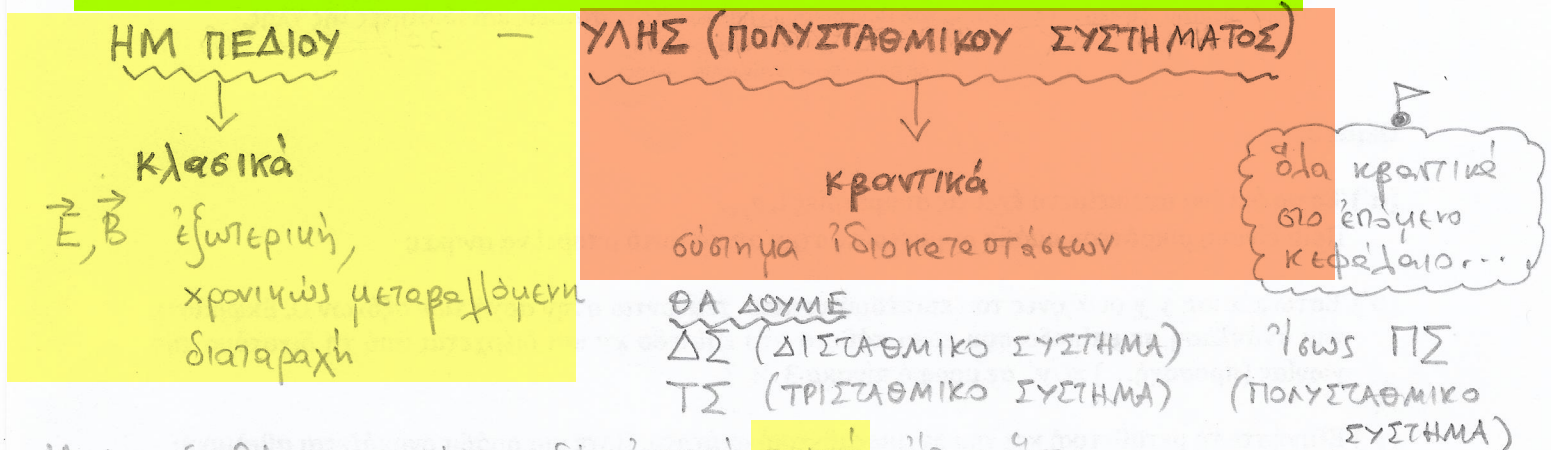


ΗΜΙΚΛΑΣΙΚΗ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΗΣ \hbar | ΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ



Ήως ΠΣ (ΠΟΛΥΣΤΑΘΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

Άκόμα υποθέτουμε: ΗΜ πεδίο αρκετά πυκνό ούτως ώστε
 ή απορρόφηση ή ή έκπομπη ενός φωτονίου από το υπό μελέτη δισταθμικό σύστημα να μην μπορεί να επηρεάσει αίσθητά τέ ηλότι του ηλεκτρικού κ μαγνητικού πεδίου του κύματος

Αν μας ενδιαφέρει ή διακυμανοση τή πυκνότητα τῶ ΗΜ πεδίου θα πρέπει να εχρησιμοποιήσουμε την ήμικλαστική πρόβέχσιση

ΑΔΙΑΤΑΡΑΚΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ \Rightarrow ΧΩΡΙΣ ΗΜ ΠΕΔΙΟ
 ΔΙΑΤΑΡΑΓΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ \Rightarrow ΜΕ ΗΜ ΠΕΔΙΟ

ΑΔΙΑΤΑΡΑΚΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (έκτός ΗΜ πεδίου)

$\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2m_e} + U(\vec{r})$

π.χ. @ άτομο του Υδρογόνου $U(\vec{r}) = (-e) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

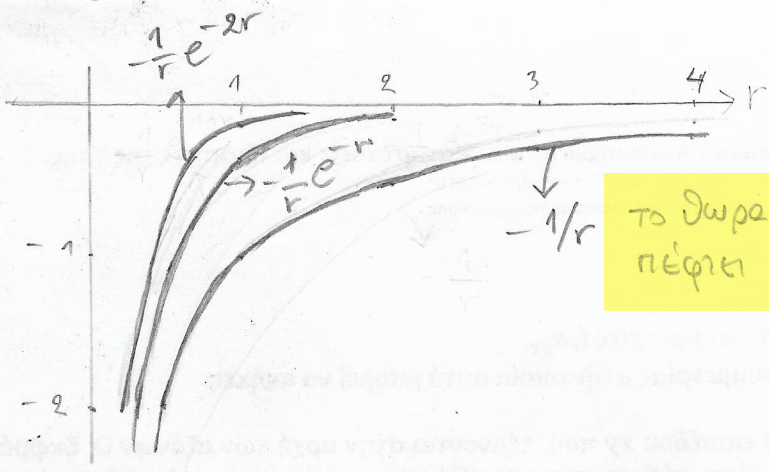
π.χ. @ πολυηλεκτρονικό άτομο $U(\vec{r}) = (-e) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{r} = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

π.χ. θωρακισμένη (screened) μορφή τῆς δυναμικῆς ἐνέργειας $U(\vec{r}) = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-k_0 r}$ κεντρικά δυναμικά

Γενικότερα το δυναμικό Coulomb ἔχει τη μορφή $V(\vec{r}) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} = V(r)$
 ἐνώ το θωρακισμένο δυναμικό Coulomb $\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-k_0 r} = V(r)$

(\hbar ή \hbar κ λέγεται Thomas-Fermi δυναμικό ή Yukawa δυναμικό)

$k_0 :=$ τῆχος τῶς παρῶγοτα ἀποσβέσεως ή κυματάωση Thomas-Fermi



το θωρακισμένο δυναμικό πέφτει πιο γρήγορα...

ΧΜ $\Psi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}) T(t)$

$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}_0 \Psi(\vec{r}, t)$

$i\hbar \Phi(\vec{r}) \frac{dT(t)}{dt} = T(t) \hat{H}_0 \Phi(\vec{r})$

αν $T(t) \neq 0$ ή $\Phi(\vec{r}) = 0$ ικανοποιείται

αν $T(t) \neq 0$ και $\Phi(\vec{r}) \neq 0 \rightsquigarrow \underbrace{\frac{i\hbar}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt}}_{f_1(t)} = \underbrace{\frac{\hat{H}_0 \Phi(\vec{r})}{\Phi(\vec{r})}}_{f_2(\vec{r})} := E$ (σταθερά)

για να ισχύει $\forall t, \forall \vec{r}$

① $\hat{H}_0 \Phi(\vec{r}) = E \Phi(\vec{r})$ ξήλωσι ιδιοτιμών, έν γενει διακριτές, δε θάρχει κάποιος συλλογικός κβατικός αριθμός k π.χ. στο άζωτο τοδ υδρογόνου $k = \{n, l, m, \ell\}$

$\hat{H}_0 \Phi_k(\vec{r}) = E_k \Phi_k(\vec{r})$ $E_k := \hbar \Omega_k$

$\Phi_k(\vec{r})$ έστω όρδοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις

② $\frac{dT}{T} = \frac{E dt}{i\hbar} \Rightarrow \ln T = \frac{E t}{i\hbar} + c \Rightarrow T(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^c \Rightarrow T(t) = \mathcal{N} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

σταθερά κανονικοποίησης

Συνολικό αποτέλεσμα $\Psi_k(\vec{r}, t) = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar} E_k t} \Phi_k(\vec{r})$

επιλέξουμε $\Phi_k(\vec{r})$ όρδοκανονικές

αν απαιτήσουμε $\int dV |\Psi_k(\vec{r})|^2 = 1 \Rightarrow |\mathcal{N}|^2 \int dV |\Phi_k(\vec{r})|^2 = 1 \Rightarrow |\mathcal{N}|^2 = 1$

$dV := d^3r$
στοιχειώδη όγκος

ΔΙΑΤΑΡΑΓΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (έντος ΗΜ πεδίου)

χρονικά εξαρτημένη δυναμική διαταραχή 1

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + U_\varepsilon(\vec{r}, t) \quad \textcircled{1}$$

δυναμική ενέργεια της διαταραχής (μικρή σε σχέση με \hat{H}_0)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t) \quad \textcircled{2}$$

με αρχική συνθήκη

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \Phi(\vec{r}) = \text{γνωστή}$$

Υποθέτουμε ότι μπορούμε να αναπτύξουμε τις $\Psi(\vec{r}, t)$ και $\Psi(\vec{r}, 0) = \Phi(\vec{r})$ στη βάση των ιδιοσυναρτήσεων του αδιαταραγμένου προβλήματος $\{\Phi_k(\vec{r})\}$

$$\hat{H}_0 \Phi_k(\vec{r}) = E_k \Phi_k(\vec{r})$$

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_k f_k \Phi_k(\vec{r})$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) \quad \textcircled{3}$$

$$E_k := \hbar \Omega_k$$

$$\Rightarrow C_k(0) = f_k$$

①②③ \Rightarrow

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) = [\hat{H}_0 + U_\varepsilon(\vec{r}, t)] \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r})$$

$$\hat{A} i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r}) + \sum_k C_k(t) E_k e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r})$$

$$\hat{A}' = \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} E_k \Phi_k(\vec{r}) + U_\varepsilon(\vec{r}, t) \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \Phi_k(\vec{r})$$

Ξημ $\int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \dots$ δηλ. εσωτερικό γινόμενο \dots

$$\Rightarrow i\hbar \sum_k \dot{C}_k(t) e^{-i\Omega_k t} \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \Phi_k(\vec{r}) = \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) U_\varepsilon(\vec{r}, t) \Phi_k(\vec{r})$$

$$\Rightarrow i\hbar \dot{C}_{k'}(t) e^{-i\Omega_{k'} t} = \sum_k C_k(t) e^{-i\Omega_k t} U_{\varepsilon k'k}(t)$$

$$:= U_{\varepsilon k'k}(t)$$

$$= \langle \Phi_{k'} | U_\varepsilon(\vec{r}, t) | \Phi_k \rangle$$

$$\dot{C}_{k'}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_k C_k(t) e^{i(\Omega_{k'} - \Omega_k)t} U_{\varepsilon k'k}(t)$$

στοιχεία πίνακα της δυναμικής ενέργειας της διαταραχής

Γενικά, για ομογενή φασική μέγεθος M , ορίζουμε τα στοιχεία πίνακά του ως

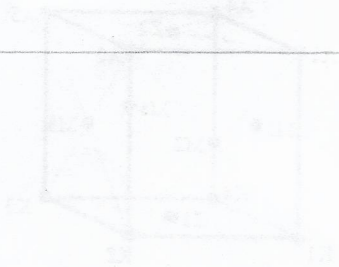
$$M_{k'k} := \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) \hat{M}(\vec{r}, -i\hbar\vec{\nabla}) \Phi_k(\vec{r}) = \langle \Phi_{k'} | \hat{M} | \Phi_k \rangle$$

$|\psi\rangle$ ket
 $\langle\phi|$ bra
καμπύριος συμβολισμός

π.κ. $\langle\vec{r}|\psi\rangle = \psi(\vec{r})$ $\langle\psi|\vec{r}\rangle = \psi(\vec{r})^*$

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int d^3r \phi(\vec{r})^* \psi(\vec{r})$$

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle = \int d^3r \phi(\vec{r})^* \hat{A}(\vec{r}, -i\hbar\vec{\nabla}) \psi(\vec{r})$$



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΝΑΚΑ ΤΕΛΕΣΤΗ

ΔΗΛΑΔΗ

$$\langle \vec{r} | \phi \rangle = \phi(\vec{r})$$

$$\langle \psi | \vec{r} \rangle = \psi(\vec{r})^*$$

Σχέση πληρότητας
 $\int dx |x\rangle \langle x| = 1$

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{M} | \phi \rangle &= \int dx'' \int dx' \langle \psi | x'' \rangle \langle x'' | \hat{M} | x' \rangle \langle x' | \phi \rangle \\ &= \int dx'' \int dx' \psi(x'')^* \langle x'' | \hat{M} | x' \rangle \phi(x') \end{aligned}$$

$$\langle x'' | \hat{x} | x' \rangle = \langle x'' | x' | x' \rangle = x' \langle x'' | x' \rangle = x' \delta(x'' - x') = x'' \delta(x'' - x')$$

$$\langle x'' | \hat{p} | x' \rangle = \dots \text{ αποδεικνύεται } \nabla \dots = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x''} \delta(x'' - x')$$

\Rightarrow (ανάγωσσοι σε συναμεις του \hat{x} και του \hat{p})

$$\langle x'' | \hat{M} | x' \rangle = M(x'', -i\hbar \frac{\partial}{\partial x''}) \delta(x'' - x') \quad 1\Delta$$

$$\langle \vec{r}'' | \hat{M} | \vec{r}' \rangle = M(\vec{r}'', -i\hbar \vec{\nabla}'') \delta(\vec{r}'' - \vec{r}') \quad 3\Delta$$

Όπότε $\langle \Phi_\ell | \hat{M} | \Phi_k \rangle = \int d^3r'' \int d^3r' \langle \Phi_\ell | \vec{r}'' \rangle \langle \vec{r}'' | \hat{M} | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \Phi_k \rangle$

$$\begin{aligned} &= \int d^3r'' \int d^3r' \Phi_\ell(\vec{r}'')^* M(\vec{r}'', -i\hbar \vec{\nabla}'') \delta(\vec{r}'' - \vec{r}') \Phi_k(\vec{r}') \\ &= \int d^3r'' \Phi_\ell(\vec{r}'')^* M(\vec{r}'', -i\hbar \vec{\nabla}'') \Phi_k(\vec{r}'') \\ &\stackrel{ii}{=} \int d^3r \Phi_\ell(\vec{r})^* M(\vec{r}, -i\hbar \vec{\nabla}) \Phi_k(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \Leftrightarrow \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \quad \text{και} \quad \langle x'' | \quad \text{και} \quad |x'\rangle$$

$$\langle x'' | \hat{x}\hat{p} |x'\rangle - \langle x'' | \hat{p}\hat{x} |x'\rangle = i\hbar \langle x'' |x'\rangle$$

$$\langle x'' | x'' \hat{p} |x'\rangle - \langle x'' | \hat{p} x' |x'\rangle = i\hbar \langle x'' |x'\rangle$$

$$x'' \langle x'' | \hat{p} |x'\rangle - x' \langle x'' | \hat{p} |x'\rangle = i\hbar \delta(x'' - x')$$

$$(x'' - x') \langle x'' | \hat{p} |x'\rangle = i\hbar \delta(x'' - x')$$

$$\textcircled{\blacktriangledown} \delta(x'' - x') = - (x'' - x') \frac{\partial}{\partial x''} \delta(x'' - x')$$

$$\cancel{(x'' - x')} \langle x'' | \hat{p} |x'\rangle = i\hbar (-1) \cancel{(x'' - x')} \frac{\partial}{\partial x''} \delta(x'' - x') \Rightarrow$$

$$\langle x'' | \hat{p} |x'\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x''} \delta(x'' - x')$$

$$\textcircled{\blacktriangledown} \text{Θα αποδείξουμε πρώτα ότι} \quad x \delta'(x) = -\delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \delta'(x) f(x) = x f(x) \delta(x) - \int dx \delta(x) (x f(x))' =$$

$$= x f(x) \delta(x) - \int dx \delta(x) (f(x) + x f'(x))$$

$$= x f(x) \delta(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) f(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) x f'(x)$$

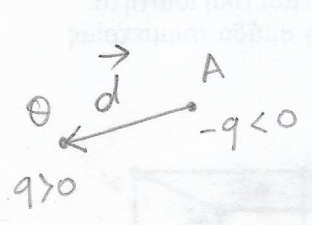
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) f(x)$$

Επειδή $\int dV |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = 1 \Leftrightarrow \int dV \Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) = 1$

$\Rightarrow \int dV \sum_k G_k^*(t) e^{+i\Omega_k t} \Phi_k^*(\vec{r}) \sum_{k'} G_{k'}(t) e^{-i\Omega_{k'} t} \Phi_{k'}(\vec{r}) = 1$

$\Rightarrow \sum_k \sum_{k'} e^{i(\Omega_k - \Omega_{k'})t} G_k^*(t) G_{k'}(t) \int dV \Phi_k^*(\vec{r}) \Phi_{k'}(\vec{r}) = 1$

$\Rightarrow \sum_k |G_k(t)|^2 = 1 \Rightarrow \sum_k |G_k(0)|^2 = 1 \Rightarrow \sum_k |f_k|^2 = 1$

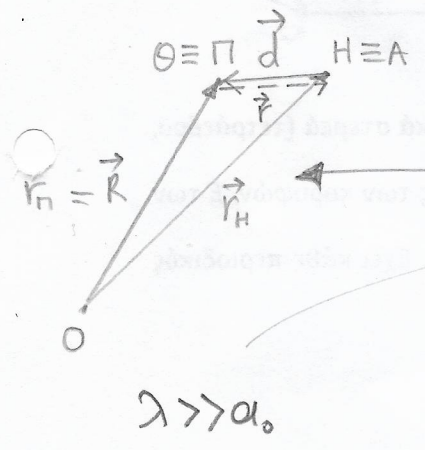


$\vec{d} = A\vec{\theta}$

$\vec{p} := q\vec{d}$
ηλεκτρική διπολική ροπή
electric dipole moment

Έστω "Ατομο Υδρογόνου"

ΥΠΟΘΕΣΗ $\lambda \gg$ μέγεθος τῶν δὲ μελέτη συστήματος



$\vec{p} := q\vec{d} = e(-\vec{r}) = -e\vec{r}$

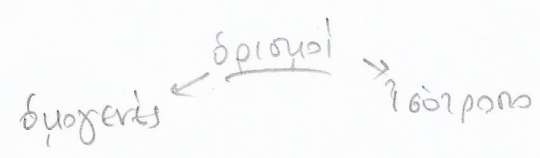
$|\vec{r}| \sim a_0$ τῆς τάξεως τῆς ἀκτίνου Bohr
 $a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$\frac{\lambda}{a_0} \approx \frac{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{0.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 10^4$

π.χ ὀπτικά μήκη κυμάτων
 $\lambda \approx 500 \text{ nm}$

Άρα στις παρούσες συνθήκες το ηλεκτρικό πεδίο είναι **πρακτικά ομογενές!**

στο χώρο που καλύπτει τὸ σύστημα μας (ἔσω ἄτομο)



As περιορισόμε σε δυνάμεις στο ηλεκτρόνιο, οι οποίες προέρχονται από το ηλεκτρικό δεδεμένο, μονοχρωματικού και πολυμένου ΗΜ κύματος. πεδίο

$$\vec{E} = \vec{E}_a \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r}_H - \omega t + \phi)]$$

καθορίζει
την πόλωση

$\omega = 2\pi\nu$
↓
κυκλική
συχνότητα

↓
συχνότητα

\vec{k} : κυματόσσημα
με μέτρο $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
 λ : μήκος κύματος

ϕ : αθροισμ φάση

$$\vec{r}_H \approx \vec{R}$$

για την κλίμακα μεγέθους που γαί αφορά εδώ.

$$\frac{\lambda}{a_0} \approx 10^4 \Rightarrow \lambda \gg a_0 \sim |\vec{r}|$$

Δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι πρακτικά δμογενές

$$\vec{E} \approx \vec{E}_a \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t + \phi)] = \underbrace{\vec{E}_a \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{R} + \phi)]}_{:= \vec{E}_0} \cdot \exp(-i\omega t)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \exp(-i\omega t) = \vec{E}(t)$$

Δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο έχει πρακτικά μόνο χρονική εξάρτησι

$V(\vec{r}, t)$ δυναμικό

$U(\vec{r}, t)$ δυναμική ενέργεια

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} \quad \left. \vphantom{dV} \right\} \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}, t) - V(\vec{0}, t) = -\vec{E} \cdot \vec{r} \Rightarrow V(\vec{r}, t) = -\vec{E} \cdot \vec{r}$$

↓
δένουμε μηδέν

$$\Rightarrow U(\vec{r}, t) = e \vec{E} \cdot \vec{r} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Το σύνολο των υποθέσεων, οι οποίες οδήγησαν στη δυναμική ενέργεια της διαταραχής της μορφής αυτής, ονομάζεται προέγγιση διπόλου (dipole approximation)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t) = \vec{E}(t)$$

θεωρώντας $\vec{E}_0 \parallel \hat{z}$ και παίρνοντας το πραγματικό μέρος $\cos \omega t$

$$\vec{E} = E_0 \hat{z} \cos \omega t$$

Άρα $U_{\varepsilon} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -(-e\vec{r}) \cdot E_0 \hat{z} \cos \omega t = e E_0 z \cos \omega t$

$$U_{\varepsilon} = e E_0 z \cos \omega t$$

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) e E_0 z \cos \omega t \Phi_k(\vec{r}) \Rightarrow$$

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = e E_0 \cos \omega t \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r}) = e E_0 \cos \omega t Z_{k'k}$$

$$:= Z_{k'k}$$

τα $Z_{k'k}$ έχουν τις ιδιότητες

$$\textcircled{1} Z_{kk} = \int dV z |\Phi_k(\vec{r})|^2 = 0$$

περιττή \downarrow \downarrow άρτια

εξ' όσων οι ιδιοσυμμετρίες είναι άρτιες ή περιττές (όπως ισχύει στα άτομα, στα συμμετρικά κβαντικά φέρια κλπ)

$$\textcircled{2} Z_{k'k}^* = \left(\int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r}) \right)^* = \int dV \Phi_k(\vec{r}) z \Phi_{k'}(\vec{r}) = Z_{kk'}$$

δηλαδή συννοητικά

$$\textcircled{1} Z_{kk} = 0$$

$$\textcircled{2} Z_{k'k}^* = Z_{kk'}$$

και $Z_{k'k} = Z_{kk'}$ αν οι ιδιοσυμμετρίες είναι πραγματικές

$$\vec{P}_{kk} := \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) (-e)\vec{r} \Phi_k(\vec{r}) = (-e) \vec{r}_{kk}$$

$$\vec{P}_{z k'k} = (-e) \int dV \Phi_{k'}^*(\vec{r}) z \Phi_k(\vec{r}) = (-e) \cdot Z_{k'k}$$

$$U_{\varepsilon k'k}(t) = -E_0 \cos \omega t \vec{P}_{z k'k}$$

Α) Εξάγωμεν τα διεγερμένα στοιχεία

$$E_2 \text{ ————— } \Phi_2(\vec{r})$$

$$E_1 \text{ ————— } \Phi_1(\vec{r})$$



αδιεγερτο



διεγερμένο

$$U_{E_{12}}(t) = e E_0 \cos \omega t Z_{12} = - E_0 \cos \omega t \mathcal{P}_{Z_{12}}$$

$$U_{E_{21}}(t) = e E_0 \cos \omega t Z_{21} = - E_0 \cos \omega t \mathcal{P}_{Z_{21}}$$

$$U_{E_{kk}}(t) = e E_0 \cos \omega t Z_{kk} = 0$$

Αν οι ιδιοσυναρτήσεις είναι πραγματικές

$$\mathcal{P}_{Z_{12}} = (-e) Z_{12} = (-e) Z_{21} = \mathcal{P}_{Z_{21}} := \mathcal{P}_Z := \mathcal{P}$$

$$U_{E_{12}}(t) = - E_0 \cos \omega t \mathcal{P}$$

$$U_{E_{21}}(t) = - E_0 \cos \omega t \mathcal{P}$$

$$U_{E_{kk}}(t) = 0, \quad k=1 \text{ ή } k=2$$

τελικά

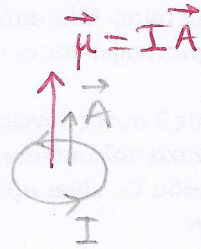
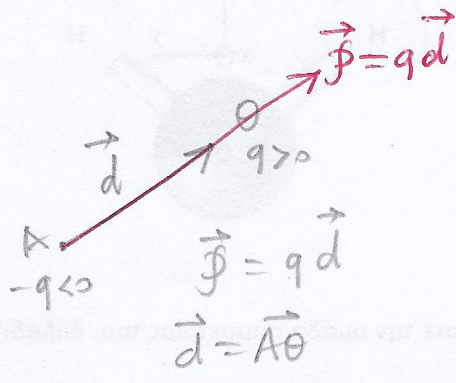
$$U_{E_{k'k}}(t) = - E_0 \cos \omega t \mathcal{P}, \quad k' \neq k$$

$$U_{E_{k'k}}(t) = 0, \quad k' = k$$

Υπερδιόγιοι Αναλογιών

\vec{E} (Ηλεκτρικό Πεδίο)

\vec{B} (Μαγνητικό Πεδίο)



ή $\vec{\mu} = \frac{q}{2m} (\vec{L} + g\vec{S})$
↑ φορτίο
↓ μάζα

$\vec{p} = q\vec{d}$

ηλεκτρική διπολική ροπή
 electric dipole moment

$\vec{\mu} = I\vec{A}$ ή $\vec{\mu} = \frac{q}{2m} (\vec{L} + g\vec{S})$

μαγνητική διπολική ροπή
 magnetic dipole moment

$U_E = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ δυναμική ενέργεια
 potential energy

$U_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ (μηχανική) ροπή
 torque

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

$[\vec{p}] = C \cdot m$

$[\vec{\mu}] = A \cdot m^2$

$F = BIL$
 $N = IAm$

$[U_E] = C \cdot m \cdot \frac{V}{m} = CV = \text{joule}$

$[U_B] = A \cdot m^2 \cdot T = Nm = \text{joule}$

$[\vec{\tau}] = C \cdot m \cdot \frac{N}{C} = N \cdot m$

$[\vec{\tau}] = A \cdot m^2 \cdot T = Nm$