ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ της αλληλεπιδράσεως ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ — ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΗΜ ΠΕΔΙΟΥ

Στην ημικλασική προσέγγιση για το ΗΜ πεδίο χρησιμοποιούσαμε τη γλώσσα των ανυσματικών μεγεθών $\vec{E}, \vec{B}$.

Υποθέσαμε το πλάτος του $\vec{E}$ (και του $\vec{B}$) σταθερό:

η απορρόφηση ή η εκπομπή να μην επηρεάζει το πλάτος του πεδίου.

Για να ισχύει κάτι τέτοιο θα πρέπει η ΗΜ ακτινοβολία να είναι πυκνή.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων

Πρέπει να βρεθεί μια έκφραση της Χαμιλτονιανής του ΗΜ πεδίου που να επιτρέπει το μετασχηματισμό της στη γλώσσα του αριθμού των φωτονίων αντί της γλώσσας των $\vec{E}, \vec{B}$.

χρειαζόμαστε

- $\boxed{\hat{H}_{HM}}$
- $\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma}}$
- $\boxed{\hat{H}_{\Delta\Sigma - HM}}$

ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΣΠΙΝΟΡΕΣ

Σπίνορας (spinor) Σπίνωρ = διάνυσμα στήλη

για ΔΣ έχει 2 συνιστώσες $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

για ΤΣ έχει 3 συνιστώσες $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

<u>ορισμοί</u>

$$|\,\rangle = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} = |\emptyset\rangle$$
απουσία ηλεκτρονίου στο ΔΣ
ενέργεια μηδενική

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \circ \\ \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$
ηλεκτρόνιο στην κάτω στάθμη
ενέργεια E_1

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \end{pmatrix} = |2\rangle$$
ηλεκτρόνιο στην άνω στάθμη
ενέργεια E_2

> $A^\dagger$ ερμιτιανός συζυγής or Hermitian conjugate
> conjugate transpose or Hermitian transpose
> $(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji}$ † dagger στιλέτο

$$E_2 - E_1 = \hbar\Omega$$

$$\hat{S}_+ = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_- = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset \\ 1 & \emptyset \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_+^\dagger = \hat{S}_-$$

$$\hat{S}_+|\emptyset\rangle = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} = |\emptyset\rangle$$
καμία δράση $\quad \hat{S}_+|\emptyset\rangle = |\emptyset\rangle$

$$\hat{S}_+|1\rangle = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \emptyset \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \end{pmatrix} = |2\rangle$$
Το ανέβαζε $\quad \hat{S}_+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$

$$\hat{S}_+|2\rangle = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} = |\emptyset\rangle$$
Το πετάει έξω $\quad \hat{S}_+|\uparrow\rangle = |\emptyset\rangle$

$$\hat{S}_-|\emptyset\rangle = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset \\ 1 & \emptyset \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} = |\emptyset\rangle$$
καμία δράση $\quad \hat{S}_-|\emptyset\rangle = |\emptyset\rangle$

$$\hat{S}_-|1\rangle = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset \\ 1 & \emptyset \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \emptyset \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} = |\emptyset\rangle$$
Το πετάει έξω $\quad \hat{S}_-|1\rangle = |\emptyset\rangle$

$$\hat{S}_-|2\rangle = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset \\ 1 & \emptyset \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$
Το κατέβαζε $\quad \hat{S}_-|2\rangle = |1\rangle$

$\hat{S}_+$ Τελεστής αναβιβάσεως
raising operator

$\hat{S}_-$ Τελεστής καταβιβάσεως
lowering operator

Πίνακες Pauli — και σχέσεις τους με τους $\hat{S}_+, \hat{S}_-$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$ καθώς και οι κυκλικές εναλλαγές της

π.χ. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

$$\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\} = \{\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\} = \{\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{0}$$

Δηλαδή οι πίνακες Pauli αντιμετατίθενται.

π.χ. $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = \hat{0} \Rightarrow \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x$

$$\hat{\sigma}_y \cdot \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_y = \hat{0} \Rightarrow \hat{\sigma}_y \cdot \hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_y$$

$$\hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_z = \hat{0} \Rightarrow \hat{\sigma}_z \cdot \hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x \cdot \hat{\sigma}_z$$

π.χ. $$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I} \quad \text{ή} \quad \{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{I}$$

$$\hat{S}_+ \hat{S}_- - \hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_z \quad \text{ή} \quad [\hat{S}_+, \hat{S}_-] = \hat{\sigma}_z$$

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x$$

$$\hat{S}_+ - \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\hat{\sigma}_y$$

$$\hat{S}_+ + \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_x$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{S}_+ \hat{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{S}_- \hat{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots$$ μόλις τα είπαμε...

$$S_+\hat{S}_- + S_- S_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{I}}$$

Μπορούμε να το γράψουμε και στη μορφή $\{\hat{S}_+, \hat{S}_-\} = \hat{\mathbb{I}}$

$\{A,B\} = AB + BA$ άγκιστρο Poisson ή αντιμεταθέτης anticommutator

$[A,B] = AB - BA$ μεταθέτης commutator

όταν $\{A,B\} = 0 \Rightarrow AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA$ αντιμεταθετική ιδιότητα anticommutative property

όταν $[A,B] = 0 \Rightarrow AB - BA = 0 \Rightarrow AB = BA$ μεταθετική ιδιότητα commutative property

<u>Οι τελεστές καταστροφής–δημιουργίας / καταβιβάσεως–αναβιβάσεως</u>

σχέσεις αντιμεταθέσεως ακολουθούν των φερμιονίων π.χ. τα ηλεκτρόνια
anticommutative relations fermions electrons

σχέσεις μεταθέσεως ακολουθούν των μποζονίων π.χ. τα φωτόνια
commutative relations bosons photons

Η Χαμιλτονιανή του ΔΣ είναι

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+ = E_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$$

αφού

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = E_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ιδιοάνυσμα   ιδιοτιμή   ιδιοάνυσμα

$E_2 = E_1 + \hbar\Omega$

E_1

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_1 \end{pmatrix} = E_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ιδιοάνυσμα   ιδιοτιμή   ιδιοάνυσμα

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = E_2 \hat{S}_+ \hat{S}_- + E_1 \hat{S}_- \hat{S}_+$$

Αν θέσουμε $E_1 = 0 \Longrightarrow E_2 = \hbar\Omega$ γίνεται

$E_2 = \hbar\Omega$

E_1 μηδέν

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-$$

Αν θέσουμε

E_2

μηδέν $E_2 = +\frac{\hbar\Omega}{2}$ $E_1 = -\frac{\hbar\Omega}{2}$

E_1

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_+ \hat{S}_- - \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{S}_- \hat{S}_+ = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\Omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{\sigma}_z$ ή μορφή του $\hat{H}_{\Delta\Sigma}$ στο άρθρο των Jaynes–Cummings

Ὁ τελεστὴς $\hat{S}_+\hat{S}_-$ μετρᾶ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἠλεκτρονίων στὴν ΑΝΩ ΣΤΑΘΜΗ

ἀφοῦ

$$\hat{S}_+\hat{S}_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_+\hat{S}_-|\uparrow\rangle=1|\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_+\hat{S}_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_+\hat{S}_-|\downarrow\rangle=0|\downarrow\rangle$$

Ὁ τελεστὴς $\hat{S}_-\hat{S}_+$ μετρᾶ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἠλεκτρονίων στὴν ΚΑΤΩ ΣΤΑΘΜΗ

ἀφοῦ

$$\hat{S}_-\hat{S}_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_-\hat{S}_+|\uparrow\rangle=0|\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\qquad \hat{S}_-\hat{S}_+|\downarrow\rangle=1|\downarrow\rangle$$

ΑΛΛΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$\left(\hat{S}_+\right)^\dagger=\hat{S}_-$$

$$\{\hat{S}_+,\hat{S}_+^\dagger\}=\{\hat{S}_+,\hat{S}_-\}=\hat{S}_+\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_+=\hat{\mathbb{I}}$$

$$\{\hat{S}_-,\hat{S}_-^\dagger\}=\{\hat{S}_-,\hat{S}_+\}=\hat{S}_-\hat{S}_++\hat{S}_+\hat{S}_-=\hat{\mathbb{I}}$$

$$\{\hat{S}_+,\hat{S}_+\}=\hat{S}_+\hat{S}_++\hat{S}_+\hat{S}_+=2\hat{S}_+\hat{S}_+=2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}:=\hat{O}$$

$$\{\hat{S}_-,\hat{S}_-\}=\hat{S}_-\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_-=2\hat{S}_-\hat{S}_-$$

$$=2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\hat{O}$$

Ὁ $\hat{S}_+$ εἶναι <u>τελεστὴς ἀναβιβάσεως</u> (raising operator)
διότι ἀναβιβάζει τὸ ἠλεκτρόνιο
δημιουργώντας ἐνέργεια $\hbar\Omega$
ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία
<u>τελεστὴς δημιουργίας</u> (creation operator)

Ὁ $\hat{S}_-$ εἶναι <u>τελεστὴς καταβιβάσεως</u> (lowering operator)
διότι καταβιβάζει τὸ ἠλεκτρόνιο
καταστρέφοντας ἐνέργεια $\hbar\Omega$
ἐξ οὗ καὶ ἡ ὀνομασία
<u>τελεστὴς καταστροφῆς</u> (annihilation operator)

Ἐπειδὴ τὰ ἠλεκτρόνια εἶναι φερμιόνια,
ἰσχύει ἡ ἀπαγορευτικὴ ἀρχὴ τοῦ Pauli
δηλ. μποροῦμε νὰ ἔχουμε μόνο ἕνα ἠλεκτρόνιο με ἐνέργεια $\hbar\Omega$
(ἀγνοοῦμε τὸ spin σὲ ὅλο αὐτὸ τὸ μάθημα)

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΣΕΩΣ ΦΕΡΜΙΟΝΙΩΝ π.χ. ἠλεκτρονίων

$\hat{a}_i$ τελεστής καταστροφής φερμιονίου στην κατάσταση i

$\hat{a}_i^{\dagger}$ τελεστής δημιουργίας φερμιονίου στην κατάσταση i

Για τα φερμιόνια ἰσχύουν οἱ σχέσεις ἀντιμεταθέσεως

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}\} = \delta_{ij}$$

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^{\dagger}, \hat{a}_j^{\dagger}\} = 0$$

$$\{\hat{a}_i^{\dagger}, \hat{a}_j^{\dagger}\} = 0 \Rightarrow \{\hat{a}_r^{\dagger}, \hat{a}_r^{\dagger}\} = 0 \Rightarrow 2\hat{a}_r^{\dagger}\hat{a}_r^{\dagger} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\hat{a}_r^{\dagger}\hat{a}_r^{\dagger} = 0}}$$

Το ὁποῖο σημαίνει ὅτι δὲν μποροῦμε νὰ βάλουμε δύο φερμιόνια στην ἴδια κατάσταση, το ὁποῖο εἶναι ἡ ἀπαγορευτική ἀρχή Pauli.

συχνά καλεῖται τελεστής δημιουργίας στη Κβαντική Μηχανική
creation operator

Τελεστής ἀναβιβάσεως
raising operator

lowering operator
Τελεστής καταβιβάσεως

$\Big\}$ ladder operators
Τελεστές κλίμακας

γραμμική ἄλγεβρα
linear algebra

συχνά καλεῖται τελεστής καταστροφής στη Κβαντική Μηχανική
annihilation operator

Σε πολλές περιοχές τῆς Φυσικῆς κ τῆς Χημείας, ἡ χρήση αὐτῶν τῶν τελεστῶν ἀντί κυματοσυναρτήσεων λέγεται δεύτερη κβάντωση second quantization

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{άνω} \downarrow \text{κάτω}$$

αριστερά → δεξιά

$$\langle x| = (\alpha^* \ \ \beta^*)$$

ΔΣ

στοιχειώδεις διεγέρσεις από τη θεμελιώδη κατάσταση

elementary excitations from the ground state

$$|\downarrow\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \langle\downarrow| = \langle 1| = (0 \ \ 1)$$

$$\langle\downarrow|\downarrow\rangle = (0 \ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$|\uparrow\rangle = |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \langle\uparrow| = \langle 2| = (1 \ \ 0)$$

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = (1 \ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

μετά

$$\hat{a}_{12}^{+} := |\uparrow\rangle\langle\downarrow| = |2\rangle\langle 1| = \underset{2\times1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{1\times2}{(0 \ \ 1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_+$$

πρώτα

$$\hat{a}_{12} := |\downarrow\rangle\langle\uparrow| = |1\rangle\langle 2| = \underset{2\times1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{1\times2}{(1 \ \ 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_-$$

Άρα η Χαμιλτονιανή $\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_-$ γράφεται και

$$\hat{H}_{\Delta\Sigma} = \hbar\Omega\, \hat{a}_{12}^{+} \hat{a}_{12} = \hbar\Omega\, |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle\langle\uparrow| = \hbar\Omega\, |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$= \hbar\Omega\, |2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2| = \hbar\Omega\, |2\rangle\langle 2|$$

$$= \hbar\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0 \ 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \ 0) = \hbar\Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε τις εναλλακτικές γραφές $= \hbar\Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{H}_{\Delta\Sigma} &= \hbar\Omega \hat{S}_+ \hat{S}_- = \hbar\Omega\, \hat{a}_{12}^{+} \hat{a}_{12} = \hbar\Omega\, |\uparrow\rangle\langle\uparrow| = \hbar\Omega\, |2\rangle\langle 2| \\ &= \hbar\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1 \ 0) = \hbar\Omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

Γενικώς: $\boxed{\hat{a}_{\mu\nu} := |\mu\rangle\langle\nu| \iff \hat{a}_{\mu\nu}^{+} = |\nu\rangle\langle\mu|}$

$$\hat{a}_{12}^{+}|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle = \underset{2\times1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}\underset{1\times2}{\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}}\underset{2\times1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$

$$\hat{a}_{12}^{+}|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$

$$\hat{a}_{12}^{+}|0\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$$

εναλλακτικώς $= \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = |0\rangle$

$$\hat{a}_{12}|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \ldots = |\downarrow\rangle$$

$$\hat{a}_{12}|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \ldots = |0\rangle$$

$$\hat{a}_{12}|0\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|0\rangle = \ldots = |0\rangle$$

παρομοίως θα γράφαμε

$$\hat{a}_{21} := |2\rangle\langle1| = \hat{a}_{12}^{+}$$

$$\hat{a}_{21}^{+} := |1\rangle\langle2| = \hat{a}_{12}$$

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longrightarrow \langle x| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* & \gamma^* \end{pmatrix}$$

Γενικώς:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}_{\mu\nu} &= |\mu\rangle\langle\nu| \\ \hat{a}^{+}_{\mu\nu} &= |\nu\rangle\langle\mu| \end{aligned}}$$

στοιχειώδεις διεγέρσεις από τη θεμελιώδη κατάσταση

elementary excitations from the ground state

$$\hat{a}^{+}_{12} := |2\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12} := |1\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13} := |3\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13} := |1\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{12}|1\rangle = |2\rangle\langle 1|1\rangle = |2\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}|2\rangle = |1\rangle\langle 2|2\rangle = |1\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13}|1\rangle = |3\rangle\langle 1|1\rangle = |3\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}|3\rangle = |1\rangle\langle 3|3\rangle = |1\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}_{13}|3\rangle = |3\rangle\langle 1|3\rangle = |0\rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}^{+}|3\rangle = |2\rangle\langle 1|3\rangle = |2\rangle \cdot 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{12}|3\rangle = |1\rangle\langle 2|3\rangle = |1\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}^{+}|2\rangle = |3\rangle\langle 1|2\rangle = |3\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_{13}|2\rangle = |1\rangle\langle 3|2\rangle = |1\rangle 0 = |0\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{H}_{TI} = \hbar\Omega_{12}\,\hat{a}^{\dagger}_{12}\hat{a}_{12} + \hbar\Omega_{13}\,\hat{a}^{\dagger}_{13}\hat{a}_{13}}$$

$$= \hbar\Omega_{12}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} + \hbar\Omega_{13}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$= \hbar\Omega_{12}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \hbar\Omega_{13}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\hbar\Omega_{13}&0&0\\0&\hbar\Omega_{12}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{H}_{TI} &= \hbar\Omega_{12}|2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2| + \hbar\Omega_{13}|3\rangle\langle 1|1\rangle\langle 3|\\ &= \hbar\Omega_{12}|2\rangle\langle 2| + \hbar\Omega_{13}|3\rangle\langle 3|\end{aligned}}$$

$$\hat{a}_{23} = |2\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(1\;0\;0) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{a}_{23}|3\rangle = |2\rangle$$

$$\hat{a}^{\dagger}_{23} = |3\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(0\;1\;0) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{a}^{\dagger}_{23}|2\rangle = |3\rangle$$

$$\hat{a}_{21} = |2\rangle\langle 1| = \hat{a}^{\dagger}_{12} \qquad \hat{a}_{31} = |3\rangle\langle 1| = \hat{a}^{\dagger}_{13}$$

$$\hat{a}^{\dagger}_{21} = |1\rangle\langle 2| = \hat{a}_{12} \qquad \hat{a}^{\dagger}_{31} = |1\rangle\langle 3| = \hat{a}_{13}$$

$$\hat{a}_{32} = |3\rangle\langle 2| = \hat{a}^{\dagger}_{23}$$

$$\hat{a}^{\dagger}_{32} = |2\rangle\langle 3| = \hat{a}_{23}$$