5.8 Μορφή του TEM_{00} και των $TEM_{p'q'}$ ανώτερης τάξεως σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη και σε κυλινδρική κοιλότητα.

Συχνά στην ονοματολογία χρησιμοποιούνται αντί των δεικτών p, q οι δείκτες p', q' οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

Σε **ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα** οι δείκτες στο $TEM_{p'q'}$ σημαίνουν:
p' = ο αριθμός κόμβων κατά μήκος του άξονα x.
q' = ο αριθμός κόμβων κατά μήκος του άξονα y.
Επί παραδείγματι, TEM_{02} σημαίνει κανένας κόμβος κατά μήκος του άξονα x και δύο κόμβοι κατά μήκος του άξονα y. Η ένταση ΗΜ ακτινοβολίας του $TEM_{p'q'}$ τρόπου σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι [39]

$$I_{p'q'}(x,y) = I_0 \left[H_{p'}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) e^{-\frac{x^2}{w^2}} \right]^2 \left[H_{q'}\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) e^{-\frac{y^2}{w^2}} \right]^2 \tag{5.84}$$

Αριστερά στον Πίνακα 5.2 φαίνονται τα πολυώνυμα Hermite $H_n(x)$ που εμπλέκονται στην Εξ. 5.84, ενώ w είναι το FWHM μέγεθος της κηλίδας (spot size) του θεμελιώδους τρόπου TEM_{00}. Η μορφή των TEM που προκύπτει από την Εξ. 5.84 παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.12, αριστερά. Οι τρόποι ανώτερης τάξεως έχουν μεγαλύτερη χωρική έκταση. Οπότε, με χρήση μιας οπής (aperture) που παρεμβάλλεται στην έξοδο του laser μπορούμε να κόψουμε εκείνους τους τρόπους που έχουν μεγαλύτερη από την επιθυμητή έκταση. Γενικώς, η συνολική μορφή της εντάσεως ακτινοβολίας οφείλεται στην υπέρθεση όλων των τρόπων της κοιλότητας, παρόλο που συχνά είναι επιθυμητό να λειτουργούμε μόνο στον θεμελιώδη τρόπο.

Σε **κυλινδρική κοιλότητα** οι δείκτες στο $TEM_{p'q'}$ σημαίνουν:
p' = ο αριθμός κόμβων ακτινικά.
q' = ο αριθμός κόμβων κατά μήκος μισής περιφέρειας, δηλαδή γωνιακά σε γωνία π.
Επί παραδείγματι, TEM_{02} σημαίνει κανένας κόμβος ακτινικά και δύο κατά μήκος μισής περιφέρειας, δηλαδή γωνιακά σε γωνία π. Η ένταση ΗΜ ακτινοβολίας του $TEM_{p'q'}$ τρόπου σε πολικές συντεταγμένες (r, φ) είναι [39]

$$I_{p'q'}(\rho,\varphi) = I_0 \rho^{q'} \left[L_{p'}^{q'}(\rho) \right]^2 \cos^2(q'\varphi) e^{-\rho} \tag{5.85}$$

όπου $\rho = 2r^2/w^2$, w είναι το FWHM μέγεθος κηλίδας του θεμελιώδους τρόπου TEM_{00} ο οποίος συμπίπτει με τον TEM_{00} της ορθογώνιας παραλληλεπίπεδης κοιλότητας και $L_{p'}^{q'}$ είναι το συσχετισμένο πολυώνυμο Laguerre τάξεως p' και δείκτη q'. Δεξιά στον Πίνακα 5.2 εμφανίζονται τα πολυώνυμα Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right), \tag{5.86}$$

από τα οποία κατασκευάζονται τα γενικευμένα ή συσχετισμένα πολυώνυμα Laguerre (generalized Laguerre polynomials or associated Laguerre polynomials) $L_n^a(x)$ που εμπλέκονται στην Εξ. 5.85. Τα πολυώνυμα Laguerre είναι η ειδική περίπτωση για $a = 0$ των γενικευμένων ή συσχετισμένων πολυωνύμων Laguerre. Δηλαδή

$$L_n^0(x) = L_n(x). \tag{5.87}$$

$$L_n^a(x) = \frac{x^{-a}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+a}\right). \tag{5.88}$$

Η μορφή των ΤΕΜ που προκύπτει από την Εξ. 5.85 παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.12, δεξιά.

Συνοπτικά, η μορφή της εντάσεως ΗΜ ακτινοβολίας I των εγκαρσίων τρόπων $\mathrm{TEM}_{p'q'}$ σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη (αριστερά) και σε κυλινδρική (δεξιά) κοιλότητα παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.12. Στον Πίνακα 5.2 ταξινομούνται τα πρώτα πολυώνυμα Hermite που σχετίζονται με την ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα (αριστερά) και τα πρώτα πολυώνυμα Laguerre που σχετίζονται με την κυλινδρική κοιλότητα (δεξιά).

πολυώνυμα Hermite	πολυώνυμα Laguerre
$H_0(x) = 1$	$L_0(x) = 1$
$H_1(x) = 2x$	$L_1(x) = -x + 1$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$	$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$	$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$	$L_4(x) = \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$
...	...

Πίνακας 5.2: Τα πρώτα πολυώνυμα Hermite που σχετίζονται με την ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κοιλότητα και τα πρώτα πολυώνυμα Laguerre που σχετίζονται με την κυλινδρική κοιλότητα.

TEM_{00} και $TEM_{p'q'}$ ανωτέρας τάξεως

σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδη κ σε κυλινδρική κοιλότητα

Συχνά στην ονοματολογία χρησιμοποιούνται, αντί των δεικτών p, q, οι δείκτες p', q', οι όποιοι ορίζονται ως

ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΗ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ $p' = \#$ κόμβων κατά μήκος του άξονα x
$q' = \#$ κόμβων κατά μήκος του άξονα y

π.χ. TEM_{02}

ένταση ακτινοβολίας $$I_{p'q'}(x,y) = I_0 \left[H_{p'}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{w}\right) e^{-\frac{x^2}{w^2}} \right]^2 \cdot \left[H_{q'}\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{w}\right) e^{-\frac{y^2}{w^2}} \right]^2$$

$H_m(x)$ πολυώνυμα Hermite

w = το FWHM μέγεθος της κηλίδας του TEM_{00} (spot size)

Οι τρόποι ανωτέρας τάξεων έχουν μεγαλύτερη έκταση.
Οπότε, με χρήση οπής (aperture) που παρεμβάλεται στην έξοδο του laser μπορούμε να κόψουμε εκείνους τους τρόπους που έχουν έκταση μεγαλύτερη της επιθυμητής.

Γενικώς, η συνολική μορφή της $I = \sum_{p',q'} I_{p'q'}$

σε όσα p', q' επιτρέψουμε με την aperture

πολυώνυμα Hermite

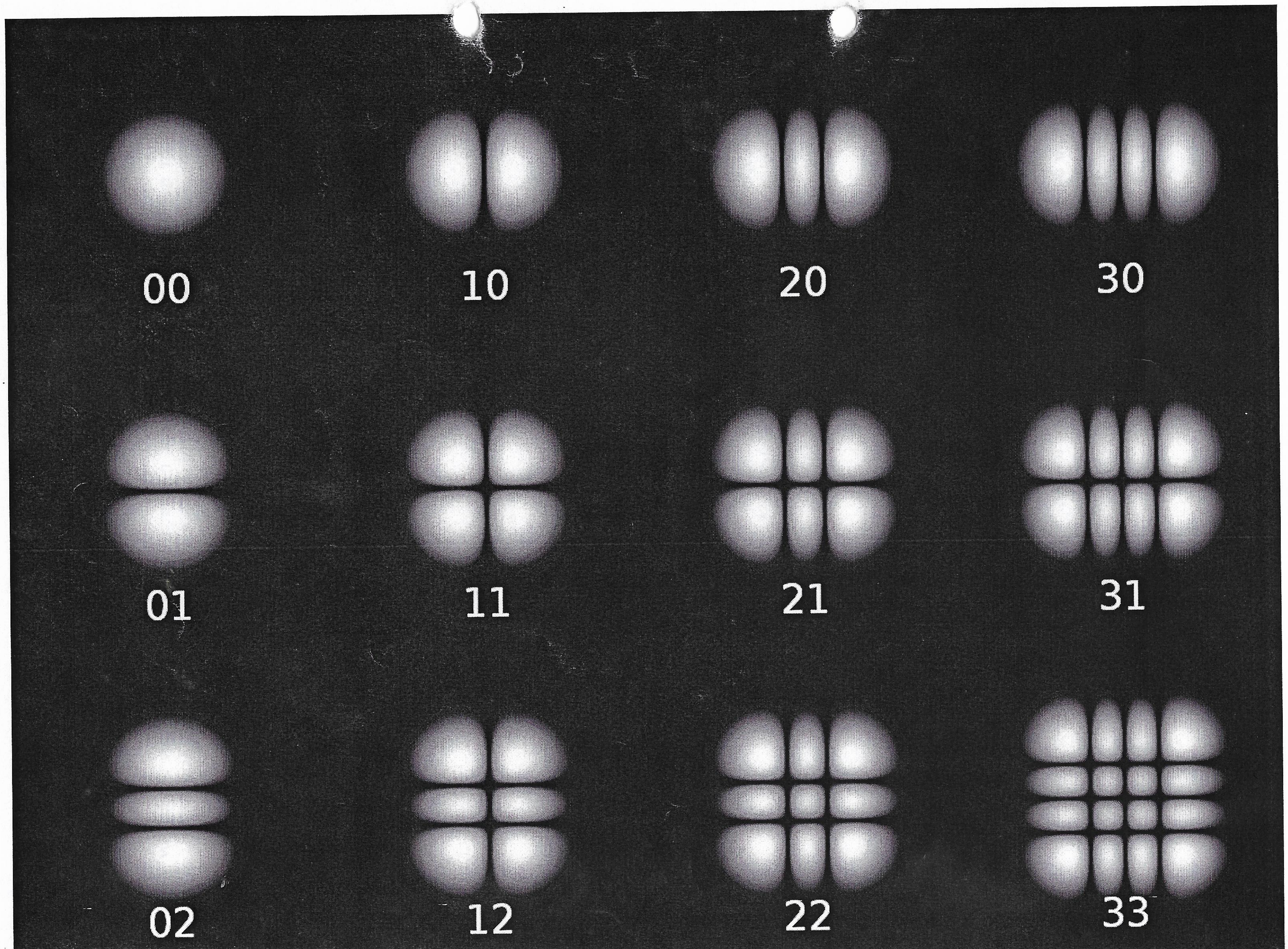
$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = 2x$

$H_2(x) = 4x^2 - 2$

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$

$\vdots$


00
10
20
30
01
11
21
31
02
12
22
33

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ

$p' = \#$ κόμβων ακτινικά

$q' = \#$ κόμβων κατά μήκος μισής περιφέρειας
δηλ. γωνιακά, σε γωνία π.

π.χ TEM_{02} . . .

$$I_{p'q'}(\rho, \varphi) = I_0 \, \rho^{q'} \left[L_{p'}^{q'}(\rho) \right]^2 \cos^2(q'\varphi) \, e^{-\rho}$$

$$\rho = \frac{2r^2}{w^2}$$

$w =$ το FWHM μέγεθος της κηλίδας του TEM_{00} (spot size)

$\equiv w$ (ορθογ. παραλ. κοιλότητας)

$L_{p'}^{q'}$ συσχετισμένο πολυώνυμο Laguerre τάξεως p' και δείκτη q'

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n \right)$$ πολυώνυμα Laguerre

$$L_n^0(x) = L_n(x)$$

$$L_n^a(x) = \frac{x^{-a} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+a} \right)$$

πολυώνυμα Laguerre

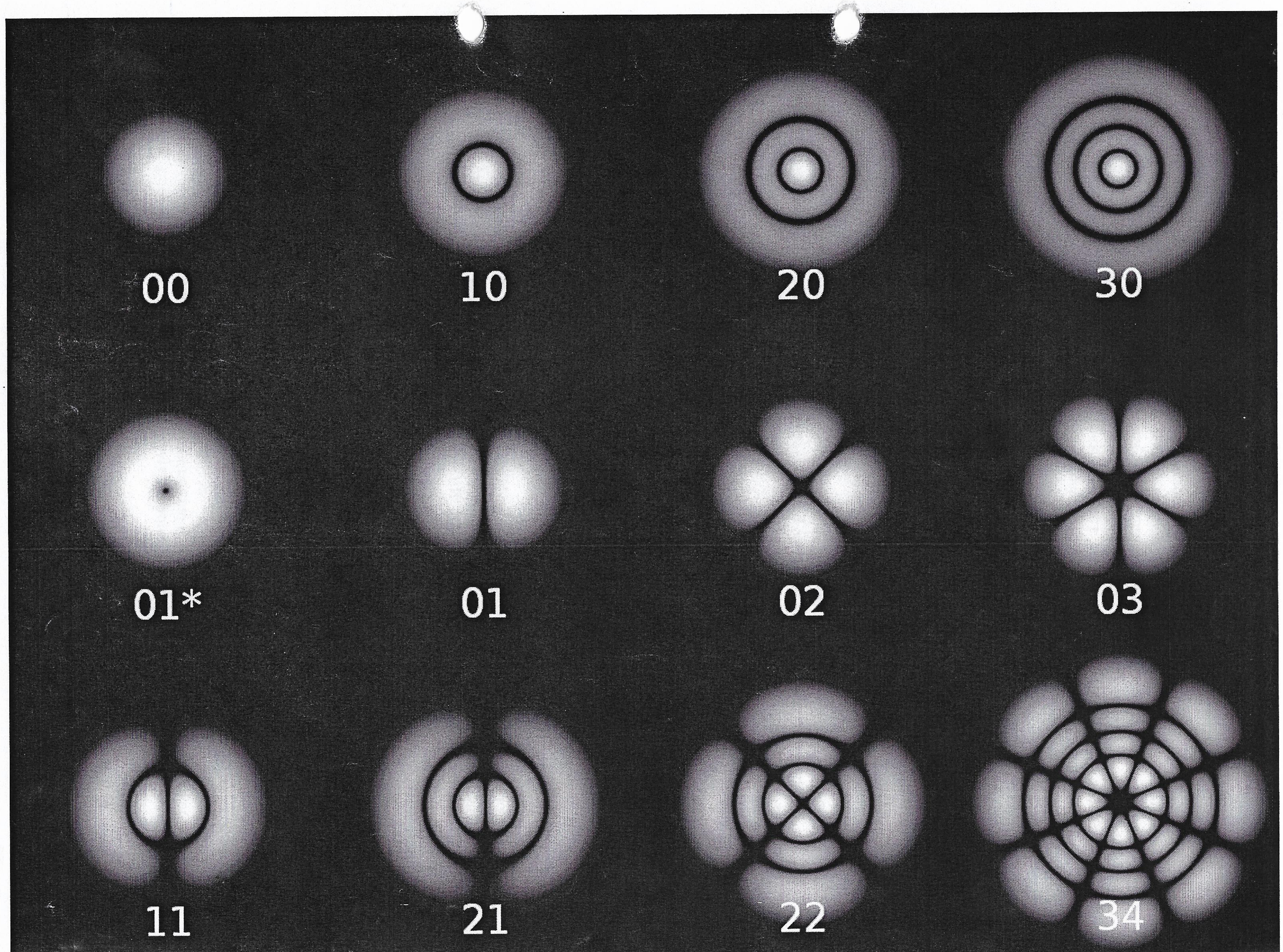
$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = -x + 1$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 - 4x + 2 \right)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6} \left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \right)$$

. . .


00
10
20
30
01*
01
02
03
11
21
22
34