Στοιχειώδης Ἀριθμός Κανονικῶν Τρόπων ΗΜ πεδίου (dN) ἀνά στοιχειῶδες διάστημα συχνότητας ($d\nu$)

$$g(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$$

$$[g(\nu)] = \frac{1}{Hz} = s$$

$$\frac{g(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \qquad \left[\frac{g(\nu)}{V}\right] = \frac{1}{m^3\,Hz} = \frac{s}{m^3}$$

$$\rho(\nu,T) = \underbrace{\frac{g(\nu)}{V}\cdot \overline{E}}_{} \qquad [\rho(\nu,T)] = \frac{J}{m^3\,Hz} = \frac{Js}{m^3}$$

$\overline{E}$ → μέση ἐνέργεια κανονικοῦ τρόπου

κλασικά $\quad \overline{E} = \overline{E(T)} = \frac{M}{2}k_BT$

M = # βαθμῶν ἐλευθερίας

} θεώρημα Ἰσοκατανομῆς ἐνέργειας

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{M}{2}k_BT \xrightarrow[M=2]{\text{για}} \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot k_BT}$$

ν. Rayleigh – Jeans

παλαιο-κβαντικά $\quad \overline{E} = \overline{E(\nu,T)} = \dfrac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT} - 1}$

προϋποθέσεις

- $E_n = nh\nu$ ἐνέργεια "σκαλοπάτι", $n = 0, 1, 2, \ldots$
- $\overline{E(\nu,T)} = \sum_n E_n \cdot P_n$

(ὅπως εἴπαμε) στην ἀρχή τοῦ μαθήματος ὁ μέσος ἀριθμός σωματιδίων στην κατάσταση n με ἐνέργεια E_n εἶναι

$$\frac{N e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}} = \overline{n}_n \longleftrightarrow P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}, \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

στατιστική (Maxwell-) Boltzmann (MB)

$$\Rightarrow \boxed{\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT} - 1}}$$

ν. Planck

ΑΣΚΗΣΗ –

Σημείωση: Ἄν ἀντί τοῦ $E_n = nh\nu$ βάλουμε $E_n = h\nu(n+\frac{1}{2})$ ὅπως γνωρίζουμε σήμερα για τον κβαντικό ΑΑΤ **ΔΕΝ** προκύπτει ὁ νόμος τοῦ Planck!

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΩΣ

ΗΜ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ – ΥΛΗΣ (ΔΙΣΤΑΘΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ)

ΔΣ

LASER = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Ἐξαναγκασμένη Ἐκπομπή
ἢ Διεγερμένη

1916 – 1917 A. Einstein "θεωρητικά θεμέλια" του LASER

επαν-εξήγηση τοῦ ν. Planck για την ακτινοβολία μέλανος σώματος

E_2 ——— ΔΣ με
E_1 —•— 1 ἠλεκτρόνιο

Αὐτή τη φορά ἡ ἀπόδειξη στηρίζεται στους <u>3 μηχανισμούς</u> ἢ διεργασίες <u>ἀλληλεπιδράσεως ΗΜ ἀκτινοβολίας – ΔΣ</u> <u>ΚΑΙ</u> στη <u>στατιστική</u> (Maxwell)-<u>Boltzmann</u> για την κατάληψη των σταθμών του ΔΣ ἀπό το ἠλεκτρόνιο.

(Stimulated) Absorption — (Ἐξαναγκασμένη) Ἀπορρόφηση
Spontaneous Emission — Αὐθόρμητη Ἐκπομπή
} "παλαιότερα γνωστοί"

Stimulated Emission — Ἐξαναγκασμένη Ἐκπομπή ← εισήχθη ἀπό τον A. Einstein

γιατί MB και όχι FD;

Συντελεστές Einstein

οφείλεται στο $\rho(\nu,T)$ ⟷ Ἐξαναγκασμένο B_{ij}

<u>ΔΕΝ</u> οφείλεται στο $\rho(\nu,T)$ ⟷ Αὐθόρμητο A_{ij}

i ἀρχική στάθμη τοῦ ἠλεκτρονίου
j τελική στάθμη τοῦ ἠλεκτρονίου

πιθανότητα να συμβεί ἡ διεργασία

$$dW^{\epsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt$$

$$dW^{\alpha\upsilon\theta}_{\epsilon\kappa\pi} = A_{21}\,dt$$

$$dW^{\epsilon\xi}_{\epsilon\kappa\pi} = B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt$$

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ</u> γιατί MB κ όχι FD; (μάλλον δεν υπήρχε τότε FD, σε ὑψηλές T FD → MB, έχουμε 1 ἠλεκτρόνιο στο ΔΣ)

<u>1905</u> A. Einstein ἐξήγησε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ὑποθέτοντας ὅτι ∃ κβάντα φωτός με ἐνέργεια $h\nu$

<u>1926</u> μάλλον ἀπό τον Gilbert Newton Lewis «φωτόνιο» = κβάντο φωτός

<u>1950 - 1960</u> κατασκευάστηκαν τα πρῶτα MASER κ LASER
microwaves

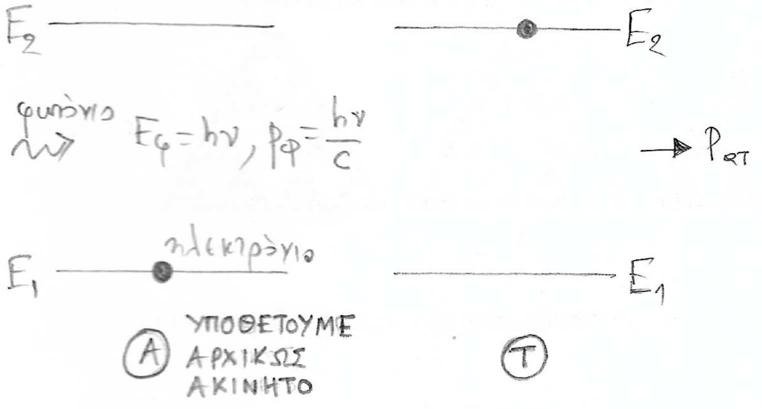
<u>ΣΗΜΕΡΑ</u> ...

<u>1964</u> Charles Townes, Nikolay Basov, Aleksandr Prokhorov Νόμπελ Φυσικής

(ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (ή διεγερμένη)) ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗ
(STIMULATED) ABSORPTION

εδώ
$\Delta\Sigma$ = δύο στάθμες ενός ατόμου

$$dW^{\varepsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt$$



Διατήρηση Ενέργειας

$$E_1 + h\nu = E_2 + \cancel{\frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}}$$

υποθέτουμε αμελητέα $\Longrightarrow h\nu \simeq E_2 - E_1$

Διατήρηση Ορμής

$$p_\varphi = p_{\alpha\tau} \Rightarrow \frac{h\nu}{c} = p_{\alpha\tau} \Rightarrow p_{\alpha\tau} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$$c = \lambda\nu \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Ας ελέγξουμε αν πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου $\frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}$ μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου E_φ.

$$\Lambda := \frac{\frac{p_{\alpha\tau}^2}{2m_{\alpha\tau}}}{E_\varphi} = \frac{h^{\cancel{2}}\,\cancel{\lambda}}{\lambda^{\cancel{2}}\,2m_{\alpha\tau}\,\cancel{h}c} = \frac{h}{2m_{\alpha\tau}\lambda c}$$

Για να μεγαλώσει το Λ θα πρέπει η $m_{\alpha\tau}$ να μικρύνει.
Ας πάρουμε λοιπόν το μικρότερο δυνατό άτομο, το άτομο του Υδρογόνου.

$$\left.\begin{aligned} m_e &\simeq 9.109\ 10^{-31}\,kg \\ m_p &\simeq 1.673\ 10^{-27}\,kg \\ m_{\alpha\tau} &\approx m_p + m_e \end{aligned}\right\}\ m_{\alpha\tau} \simeq 1.673 \cdot 10^{-27}\,kg$$

↑ υπάρχει κι ένα μικρό έλλειμμα μάζας, δηλαδή η ενέργεια συνδέσεως του ηλεκτρονίου και του πρωτονίου στο άτομο.

Ας πάρουμε ένα τυπικό πράσινο φωτόνιο με $\lambda \simeq 500\,nm$

$$\Lambda = \frac{6.626\cdot 10^{-34}\,\cancel{Js}}{2\cdot 1.673\cdot 10^{-27}\,\cancel{kg}\ 500\cdot 10^{-9}\,\cancel{m}\ 3\cdot 10^{8}\,\cancel{m}/\cancel{s}} \simeq 1.320\cdot 10^{-9}$$

Οπότε, πράγματι η κινητική ενέργεια του ατόμου μετά την απορρόφηση του φωτονίου είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του φωτονίου.

Για ποιό μήκος κύματος λ, στο άτομο τού υδρογόνου, θα μπορούσε ό λόγος Λ να γίνει ίσος με 0.05; ②

$$\Lambda = \frac{h}{2\lambda c\, m_{\alpha\tau}} = 0.05 \Rightarrow \lambda = \frac{h}{2 c\, m_{\alpha\tau}\, 0.05} = \frac{6.626\ 10^{-34}\ Js}{2\cdot 3\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}\ 1.673\cdot 10^{-27}\ kg\ 0.05}$$

$$\Rightarrow \lambda \simeq 13.2\cdot 10^{-15}\ m = 13.2\ fm$$

Αύτο είναι ένα έξαιρετικά λιλιπούτειο μήκος κύματος

π.χ. ακτίνες γ $\quad \lambda_\gamma \lesssim 10\ pm = 10.10^{-12}\ m = \underline{10^{-11}\ m}$

ενώ έδω βρήκαμε $\underline{13.2\ 10^{-15}}\ m = 13.2\ fm$

Διάμετρος πυρήνα Υδρογόνου $\quad 1.75\ fm$

Ουρανίου $\quad 15\ fm$

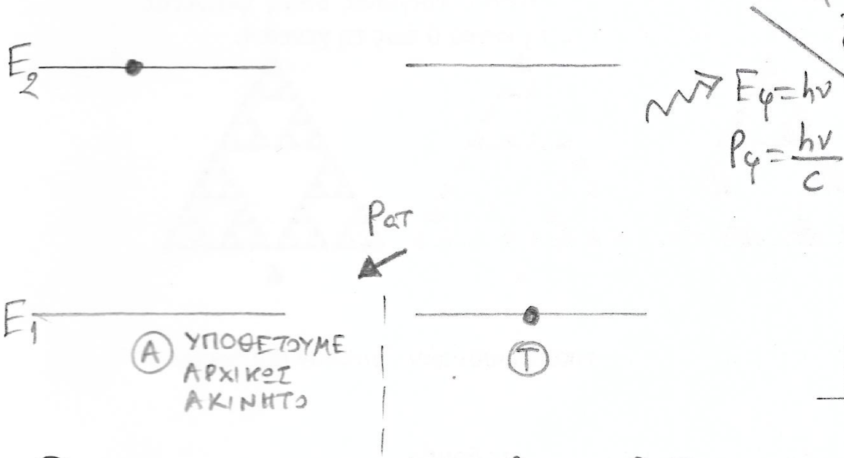
Άρα, ή υπόθεσή μας, να θεωρήσουμε άμελητέα
την κινητική ενέργεια τού άτόμου μετά την άπορρόφηση τού φωτονίου

$$\frac{P_{\alpha\tau}^2}{2 m_{\alpha\tau}}$$

σε σχέση με
την ένέργεια τού άπορροφούμενου φωτονίου E_φ
είναι σωστή
σχεδόν σε όλο το ΗΜ φάσμα.

ΑΥΘΟΡΜΗΤΗ ΕΚΠΟΜΠΗ
SPONTANEOUS EMISSION

$$dW^{αυθ}_{εκπ} = A_{21}\cdot dt$$



energy level lifetime τ_2 ή τ

χρόνος ζωής της στάθμης 2
(το ηλεκτρόνιο από τη στάθμη 2 αφησυχάζει στη στάθμη 1)

$$1 := A_{21}\cdot\tau_2 \text{ ή } A_{21}\cdot\tau$$

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{1}{A_{21}}$$

απλοϊκός ορισμός...

Το άτομο θα κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση με το φωτόνιο

Διατήρηση Ενέργειας $\quad E_2 = E_1 + E_φ + \cancel{\frac{P_{ατ}^2}{2m_{ατ}}}$ (αμελητέα) $\Rightarrow h\nu \simeq E_2 - E_1$

Διατήρηση Ορμής $\quad 0 = P_{ατ} + P_φ \Rightarrow P_{ατ} = -P_φ$

- Τα φωτόνια εκπέμπονται σε τυχαία κατεύθυνση, δηλαδή χωρίς κατευθυντικότητα (without directionality)
  με τυχαία φάση, δηλαδή χωρίς συνοχή (incoherence)

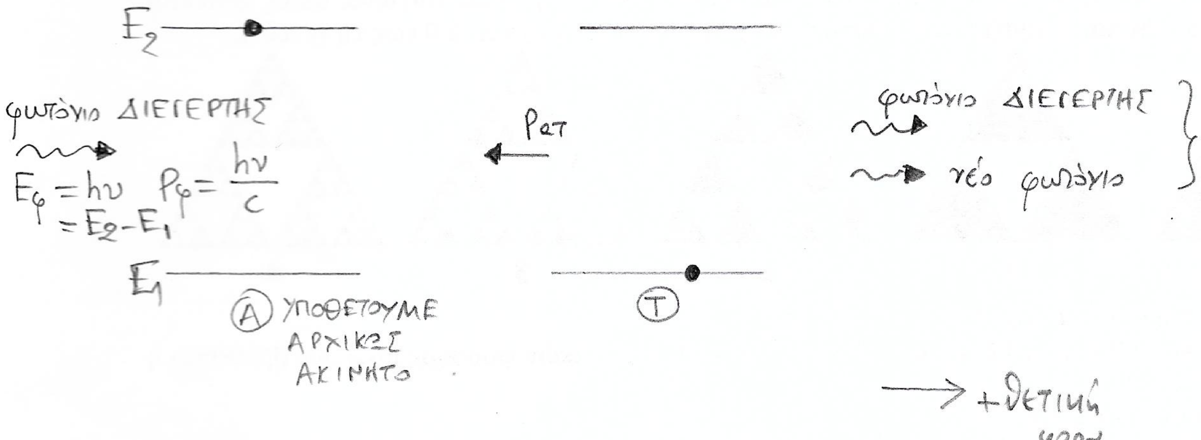
συνοχή (coherence) ή συμφωνία, συμφασικότητα
= σταθερή σχέση μεταξύ των φάσεων των κυμάτων

coherent	incoherent
συνεκτικός	μη συνεκτικός
↓ π.χ. laser	π.χ. φωτεινή πηγή πυρακτώσεως (incandescent light source) ή LED Light Emitting Diode

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ (ή διεγερμένη) ΕΚΠΟΜΠΗ
STIMULATED EMISSION

A. Einstein
"Zur Quantentheorie der Strahlung"
1916, 1917

$$dW^{εξ}_{εκπ} = B_{21}\, \rho(\nu,T)\, dt$$



"ΚΛΩΝΟΙ"
δύο φωτόνια με ίδια
- ενέργεια
- ορμή (κατεύθυνση)
- φάση
- πόλωση

ίδια ενέργεια ⇒ μονοχρωματικότητα (monochromaticity)
ίδια ορμή (κατεύθυνση) ⇒ κατευθυντικότητα (directionality)
* ίδια φάση ⇒ συνοχή (coherence)
ίδια πόλωση ⇒ πολωμένο φως (polarized light) *

* υπάρχουν και οι άλλοι μηχανισμοί στο παιχνίδι ...

→ Τα περί φάσεως κ πολώσεως ∄ στο άρθρο τού Einstein

→ Τα φωτόνια είναι μποζόνια και άρα μπορούν να έχουν ίδια ενέργεια, ορμή (κατεύθυνση), φάση, πόλωση

→ χρειάζεται η υπόθεση ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ ενέργειας $E_φ = E_2 - E_1 = h\nu$ δεν παθαίνει τίποτε κατά τη διάρκεια της εξαναγκασμένης εκπομπής

→ θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το αρχικό φωτόνιο ΔΙΕΓΕΡΤΗΣ καθορίζει τη φάση, την πόλωση κ τη διεύθυνση του νέου εκπεμπόμενου φωτονίου όπως σε μιά εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης καθορίζει τη φάση, την πόλωση κ τη διεύθυνση της εξαναγκασμένης ταλαντώσεως

Διατήρηση Ενέργειας $E_2 + \cancel{E_\varphi} = E_1 + \cancel{E_\varphi} + E_{\varphi'} + \cancel{\frac{P_{\alpha\tau}^2}{2M_{\alpha\tau}}}$ αμελητέο

$$\Rightarrow E_{\varphi}' = E_2 - E_1 = E_\varphi \Rightarrow$$

τα φωτόνια έχουν ίδια ενέργεια → μονοχρωματικότητα

Διατήρηση Ορμής $\cancel{P_\varphi} = \cancel{P_\varphi} + P_{\varphi}' + P_{\alpha\tau} \Rightarrow P_{\varphi}' = -P_{\alpha\tau}$

έχουμε ήδη υποθέσει πως το νέο φωτόνιο
θα κινηθεί στην κατεύθυνση του φωτονίου ΔΙΕΓΕΡΤΗ

$\Rightarrow P_{\varphi}' > 0$ (θετική αλγεβρική τιμή) ίδια κατεύθυνση

(μέτρο) $P_{\varphi}' = \frac{E_{\varphi}'}{c} = \frac{E_\varphi}{c} = P_\varphi$ ίδιο μέτρο

$\Rightarrow$ τα φωτόνια έχουν ίδια ορμή

ΕΞΑΓΩΓΗ του νόμου Planck
από τους μηχανισμούς αλληλεπιδράσεων ΗΜ ακτινοβολίας – ΔΣ
και τη στατιστική (Maxwell) – Boltzmann

Σχέση συντελεστών Einstein A και B

Μελετάμε την αλληλεπίδραση συλλογής ΔΣ – ΗΜ ακτινοβολίας σε θερμοδυναμική ισορροπία.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
(Maxwell) – Boltzmann

① χωρίς διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$N_i = N_{o\lambda} \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$$

N_i → πληθυσμός ΔΣ με ηλεκτρόνιο στη στάθμη i

$N_{o\lambda}$ → ολικός πληθυσμός ΔΣ

$\frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$ → P_i πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη στάθμη i στο ΔΣ

② με διαφορετικά στατιστικά βάρη

$$N_i = N_{o\lambda} \frac{g_i\, e^{-\beta E_i}}{Z}$$

g_i στατιστικό βάρος της E_i

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$$

συνάρτηση επιμερισμού
partition function

$$Z = \sum_i g_i\, e^{-\beta E_i}$$

Θερμοδυναμική ισορροπία ⟹ σε χρόνο dt $dN_{1\to2} = dN_{2\to1}$ ⟹

$$N_1\, dW_{1\to2} = N_2\, dW_{2\to1} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{N_{o\lambda}}\, e^{-\beta E_1}}{\cancel{Z}} g_1\, dW^{\epsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho} = \frac{\cancel{N_{o\lambda}} \cdot e^{-\beta E_2}}{\cancel{Z}} g_2 \left(dW^{\epsilon\xi}_{\epsilon\kappa\pi} + dW^{\epsilon\kappa\pi}_{\alpha\upsilon\theta} \right) \Rightarrow$$

$$g_1\, e^{-\beta E_1} B_{12}\, \rho(\nu,T)\, \cancel{dt} = e^{-\beta E_2} g_2 \left(B_{21}\, \rho(\nu,T)\, \cancel{dt} + A_{21}\, \cancel{dt} \right) \Rightarrow$$

$$g_1\, e^{-\beta E_1} B_{12}\, \rho(\nu,T) - e^{-\beta E_2} g_2\, B_{21}\, \rho(\nu,T) = e^{-\beta E_2} g_2\, A_{21} \Rightarrow$$

$$\rho(\nu,T) = \frac{g_2 A_{21} e^{-\beta E_2}}{g_1 B_{12} e^{-\beta E_1} - g_2 B_{21} e^{-\beta E_2}} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} e^{\beta(E_2 - E_1)} - 1}$$

Όμως, $\forall \nu$

$$\lim_{T\to\infty} \rho(\nu,T) = \infty$$

π.χ. από το πείραμα

Αν γνωρίζουμε την πειραματική συμπεριφορά, την οποία εξηγεί ο νόμος Planck

$$\boxed{\rho(\nu T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}}$$

$$\frac{\rho(\nu, T_2)}{\rho(\nu, T_1)} = \frac{e^{\frac{h\nu}{k_B T_1}} - 1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T_2}} - 1} > 1$$

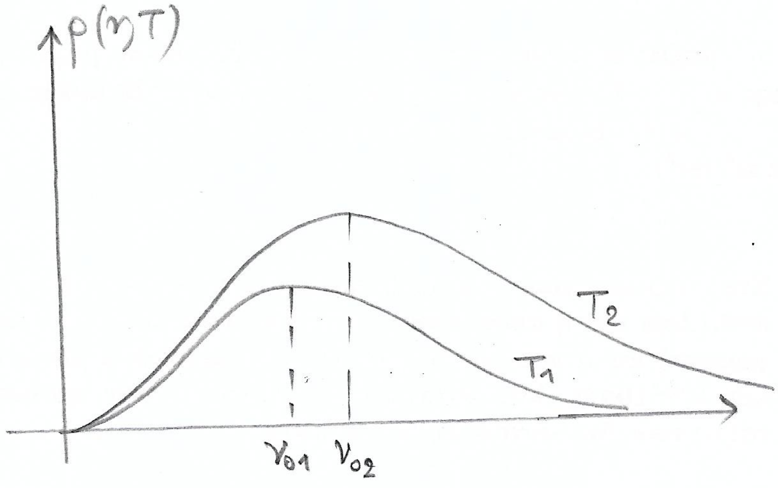
θετικό

θετικό

$$\Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T_1}} - 1 > e^{\frac{h\nu}{k_B T_2}} - 1 \Leftrightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T_1}} > e^{\frac{h\nu}{k_B T_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T_1} > \frac{1}{T_2} \Leftrightarrow T_2 > T_1$$

δηλαδή, μεγαλύτερη θερμοκρασία οδηγεί σε μεγαλύτερο $\rho(\nu T)$, $\forall \nu$.



Ακόμα, από το νόμο μετατοπίσεως Wien στη μορφή

$\nu_0 = (\sigma\tau\alpha\theta)\cdot T$

$\nu_0 \simeq 58.789 \ \frac{GHz}{K} \cdot T$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \{T\uparrow \Rightarrow \nu_0 \uparrow\}$ όπως δείχνουμε και στο σχήμα

$T \to \infty \Rightarrow \beta \to 0$

$$\rho \to \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} - 1} = \infty$$

Άρα, $\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} = 1 \Rightarrow \boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}}$

Αν $g_2 = g_1$ ή χωρίς στατιστικά βάρη $\Rightarrow B_{12} = B_{21} := B$

$A_{21} := A$

$$\left.\begin{aligned} \rho(\nu,T) &= \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1}{g_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} \cdot e^{\beta(E_2 - E_1)} - 1} \\ \rho(\nu,T) &= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \end{aligned}\right\} \text{σύγκριση} \Rightarrow$$

$\boxed{\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}}$ $\boxed{g_1 B_{12} = g_2 B_{21}}$ $\boxed{h\nu = E_2 - E_1}$

Οἱ διάφορες στατιστικές που ἀναφέρονται παρακάτω θα ἀναλυθοῦν στο μάθημα τῆς Στατιστικῆς Φυσικῆς.

μέ θερμοδυναμικούς ὁρισμούς $\delta Q = dU + \delta W$

$\delta W = p dV - \sum_i \mu_i dN_i$

κατάσταση i με ἐνέργεια E_i N = ὁ ἀριθμός τῶν σωματιδίων $\beta := \frac{1}{k_B T}$

$\bar{n}_i$ = ὁ μέσος ἀριθμός σωματιδίων στην κατάσταση i με ἐνέργεια E_i μ = χημικό δυναμικό

Ἐννοεῖται $\# i >> N$

- Ἡ στατιστική Maxwell-Boltzmann (MB) ἀφορᾶ κλασικά σωματίδια, για τα ὁποῖα θεωροῦμε πώς δεν ὑπάρχουν κβαντισμένα ἐνεργειακά ἐπίπεδα, π.χ. οἱ δομικοί λίθοι τοῦ κλασικοῦ ἰδανικοῦ ἀερίου.

$$\boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}}} = e^{-\beta E_i} e^{\beta\mu} \qquad \text{MB}$$

Ἐπειδή $\boxed{\sum_i \bar{n}_i = N} \Rightarrow \sum_i e^{-\beta E_i} e^{\beta\mu} = N \Rightarrow \boxed{e^{\beta\mu} = \frac{N}{\sum_i e^{-\beta E_i}}}$

$$\left.\right\} \bar{n}_i = \frac{N e^{-\beta E_i}}{\sum_i e^{-\beta E_i}}$$

$\boxed{N}$ ἡ σχέση αὐτή καθορίζει το μ

- Ἡ στατιστική Fermi-Dirac (FD) ἀφορᾶ κβαντικά σωματίδια, τα ὁποῖα ὑπακούουν στην ἀπαγορευτική ἀρχή Pauli ὅτι μόνο ἕνα σωματίδιο μπορεῖ να καταλάβει μία κβαντική κατάσταση. ΑΚΑΤΑΔΕΚΤΑ ΣΝΟΜΠ
Τα σωματίδια αὐτά λέγονται φερμιόνια (fermions) και ἔχουν ἰδιοστροφορμή (σπιν) s ἡμιφυσικό («ἡμιακέραιο») πολλαπλάσιο $(1/2, 3/2, 5/2, \ldots)$ τῆς ποσότητας $\hbar$.
Τέτοια εἶναι π.χ. τα ἠλεκτρόνια, πρωτόνια, νετρόνια.
Για τη στατιστική FD ἰσχύει:

$$\boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}+1}} \qquad \text{FD}$$

- Ἡ στατιστική Bose-Einstein (BE) ἀφορᾶ κβαντικά σωματίδια, με την ἰδιότητα ὅτι μια κβαντική κατάσταση μπορεῖ να καταλαμβάνεται ἀπό ὁσαδήποτε σωματίδια. ΚΑΤΑΔΕΚΤΙΚΑ ΚΑΛΟΒΟΛΑ
Τα σωματίδια αὐτά λέγονται μποζόνια (bosons) και ἔχουν ἰδιοστροφορμή (σπιν) s φυσικό («ἀκέραιο») πολλαπλάσιο $(0, 1, 2, \ldots)$ τῆς ποσότητας $\hbar$.
Τέτοια εἶναι π.χ. τα φωτόνια, τα ἄτομα ${}^4_2He$, οἱ πυρῆνες τῶν ἀτόμων ${}^4_2He$.
Για τη στατιστική BE ἰσχύει:

$$\boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}-1}} \qquad \text{BE}$$

Σε σύστημα FD ή BE με σταθερό N, ή σχέση $\boxed{\sum_i \bar{n}_i = N}$ $\boxed{N}$ καθορίζει το μ. Σ2

Συνοπτικώς, λοιπόν, μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)} \begin{smallmatrix} + \\ - \\ \text{ή } \emptyset \end{smallmatrix} 1} \qquad \begin{matrix} FD \\ BE \\ MB \end{matrix}}$$

και ή σχέση

$$\boxed{\sum_i \bar{n}_i = N}$$ καθορίζει το μ

$\begin{matrix} FD \\ BE \end{matrix} \xrightarrow[T\uparrow]{n\downarrow} MB$

Οι στατιστικές FD και BE συγκλίνουν στη στατιστική MB:

- όταν ή συγκέντρωση των σωματιδίων n είναι μικρή σε σχέση με τη λεγόμενη κβαντική συγκέντρωση $n\downarrow$

$$n < n_Q \qquad n_Q = \left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

σε θερμοκρασία δωματίου ($T = 300K$), για τα πρωτόνια $n_Q \approx 1000\ nm^{-3}$, ενώ, για τα ηλεκτρόνια $n_Q \approx 0.015\ nm^{-3}$.

- σε υψηλές θερμοκρασίες $T\uparrow$

Διότι:

- όριο χαμηλής συγκεντρώσεως $\Rightarrow$ N πολύ μικρός $\Rightarrow \bar{n}_i << 1,\ \forall i \Rightarrow$

$$e^{\beta(E_i-\mu)} >> 1,\ \forall i$$

- όριο υψηλής θερμοκρασίας $\Rightarrow \beta = \frac{1}{k_B T}$ μικρό

$\Downarrow$

πολλές στάθμες υψηλής ενέργειας (και $E_i > \mu$) είναι κατειλημμένες δηλαδή ή κατανομή απλώνει ενεργειακώς με μικρές πιθανότητες καταλήψεως $\Rightarrow$

$$\bar{n}_i << 1,\ \forall i \Rightarrow$$
$$e^{\beta(E_i-\mu)} >> 1,\ \forall i$$

Στις περιπτώσεις αυτές

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)} \pm 1} \simeq \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)}}$$

δηλαδή οι FD και BE συγκλίνουν στη MB.

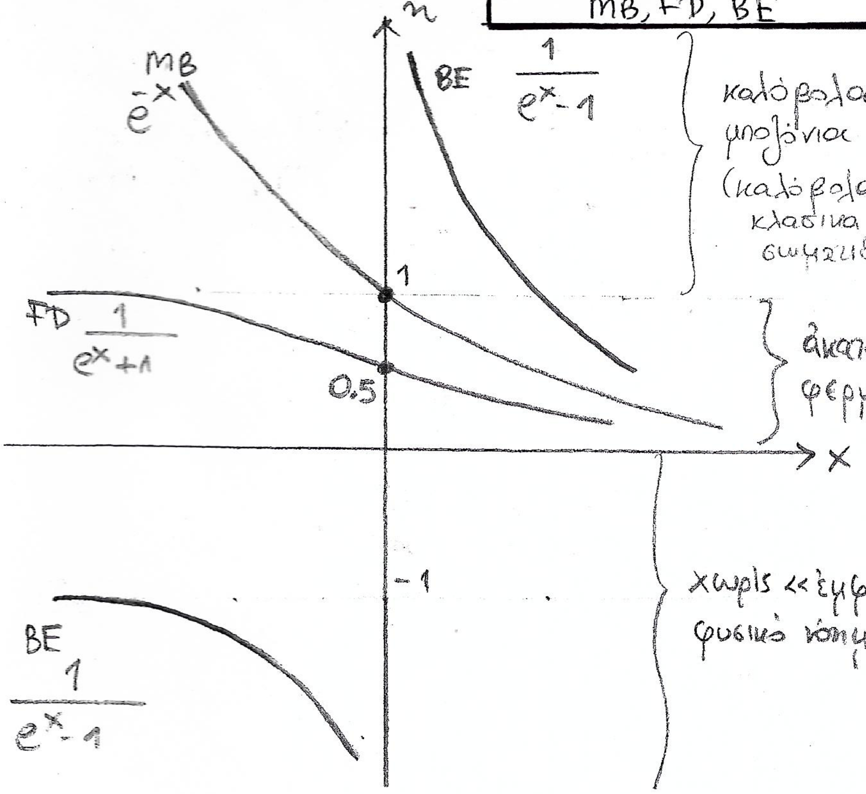
ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ MB, FD, BE

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(E_i-\mu)} \pm 1}$$ FD, BE; ή $\emptyset$ MB

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} \pm 1}$$ ή $\emptyset$

$x := \beta(E-\mu)$

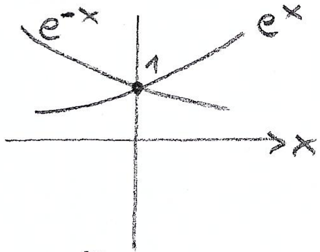
$$\boxed{\bar{n} = \frac{1}{e^{x} \pm 1} \text{ ή } \emptyset}$$



καλόβολα μποζόνια (καλόβολα κλασικά σωματίδια)

ακατάδεκτα φερμιόνια

χωρίς «εμφανές» φυσικό νόημα...



MB $\quad \bar{n} = \frac{1}{e^x} = e^{-x} > 0, \ \forall x \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

FD $\quad \bar{n} = \frac{1}{e^x+1} > 0, \ \forall x \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x+1} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x+1} = 1$

BE $\quad \bar{n} = \frac{1}{e^x-1}$

$x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow \bar{n} > 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0$

$x < 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0 \Rightarrow \bar{n} < 0$!

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x-1} = -1$

χωρίς «εμφανές» φυσικό νόημα...

$$\boxed{n_Q = \left(\frac{m k_B T}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2}}$$ κβαντική συγκέντρωση

$$\left(\frac{\cancel{kg}\, s^2}{\cancel{kg}\, m\, s^2\, m}\right)^{3/2} = \frac{1}{m^3}$$

• πρωτόνια $m \simeq 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg$ σε $T = 300K$

$$n_Q \approx \left(\frac{1.67 \cdot 10^{-27}\,kg\; 1.38 \cdot 10^{-23}\,\cancel{J}\; 300\cancel{K}}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-68}\,J^{\cancel{2}} s^2\; \cancel{K}}\right)^{3/2} \simeq 1154 \cdot \left(10^{18}\right)^{3/2} \frac{1}{m^3} \approx 10^3 \cdot 10^{27} \frac{1}{m^3} = 10^{30}\,m^{-3}$$

$$n_Q \approx 10^{30} \frac{1}{m^3} = 10^{30} \frac{1}{10^{30}\,\mathring{A}^3} = 10^{30} \frac{1}{10^{27}\,nm^3} = 1 \frac{1}{\mathring{A}^3} = 1000 \frac{1}{nm^3} = 10^{30} \frac{1}{10^6\,cm^3} = 10^{24} \frac{1}{cm^3}$$

• ηλεκτρόνια $m \simeq 9.1 \cdot 10^{-31}\,kg$ σε $T = 300K$

$$n_Q \approx \left(\frac{9.1 \cdot 10^{-31}\,kg\; 1.38 \cdot 10^{-23}\,J\; 300K}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-68}\,J^2 s^2\; K}\right)^{3/2} \simeq 14682 \left(10^{14}\right)^{3/2} \frac{1}{m^3} \simeq 15 \cdot 10^3 \cdot 10^{21} \frac{1}{m^3}$$

$$n_Q \approx 15 \cdot 10^{24} \frac{1}{m^3} = 15\; 10^{24} \frac{1}{10^{30}\,\mathring{A}^3} = 15\; 10^{24} \frac{1}{10^{27}\,nm^3} = 15 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\mathring{A}^3} = 15 \cdot 10^{-3} \frac{1}{nm^3}$$

$$= 15 \cdot 10^{24} \frac{1}{10^6\,cm^3} = 15 \cdot 10^{18} \frac{1}{cm^3}$$

Συνοψίζοντας: πρωτόνια σε 300K $\quad n_Q \simeq 10^{30} \frac{1}{m^3} = 10^{24} \frac{1}{cm^3} = 10^3 \frac{1}{nm^3} = 1 \frac{1}{\mathring{A}^3}$

ηλεκτρόνια σε 300K $\quad n_Q \simeq 15 \cdot 10^{24} \frac{1}{m^3} = 15 \cdot 10^{18} \frac{1}{cm^3} = 15 \cdot 10^{-3} \frac{1}{nm^3} = 15 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\mathring{A}^3}$

Cu πυκνότητα $\rho \simeq 9 \frac{g}{cm^3} = 9000 \frac{kg}{m^3}$ $\quad AB \simeq 63.5$

σε $63.5\,g$ έχουμε $6.022 \cdot 10^{23}$ άτομα

$9\,g$ $\quad \frac{9}{63.5} \cdot 6.022 \cdot 10^{23}$ άτομα $\longrightarrow 1\,cm^3$

Κάθε άτομο Cu έχει 1 «ελεύθερο» ηλεκτρόνιο

$$n_{ηλεκτρ} \simeq \frac{9}{63.5}\, 6.022 \cdot 10^{23} \frac{1}{cm^3} \approx 0.85 \cdot 10^{23} \frac{1}{cm^3} \gg 15 \cdot 10^{18} \frac{1}{cm^3} = n_Q$$

Άρα τα ηλεκτρόνια του Cu δεν μπορούν να περιγραφτούν κλασικώς.