρεση ιδιοτιμών

① $$\begin{bmatrix}\frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2}\\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_{2,1}=\pm\frac{\sqrt{\Omega_R^2+\Delta^2}}{2}$$

για $\Delta=0$ $\lambda_{2,1}=\pm\frac{\Omega_R}{2}$

ΛΥΣΗ για $\Delta=0$

$$\lambda_1=-\frac{\Omega_R}{2} \quad \dots \quad \vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=\frac{\Omega_R}{2} \quad \dots \quad \vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix}C_1(t)\\ C_2(t)\end{bmatrix}=\sigma_1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}e^{+i\frac{\Omega_R}{2}t}+\sigma_2\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}e^{-i\frac{\Omega_R}{2}t}=\begin{bmatrix}C_1(t)\cancelto{1}{e^{-i\frac{\Delta}{2}t}}\\ C_2(t)\cancelto{1}{e^{i\frac{\Delta}{2}t}}\end{bmatrix}$$

ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ $C_1(0)=1$, $C_2(0)=0$ $\doteq$ $C_1(0)=1$ $C_2(0)=0$

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}+\frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}\\ \frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}-\frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\Rightarrow \sigma_1=\sigma_2=\sigma=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C_1(t)=\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$

$$C_2(t)=i\sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right)$$