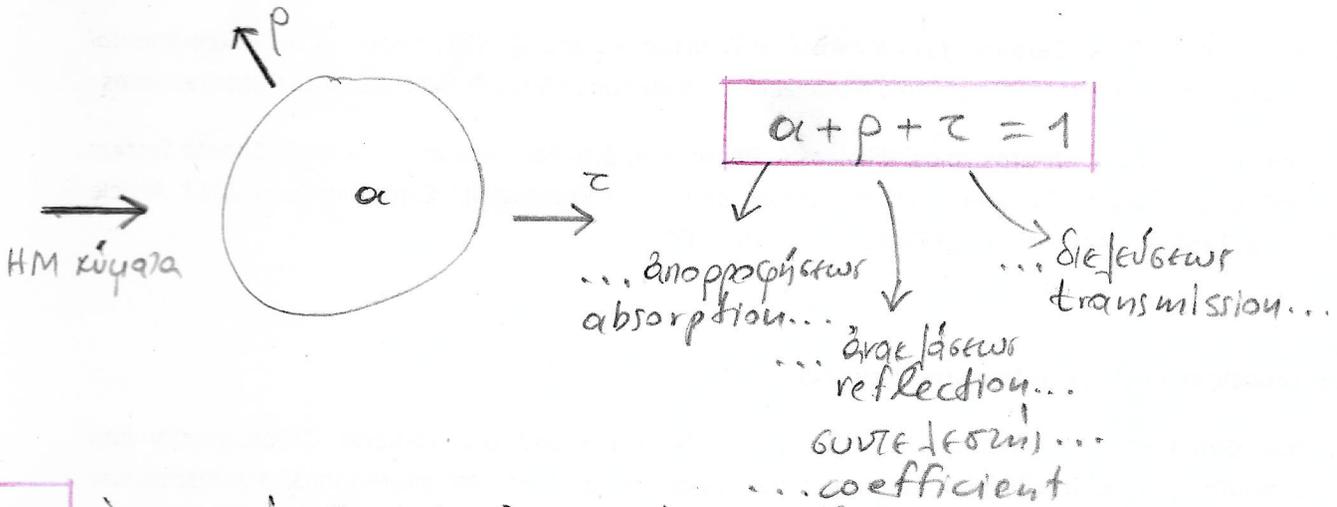


# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

## ΜΕΛΑΝ ΣΩΜΑ Κ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ



- $\alpha$ : Το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας που απορροφάται από το σώμα
- $\rho$ : ανακλάται
- $\tau$ : διέρχεται

μέλαν σώμα (black body) είναι εξιδονικευμένο σώμα, το οποίο απορροφά (μαύρο) όλη την προσπίπτουσα σε αυτό ΗΜ ακτινοβολία, ανεξαρτήτως συχνότητας και ανεξαρτήτως γωνίας προσπίπτουσας.

δηλαδή  $\rho = 0, \tau = 0, \alpha = 1 \quad \forall \text{ συχνότητα}$   
 $\forall \text{ γωνία προσπίπτουσας}$

Αν είχαν μόνο τα παραπάνω, τότε λόγω της συνεχούς απορροφούμενης ενέργειας, η θερμοκρασία του σώματος θα αυξανόταν συνεχώς.

Έτσι, ένα μέλαν σώμα, το οποίο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία (όρα και σε σταθερή θερμοκρασία) θα πρέπει να εκπέμπει ΗΜ ακτινοβολία, η οποία καλείται ακτινοβολία μέλανος σώματος, black-body radiation, έτσι ώστε να διατηρείται το ενεργειακό ισοζύγιο.

Η ακτινοβολία μέλανος σώματος γίνεται σύμφωνα με το νόμο του Planck.  
 Όπως ώστε το φάσμα της εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία (κ τη συχνότητα)  
ανεξαρτήτως: σχήματος, υλικού του μέλανος σώματος, γωνίας έκποσης  $\rho(\nu, T)$

Ένα μέλαν σώμα, σε θερμοδυναμική ισορροπία, έχει τις αξιοσημειώτες ιδιότητες:

- I1 είναι ιδανικός εκπομπός, δηλ. εκπέμπει σε κάθε συχνότητα τουλάχιστον όσο ενέργεια εκπέμπει ομοίως άλλο σώμα ταυτόσημης θερμοκρασίας.
- I2 είναι ισότροπος εκπομπός, δηλ. η ακτινοβολία του διασπείρεται ισοτρόπως, ανεξαρτήτως κατευθύνσεως

Τα πραγματικά σώματα εκπέμπουν κλάσμα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος.

συντελεστής εκπομπής ή εκπεμπόσις  
emission coefficient or emissivity  $\epsilon$  το ποσοστό της ΗΜ ακτινοβολίας, το οποίο έναν-εκπέμπεται από το σώμα

εξ ορισμού  $\epsilon_{\text{μέλανος σώματος}} = 1$   
 σε θερμοδυν. ισορ.

δηλ. απορροφάει, για το μέλαν σώμα ισχύει  $a=1, \rho=0, \tau=0, \epsilon=1$   
 (σε θερμοδυναμική ισορροπία)

- γκρίζο σώμα gray body  $\epsilon < 1, a, \rho, \tau$
- λευκό σώμα white body  $\rho=1, a=0, \tau=0$
- άδιαφανές σώμα opaque body  $\tau=0, a+\rho=1$
- διαφανές σώμα transparent body  $\tau=1, a=0, \rho=0$

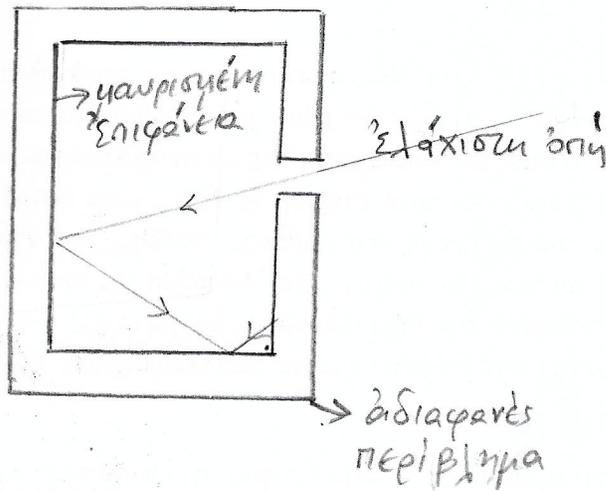
εφελκός θερμοκρασία  
 effective temperature ενός σώματος π.χ. άστρα, η/γμήτι, κλπ

είναι η θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος, το οποίο θα εξέπεμπε την ίδια συνολική (δηλ. στο κληρωμένο σε όλες τις συχνότητες) ένταση ακτινοβολίας  $I$  ( $[I] = \frac{W}{m^2}$ )

Προσεγγιστική πραγμάτωση μέλανος σώματος

κοιλότητα με όρη  
cavity with a hole

photonics: "cavity"  
(cavity with a hole)



1898 Otto Lummer & Ferdinand Kurlbaum  
1901

σήμερα ∃ ενδιαφέρον για σχεδόν μέλανα σώματα (near black bodies)

- εφαρμοχές
- απόκρυψη (ραδιό)
- συλλέκτες ηλ. ενέργειας
- ανιχνευτές υπέρυθρης ακτινοβολίας

τηλέσκοπια, κάμερες (ω) αντικατοπτρικές επιφάνειες για τη μείωση του διάχυτου ή αδέσμευτου φωτός

προσεγγιστικά μέλανα σώματα  
αξία

άνθρακας μαύρο χρώμα  $\alpha \leq 0.975$

super black  $\alpha \approx 0.996$   $\rho = 0.004$

Vantablack (με νανοσωλήνες C)  $\alpha = 0.9996$

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad \text{v. Planck}$$

$$[\rho(\nu, T)] = \frac{J}{m^3 \text{ Hz}}$$

Πυκνότητα ενέργειας ΗΜ ακτινοβολίας  
 σε στοιχειώδη περιοχή συχνότητας,  
 μέλανος σώματος σε θερμοδυναμική ισορροπία

$$\rho(\nu, T) d\nu$$

$$[\rho(\nu, T) d\nu] = \frac{J}{m^3}$$

$$[\rho(\nu, T)] = \frac{J}{m^3 Hz} = \frac{Js}{m^3}$$

Νόμος του Planck  
 και σύγκριση με τις προσεγγίσεις  
 Rayleigh-Jeans & Wien

«Υπεριώδης καταστροφή» & «Πρόβλημα μακρινού υπέρυθρου»

ένα από τα ζητήματα που αποκάλυψε τη κράτηση της ΗΜ ακτινοβολίας

$$\rho_{RJ}(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3} = \rho_{RJ}$$

Rayleigh-Jeans  
 κλασική φυσική, 1900

$$\rho_W(\nu, T) = \frac{a\nu^3}{e^{b\nu/T}} \frac{\text{σταθερές}}{\text{από ν. Planck}} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T}} = \rho_W$$

Wien  
 πειραματικό παίξιμο  
 (ελληνιστί fitting)  
 στις υψηλές συχνότητες  
 1896

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} = \rho$$

Planck  
 παλαιά κρατική μηχανική, 1900  
 συμπίπτει με τα πειραματικά  
 δεδομένα για όλες τις συχνότητες  
 και θερμοκρασίες

$x := \frac{h\nu}{k_B T} \gg (\text{είναι} > 0)$   
 για μη μηδενική συχνότητα

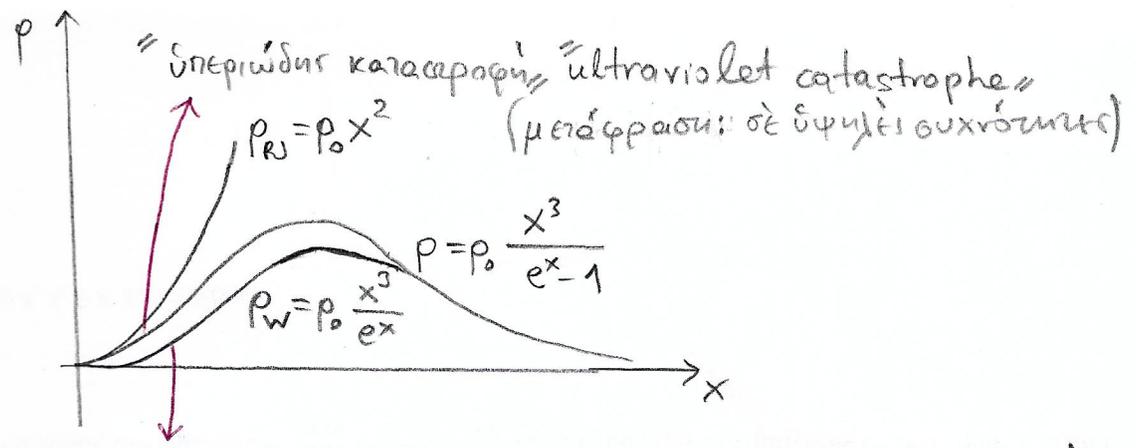
$$\rho_{RJ} = \rho_0 x^2 \quad \mathcal{A} = \mathbb{R}_+$$

πεδία δριγμού - φυσικού ενδιαφέροντος

$$\rho_W = \rho_0 \frac{x^3}{e^x} \quad \mathcal{A} = \mathbb{R}_+$$

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \quad \mathcal{A} = \mathbb{R}_+^*$$

$$\rho_0 := \frac{8\pi}{h^2} \left(\frac{k_B T}{c}\right)^3 \quad [\rho_0] = \frac{J}{m^3 Hz} = \frac{Js}{m^3}$$



“πρόβλημα μακρινού υπέρυθρου” (μετάφραση: σε χαμηλές συχνότητες)  
 “far infrared problem”

Οι υποθέσεις αυτές έχουν σχέση με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα γύρω στο 1900 και είναι με αυτή την έννοια παρατηρητικές.

$$x := \frac{h\nu}{k_B T}$$

Όμως, η περιοχή όπου αρχίζουν οι αποκλίσεις, εξαρτάται προφανώς και από τη θερμοκρασία του μέλανος σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ Συμβατικά στην περιοχή του ΗΜ φάσματος “μακρινό υπέρυθρο” (far infrared, FIR) έχουμε μήκος κύματος  $25 \mu\text{m} < \lambda < 1000 \mu\text{m}$ . Βρείτε σε τι  $x = \frac{h\nu}{k_B T}$  αντιστοιχεί το FIR, για θερμοκρασία (α') 300K δηλαδή περίπου τη θερμοκρασία ενός σώου, (β') 6000K δηλαδή περίπου για την ενεργό θερμοκρασία της φωτόσφαιρας του Ήλιου, (γ') 6K.

ΛΥΣΗ

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}, \quad c = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \frac{ch}{xk_B T}$$

$$25 \mu\text{m} < \lambda < 1000 \mu\text{m} \Rightarrow \frac{ch}{k_B T \cdot 1000 \mu\text{m}} < x < \frac{ch}{k_B T \cdot 25 \mu\text{m}}$$

$$\frac{hc}{k_B} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1.380 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}} \approx 14.404 \cdot 10^3 \text{ K m}$$

(α') 300K  $\Rightarrow 0.048 < x < 1.921$

(β') 6000K  $\Rightarrow 0.0024 < x < 0.09605$

(γ') 6K  $\Rightarrow 2.4 < x < 96.05$

$$x_{\text{χαμ}} < x < x_{\text{υψ}}$$

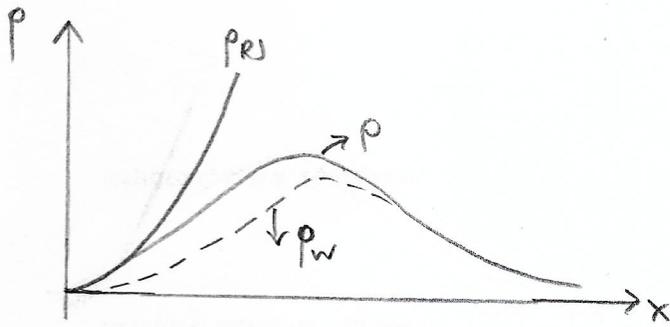
$x_{\text{Low}}$   $x_{\text{High}}$

ΑΣΚΗΣΗ FIR  $25\mu\text{m} < \lambda < 1000\mu\text{m}$

Ποιά πρέπει να είναι η θερμοκρασία  $T$  μέλανος σώματος  $T$ :

$\rho_w = 0.5\rho$  για το άνω και το κάτω όριο της περιοχής FIR;

(Σημειώστε «να υπάρχει πρόβλημα στο μακρινό υπέρυθρο»)



ΛΥΣΗ

Ψάχνουμε  $\rho_w = 0.5\rho \Rightarrow \rho_0 \frac{x^3}{e^x} = 0.5 \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \Rightarrow e^x - 1 = 0.5 e^x \Rightarrow$   
 $0.5 e^x = 1 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x = \ln 2 \approx 0.693}$

$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ ,  $c = \lambda \nu \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{hc}{x k_B T}}$

$\boxed{\frac{hc}{k_B} \approx 14.404 \cdot 10^3 \text{ Km}}$

$25\mu\text{m} < \frac{hc}{x k_B T} < 1000\mu\text{m} \Rightarrow$

$\frac{hc}{x k_B 1000\mu\text{m}} < T < \frac{hc}{x k_B 25\mu\text{m}}$

$\frac{14.404 \cdot 10^3 \text{ Km}}{\ln 2 \cdot 1000 \cdot 10^{-6} \text{ m}} < T < \frac{14.404 \cdot 10^3 \text{ Km}}{\ln 2 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \text{ m}}$

$\frac{14.404}{0.693} \text{ K} < T < \frac{14.404}{0.693} \cdot 40 \text{ K}$

$\boxed{21 \text{ K} \lesssim T \lesssim 831 \text{ K}}$

Δύο διατυπώσεις του νόμου Stefan-Boltzmann

(1) ως προς την πυκνότητα ενέργειας  $\rho(T)$

(2) ως προς την ένταση ακτινοβολίας  $I$

$$[\rho(T)] = \frac{J}{m^3}$$

$$[I] = \frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$$

(1)

$\rho(T) = a T^4$   
 πυκνότητα ενέργειας  
 $\frac{J}{m^3}$   
 κοιλότητα μέλανος σώματος  
 θερμοκρασίας  $T$

$$\rho(T) := \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$$

$$x := \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{x k_B T}{h} \Rightarrow d\nu = \frac{k_B T}{h} dx$$

$$\rho(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h}\right)^3 \left(\frac{k_B T}{h}\right) \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

π<sup>4</sup>/15

$$\rho(T) = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3} \cdot T^4$$

$\rho(T) = a T^4$       $a \approx 7.5657 \cdot 10^{-16} \frac{J}{m^3 K^4}$

(2)

$I = \sigma T^4$   
 εκπέμπεται  
 ενέργεια ανά μονάδα  
 επιφανείας  $is$  ανά μονάδα  
 $\frac{J}{m^2 s} = \frac{W}{m^2}$  χρόνου  
 κοιλότητα μέλανος σώματος  
 θερμοκρασίας  $T$

$$\Phi_\sigma = \frac{\eta}{4} \langle u \rangle$$

ροή σωματιδίων

ροή φωτονίων

$$\Phi_\gamma = \frac{\eta}{4} c$$

$\eta$ : αριθμητική πυκνότητα

από κινητική θεωρία αερίων (δεδομένο)

# κρούσεων στα τοιχώματα  
 ανά μονάδα επιφανείας και  
 ανά μονάδα χρόνου

$$[\Phi_\sigma] = \frac{1}{m^3} \cdot \frac{m}{s} = \frac{1}{m^2 \cdot s}$$

$$\langle h\nu \rangle = \frac{\rho(T)}{\eta}$$

μέση ενέργεια φωτονίου

ένταση  
 εξερχόμενης ΗΜ ακτινοβολίας

$$I = \Phi_\gamma \langle h\nu \rangle$$

Άρα  $I = \frac{\eta}{4} c \frac{\rho(T)}{\eta} \Rightarrow I = \frac{c}{4} \rho(T)$

$$I = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4$$

{ επειδή την  $\sigma$  την χωρίζουμε από  
 το πείραμα, μπορούμε να υπολογίσουμε  
 την  $h$  }

$I = \sigma T^4$

$$\sigma \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

# ΝΟΜΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΣ Wien

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1}$$

v. Planck

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = \rho_0 x^2 \frac{3(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2}$$

αν ψάχνουμε άκρῳτα, θα πρέπει  $\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow$  (αφῳ  $x \neq 0$ )  $3(e^x - 1) = x e^x$

φαίνεται ὅτι  $x_0 \sim 3$

ἀκριβέστερα, ἀριθμητικῶς βρίσκουμε

ἢ καὶ με online grapher  $x_0 \approx 2.821439$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_B T} \approx 2.821439 \Rightarrow \nu_0 = \left(58.789 \frac{\text{GHz}}{\text{K}}\right) \cdot T \quad \eta \quad \frac{\nu_0}{T} \approx 58.789 \frac{\text{GHz}}{\text{K}}$$

"νόμος μετατόπισης", τοῦ  $\nu_0$  συναρτῆσαι τοῦ  $T$

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x}$$

v. Wien

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho_0 \frac{3x^2 e^x - x^3 e^x}{e^{2x}} = \rho_0 x^2 \frac{3e^x - x e^x}{e^{2x}} = \rho_0 x^2 \frac{3-x}{e^x}$$

αν ψάχνουμε ἀκρῳτα, θα πρέπει  $\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow$  (για  $x \neq 0$ )  $x_0 = 3$

$$\Rightarrow \frac{h\nu_0}{k_B T} = 3 \Rightarrow \nu_0 = 3 \frac{k_B}{h} T \quad \eta \quad \frac{\nu_0}{T} \approx 62.510 \frac{\text{GHz}}{\text{K}}$$

"νόμος μετατόπισης", τοῦ  $\nu_0$  συναρτῆσαι τοῦ  $T$

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε πῶς εἰς σῆμα  $x_0$  ἢ  $\frac{d^2\rho_w}{dx^2} < 0$ , ὥστε πράγματι να ἔχουμε μέγιστο.

Χρησιμοποιῆστε το v. Wien  $\rho_w = \rho_0 \frac{x^3}{e^x} \Rightarrow \frac{d\rho_w}{dx} = \rho_0 x^2 \frac{3-x}{e^x}$

$$\left. \frac{d^2\rho_w}{dx^2} \right|_{x=x_0=3} = \rho_0 \left. 2x \frac{3-x}{e^x} \right|_{x=x_0=3} + \rho_0 x^2 \left. \frac{(-1)e^x - (3-x)e^x}{e^{2x}} \right|_{x=x_0=3} = \rho_0 x^2 (-1) \left. \frac{1+3-x}{e^x} \right|_{x=x_0=3} < 0$$

ΑΣΚΗΣΗ Ὁμοίως, χρησιμοποιῶντας τὸ v. Planck.  $\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \quad \frac{d\rho}{dx} = \rho_0 x^2 \frac{3(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2}$

$$\left. \frac{d^2\rho}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \rho_0 \left. 2x \frac{3(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2} \right|_{x=x_0} + \rho_0 x^2 \frac{(3e^x - e^x - x e^x)(e^x - 1)^2 - (3(e^x - 1) - x e^x) 2(e^x - 1)e^x}{(e^x - 1)^4}$$

$$= \rho_0 x^2 \left. \frac{(2e^x - x e^x)(e^x - 1)^2}{(e^x - 1)^4} \right|_{x=x_0} < 0 \Leftrightarrow 2e^x < x e^x \Big|_{x=x_0} \Leftrightarrow 2 < x \Big|_{x=x_0}$$

τὸ σῆμα τοῦ  $x_0$  εἶναι ἀπῳ  $x_0 \approx 2.82$

Νόμος του Planck στη μορφή  $\rho(\lambda, T)$

Προσοχή στον δριεσμό

$$\int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda := \int_0^\infty \rho(\nu, T) d\nu = \int_0^\infty \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu$$

$$[\rho(\lambda, T) d\lambda] = \frac{J}{m^3}$$

$$[\rho(\nu, T) d\nu] = \frac{J}{m^3}$$

↓

$$[\rho(\lambda, T)] = \frac{J}{m^2 \cdot m} \neq$$

$$[\rho(\nu, T)] = \frac{J}{m^3 \text{ Hz}}$$

$$c = \lambda \nu \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = (-1) c \lambda^{-2}$$

$$\int_0^\infty \rho(\lambda, T) d\lambda := \frac{8\pi h c^3}{e^3} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^3} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \frac{(-1)}{\lambda^2} d\lambda$$

$$= 8\pi h c \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda \Rightarrow$$

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi h c}{\lambda^5 \cdot (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

τα  $\rho(\nu, T)$ ,  $\rho(\lambda, T)$

δεν έχουν ίδιες μονάδες μέτρησης, δηλ. δεν είναι ίδια φυσικά μεγέθη, δεν είναι ίδιες κατανομές.

$d\nu \neq (\text{στάθ}) \cdot d\lambda$

Ορισμός  $\psi := \frac{hc}{\lambda k_B T}$  και  $\rho'_0 := 8\pi \frac{(k_B T)^5}{(hc)^4}$

$$\rho(\psi) = \rho'_0 \frac{\psi^5}{e^\psi - 1}$$

v. Planck

$$[\rho'_0] = \frac{J^5 s^4}{(Js)^4 m^4} = \frac{J}{m^4} = \frac{J}{m^3 \cdot m}$$

αν ψάχνουμε άκρότατο, θα πρέπει  $\frac{d\rho}{d\psi} = 0$

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \rho'_0 \frac{5\psi^4(e^\psi - 1) - \psi^5 e^\psi}{(e^\psi - 1)^2}$$

$$\Rightarrow \psi^4 \{ 5(e^\psi - 1) - \psi e^\psi \} = 0$$

$$\Rightarrow (\text{για } \psi \neq 0) \quad 5(e^\psi - 1) = \psi e^\psi$$

φαίνεται ότι  $\psi_0 \sim 5$

άκριβέστερα, αριθμητικά βρίσκουμε  $\psi_0 \approx 4.965114$

ή και με online grapher

$$\frac{hc}{\lambda_0 k_B T} \approx 4.965114 \Rightarrow \lambda_0 T \approx 2.897772 \cdot 10^3 \text{ m K}$$

"νόμος μετατόπισης" του  $\lambda_0$  συναρτήσει του  $T$

$$\rho_w(\psi) = \rho_0' \frac{\psi^5}{e^\psi}$$

v. Wien

$$\rho_0' \psi^4 \frac{5-\psi}{e^\psi} = \rho_0' \frac{5\psi^4 - \psi^5}{e^\psi}$$

$$\frac{d\rho_w}{d\psi} = \rho_0' \frac{5\psi^4 e^\psi - \psi^5 e^\psi}{e^{2\psi}} \quad \text{και} \quad \frac{d\rho_w}{d\psi} = 0 \Rightarrow (\text{για } \psi \neq 0) \quad 5e^\psi = \psi e^\psi \Rightarrow$$

$$\psi_0 = 5$$

$$\frac{hc}{\lambda_0 k_B T} = 5 \Rightarrow \lambda_0 \cdot T = 2,877554 \text{ mK}$$

νόμος μετατόπισης, τού  $\lambda_0$  συναρτήσει τού  $T$

Ο νόμος μετατόπισης του Wien παρήχθη από τον Wilhelm Wien το 1893

στη μορφή

$$\lambda_0 \cdot T = \text{σταθερά}$$

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε πως στο σημείο  $\psi_0$  η  $\frac{d^2 \rho_w}{d\psi^2} < 0$ , ώστε πράγματι να έχουμε μέγιστο

Χρησιμοποιήστε το v. Wien  $\rho_w = \rho_0' \frac{\psi^5}{e^\psi}$

$$\left. \frac{d^2 \rho_w}{d\psi^2} \right|_{\psi=\psi_0} = \rho_0' \frac{(5 \cdot 4\psi^3 - 5\psi^4)e^\psi - (5\psi^4/e^\psi)e^\psi}{e^{2\psi}} = \rho_0' \frac{5\psi^3(4-\psi)}{e^{2\psi}} \Big|_{\psi=\psi_0} < 0$$

μικνύεται για  $\psi = \psi_0 = 5$

δίνι  $\psi_0 = 5$

ΑΣΚΗΣΗ Όμοίως χρησιμοποιώντας το v. Planck

$$\rho(\psi) = \rho_0' \frac{\psi^5}{e^\psi - 1}$$

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \rho_0' \frac{5\psi^4(e^\psi - 1) - \psi^5 e^\psi}{(e^\psi - 1)^2}$$

$$= \rho_0' \psi^4 \frac{5(e^\psi - 1) - 4e^\psi}{(e^\psi - 1)^2}$$

$$\left. \frac{d^2 \rho}{d\psi^2} \right|_{\psi=\psi_0} = \rho_0' 4\psi^3 \frac{5(e^\psi - 1) - 4e^\psi}{(e^\psi - 1)^2} \Big|_{\psi=\psi_0} +$$

$$+ \rho_0' \psi^4 \frac{(5e^\psi - 4e^\psi - e^\psi)(e^\psi - 1)^2 - (5(e^\psi - 1) - 4e^\psi) 2(e^\psi - 1)e^\psi}{(e^\psi - 1)^4} \Big|_{\psi=\psi_0}$$

$$= \rho_0' \psi^4 \frac{(4-\psi)e^\psi}{(e^\psi - 1)^2} \Big|_{\psi=\psi_0} < 0 \Leftrightarrow 4 < \psi \Big|_{\psi=\psi_0} \text{ το οποίο ισχύει δίνι } \psi_0 = 4,96$$

radiance  $L$   $[L] = \frac{W}{m^2 \cdot sr}$

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$$

spectral radiance  $B_\nu(\theta, \varphi)$   $[B_\nu(\theta, \varphi)] = \frac{W}{m^2 \cdot sr \cdot Hz}$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

ένταση ακτινοβολίας

$I$   $[I] = \frac{W}{m^2}$

$$I_\nu := \int B_\nu(\theta, \varphi) \cos\theta d\Omega$$

$I_\nu$   $[I_\nu] = \frac{W}{m^2 \cdot Hz}$

↓  
 λαμβάνει υπόψη  
 συντελεστή δόξα  
 την προβεβλημένη επιφάνεια  
 accounts for projected area

Σε περίπτωση ισοτροπίας  $B_\nu(\theta, \varphi) = B_\nu \Rightarrow I_\nu = B_\nu \int \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_\nu = B_\nu \cdot \frac{2\pi}{2} \int_0^\pi \sin(2\theta) d\theta = B_\nu \cdot \pi \cdot \left[ \frac{-\cos(2\theta)}{2} \right]_0^\pi = B_\nu \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1+1) \Rightarrow I_\nu = \pi \cdot B_\nu$$

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty \pi B_\nu d\nu$$

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \pi B_\lambda d\lambda$$

$$I = \int_0^\infty \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \left( \frac{k_B T}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{(k_B T)^4}{h^4} \frac{\pi^4}{15}$$

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} T^4$$

2η διατύπωση της νόμου των Stefan-Boltzmann

$$\int_0^\infty B_\nu d\nu := \int_0^\infty B_\lambda d\lambda$$

$$\psi = \frac{hc}{\lambda k_B T} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{k_B T} \frac{1}{\psi}$$

$$I = \int_0^\infty \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda = \frac{2\pi h c^2}{h^5 c^5} \int_0^\infty \frac{\left( \frac{k_B T}{h} \right)^5 \psi^5}{e^\psi - 1} \frac{1}{\left( \frac{hc}{k_B T} \right)^2 \psi^2} d\psi$$

$$= \frac{2\pi h c^2 k_B^5 T^5}{h^5 c^5 k_B T} \frac{hc}{k_B T} \int_0^\infty \frac{\psi^3 d\psi}{e^\psi - 1} \Rightarrow I = \frac{2\pi^5}{15 h^3 c^2} k_B^4 T^4 \Rightarrow I = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} T^4$$