Αποδείξαμε ήδη ότι $\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$. Γνωρίζουμε ότι $\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_BT}-1}$

$\boxed{\text{ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΚΠΟΜΠΩΝ}}$

μη συνεκτική διεργασία

$$\frac{dW^{αυθ}_{εκπ}}{dW^{εξ}_{εκπ}} = \frac{A_{21}\cancel{dt}}{B_{21}\rho(\nu,T)\cancel{dt}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{c^3}{8\pi h\nu^3}\left(e^{h\nu/k_BT}-1\right) = e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1>0$$

συνεκτική διεργασία (τα φωτόνια που παράγονται έχουν ίδια φάση)

Άρα, αν θέλουμε περισσότερη συνοχή, θα πρέπει $\nu \searrow$ ($\lambda \nearrow$)

ή $T \nearrow$

δηλαδή όσο το δυνατόν μικρότερες συχνότητες (μεγαλύτερα μήκη κύματος)

κ όσο το δυνατόν μεγαλύτερες θερμοκρασίες

Αυτός είναι ένας από τους λόγους που οι πρώτες προσπάθειες για κατασκευή συσκευής που παράγει συνεκτική ΗΜ ακτινοβολία επικεντρώθηκαν στην περιοχή των μικροκυμάτων

$\lambda \sim 1cm$ MASER (microwave amplification by stimulated emission of radiation)

$\lambda \sim 500nm$ LASER

↑

light

1ο MASER 1953

σήμερα επικράτησε η ονομασία LASER ακόμα κ για μη ορατά ΗΜ κύματα π.χ. λέμε

x-LASER αντί για xASER

UV-LASER αντί για UVASER

ακόμα και atom-LASER αντί για AASER (για άτομα που είναι μποζόνια)

Αν π.χ. θέλουμε $\frac{dW^{αυθ}_{εκπ}}{dW^{εξ}_{εκπ}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 = 1 \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{k_B T}} = 2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \frac{h\nu}{k_B T} &= \ln 2 \\ c &= \lambda\nu \end{aligned}\right\} \frac{hc}{\lambda k_B T} = \ln 2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2}} \text{ ή } \boxed{T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2}}$$

$$\frac{hc}{k_B} \simeq 14{,}404 \cdot 10^{-3}\ K \cdot m$$

• για ερυθρό φως (π.χ. $\lambda = 700\ nm$)

$$T = \frac{14.404 \cdot 10^{-3}\ K\ \cancel{m}}{700 \cdot 10^{-9}\ \cancel{m}\ \ln 2} \simeq 29687\ K$$

φωτόσφαιρα Ηλίου $\sim 6000\ K$

φωτόσφαιρα αστέρων με μέγα 20πλάσια από αυτή του Ηλίου $\sim 30000\ K$

Δείτε π.χ. ένα Διάγραμμα Hertzsprung – Russell

Άρα το $\frac{dW^{αυθ}_{εκπ}}{dW^{εξ}_{εκπ}} = 1$ σε θερμοδυναμική ισορροπία είναι ανέφικτο

⇓

* Αναζήτηση λύσεων εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας

Αναστροφή Πληθυσμού (population inversion) μέσω άντλησης (pumping)

• για μικροκύματα (π.χ. $\lambda = 1\ cm$)

$$T = \frac{14.404 \cdot 10^{-3}\ K\ \cancel{m}}{10^{-2}\ \cancel{m}\ \ln 2} \simeq 2.078\ K$$

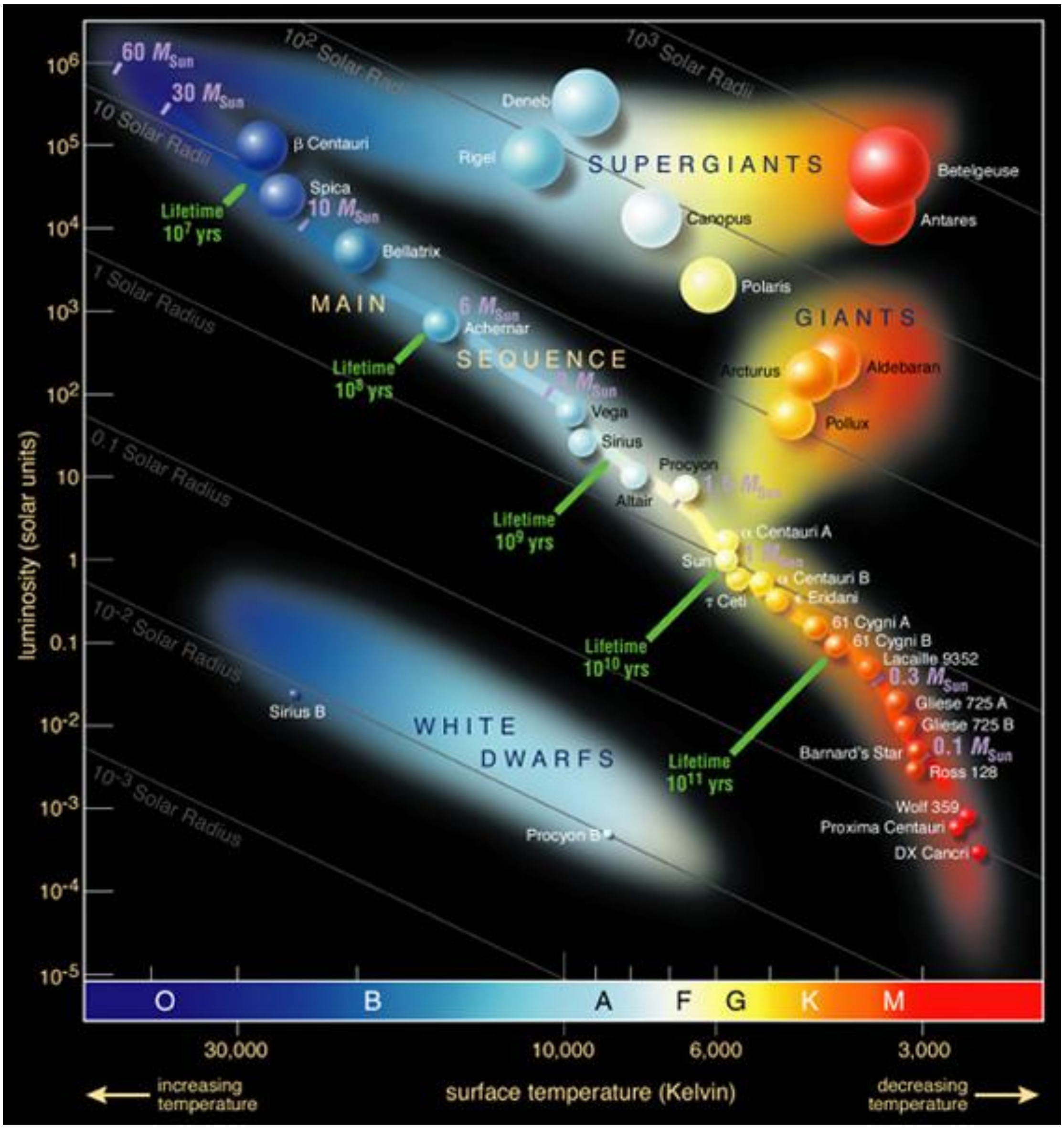
Άρα το $\frac{dW^{αυθ}_{εκπ}}{dW^{εξ}_{εκπ}} = 1$ μπορεί να επιτευχθεί σε μια πειραματικώς εφικτή θερμοκρασία

• για ραδιοκύματα FM π.χ. $\nu = 100\ MHz$ $\quad T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2}$

$$T = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\ \cancel{J}\cancel{s} \cdot 100 \cdot 10^{6}\ \cancel{Hz}\ K}{1.38 \cdot 10^{-23}\ \cancel{J}\ \ln 2} \simeq 6.927 \cdot 10^{-3}\ K \simeq 7 \cdot 10^{-3}\ K$$

• για UV π.χ. με $\lambda = 200\ nm$ $\quad T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2}$

$$T = \frac{14.404 \cdot 10^{-3}\ K\ \cancel{m}}{200 \cdot 10^{-9}\ \cancel{m}\ \ln 2} \simeq 103905\ K$$



Το διάγραμμα *Hertzsprung-Russell*,
η κατανομή της φωτεινότητας έναντι της επιφανειακής θερμοκρασίας των αστέρων .

- Για ποιό λ $\frac{dW^{αυθ}_{εκπ}}{dW^{εξ}_{εκπ}} = 1$ σε θερμοκρασία δωματίου $T \simeq 300K$;

$$T = \frac{hc}{\lambda k_B \ln 2} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{T k_B \ln 2}$$

$T = 300K$

$\frac{hc}{k_B} \simeq 14.4 \cdot 10^{-3} K \cdot m$

$$\Rightarrow \lambda \simeq \frac{14.404 \cdot 10^{-3} K m}{3 \cdot 10^{2} K \;\; 0.693} \Rightarrow$$

$\lambda \simeq 6.928 \cdot 10^{-5} m$

$\lambda \simeq 70\ \mu m$ FIR

ISO 20473 NIR $0.78\ \mu m < \lambda < 3\ \mu m$

MIR $3\ \mu m < \lambda < 50\ \mu m$

FIR $50\ \mu m < \lambda < 1000\ \mu m = 1 mm$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ

$$\frac{dW^{εξ}_{απορ}}{dW^{εξ}_{εκπ}} = \frac{B_{12}\, \rho(\nu,T)\, dt}{B_{21}\, \rho(\nu,T)\, dt} = 1$$ αν μιλάμε για σύστημα με ίδια στατιστικά βάρη $(g_1 = g_2)$

$$= \frac{g_2}{g_1}$$ αν μιλάμε για σύστημα με διαφορ. στατιστ. βάρη $(g_1 \neq g_2)$

Αλλά σε θερμοδυναμική ισορροπία $N_2 << N_1$ (...)

$$dN^{εξ}_{2 \to 1} = N_2 \cdot dW^{εξ}_{εκπ}$$
$$dN^{εξ}_{1 \to 2} = N_1 \cdot dW^{εξ}_{απορ}$$
$$\Rightarrow dN^{εξ}_{2 \to 1} << dN^{εξ}_{1 \to 2}$$

Άρα μέσω των εξαναγκασμένων διεργασιών αυξάνεται ο πληθυσμός της στάθμης 2 $\Rightarrow$ μειώνεται η πυκνότητα ακτινοβολίας [αφού υπερτερεί η (εξαναγκασμένη) απορρόφηση]. Στη συνέχεια, η αυθόρμητη εκπομπή, η οποία συνοδεύεται από μετάβαση του ηλεκτρονίου από τη στάθμη 2 στη στάθμη 1, ενισχύει τη μη συνεκτική ακτινοβολία. *

ΑΣΚΗΣΗ 5 Συλλογή ατόμων H σε θερμοδυναμική ισορροπία

(...) $E_n = \frac{-13.6\,eV}{n^2}$ ιδιοενέργειες $13.6\,eV = R_y$ Rydberg ενέργεια

(α′) $T = 4.2K$ (β′) $T = 300K$

$\simeq 0.36\,meV$

$k_B T\,(4.2K) = 0.000361914\,eV$

$k_B \simeq 1{,}381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \simeq 8.617 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{K}$

$k_B T\,(300K) = 0.025851\,eV$

$\simeq 26\,meV$

(A) $\frac{N_2}{N_1}, \frac{N_3}{N_2}, \frac{N_4}{N_3}, \frac{N_5}{N_4}$

(B) $\frac{dN^{\epsilon\varsigma}_{2\to 1}}{dN^{\epsilon\varsigma}_{1\to 2}}, \ldots$ σύγκριση

$E_1 = -13.6\,eV$
$E_2 = -3.4\,eV$
$E_3 = -1.51\,eV$

(A) $N_j = \frac{N_o}{Z} \cdot e^{-\beta E_j}$, $\beta = \frac{1}{k_B T} \Rightarrow \frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{e^{-\beta E_{i+1}}}{e^{-\beta E_i}} = e^{\beta(E_i - E_{i+1})}$

$N_i = \frac{N_o}{Z} \cdot e^{-\beta E_i}$

$$E_i - E_{i+1} = \frac{-R_y}{i^2} + \frac{R_y}{(i+1)^2} = R_y \cdot \frac{i^2 - (i+1)^2}{(i+1)^2 i^2}$$

$$= R_y \frac{(i - i - 1)(i + i + 1)}{(i+1)^2 i^2} = -R_y \cdot \frac{(2i+1)}{i^2 (i+1)^2}$$

	4.2K: $\beta(E_1 - E_2)$	300K
$E_1 - E_2 = -R_y \frac{3}{4}$	$\simeq -28177$	$\simeq -394.5$
$E_2 - E_3 = -R_y \frac{5}{36}$	$\simeq -5218$	$\simeq -73$
$E_3 - E_4 = -R_y \frac{7}{144}$	$\simeq -1826$	$\simeq -25.57$
$E_4 - E_5 = -R_y \frac{9}{400}$	$\simeq -845.3$	$\simeq -11.83$

	4.2K	300K
$\frac{N_2}{N_1}$	e^{-28177} (υπερχείλιση)	$e^{-394.5} \simeq 4.7 \cdot 10^{-172}$
$\frac{N_3}{N_2}$	$e^{-5218} \simeq 7.1 \cdot 10^{-2267}$	$e^{-73} \simeq 1.98 \cdot 10^{-32}$
$\frac{N_4}{N_3}$	$e^{-1826} \simeq 9.5 \cdot 10^{-794}$	$e^{-25.57} \simeq 7.85 \cdot 10^{-12}$
$\frac{N_5}{N_4}$	$e^{-845.3} \simeq 7.78 \cdot 10^{-368}$	$e^{-11.83} \simeq 7.28 \cdot 10^{-6}$

Δηλαδή σε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας ο πληθυσμός της επόμενης στάθμης είναι συντριπτικά μικρότερος του πληθυσμού της προηγούμενης στάθμης

B

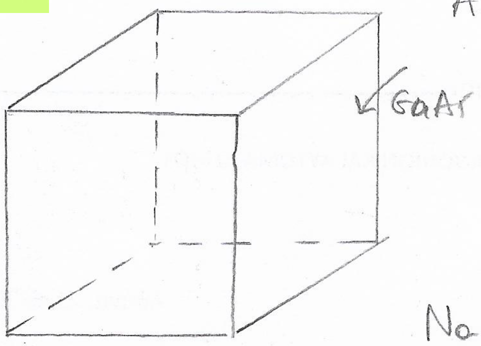
$$\frac{dN^{\epsilon\xi}_{2\to1}}{dN^{\epsilon\xi}_{1\to2}} = \frac{N_2\, dW^{\epsilon\xi}_{\epsilon\kappa\pi}}{N_1 \cdot dW^{\epsilon\xi}_{\alpha\pi o\rho}} = \frac{N_2\, B_{21}\, \rho(\nu T)\, dt}{N_1\, B_{12}\, \rho(\nu T)\, dt} = \frac{N_2}{N_1}$$

όμοιως

$$\frac{dN^{\epsilon\xi}_{i+1\to i}}{dN^{\epsilon\xi}_{i\to i+1}} = \frac{N_{i+1}}{N_i} = \ldots$$

$e^{23000} \simeq 5.93 \cdot 10^{9988}$

ΑΣΚΗΣΗ



$Al_xGa_{1-x}As$

Έστω κβαντική τελεία:

$$E_2 = -50 \text{ meV}$$

$$E_1 = -100 \text{ meV}$$

Να βρεθούν τα $\frac{N_2}{N_1}$ κ $\frac{dN^{\varepsilon\xi}_{2\to1}}{dN^{\varepsilon\xi}_{1\to2}}$ σε $T=4.2K$ κ $T=300K$

ΛΥΣΗ

$T=4.2K \Rightarrow k_BT \simeq 0.36 \text{ meV} \Rightarrow \beta(E_1-E_2) = \frac{-50 \text{ meV}}{0.36 \text{ meV}} = 138.\overline{8} \Rightarrow$

$T=300K \Rightarrow k_BT \simeq 26 \text{ meV} \Rightarrow \beta(E_1-E_2) = \frac{-50 \text{ meV}}{26 \text{ meV}} \simeq -2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\beta(E_1-E_2)} \simeq 4.8\cdot10^{-61}$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = e^{\beta(E_1-E_2)} \simeq 0.135$$ μη αμελητέο

$$\frac{dN^{\varepsilon\xi}_{2\to1}}{dN^{\varepsilon\xi}_{1\to2}} = \frac{B_{21}\,\rho(\nu,T)\,dt\cdot N_2}{B_{12}\,\rho(\nu,T)\,dt\cdot N_1} = \frac{N_2}{N_1} = \dots$$

ΑΣΚΗΣΗ $\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$ $\qquad x = \frac{h\nu}{k_B T}$

Εξετάστε:

(α') $\lim_{\nu \to 0} \rho$ (β') $\lim_{\nu \to \infty} \rho$ (γ') ν πολύ μικρές $\Rightarrow \rho = \rho_{RJ}$

(δ') ν πολύ μεγάλες $\Rightarrow \rho = \rho_W$

(α') $\lim_{\nu \to 0} \rho = \lim_{x \to 0} \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} = \rho_0 \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{e^x} = 0$

(β') $\lim_{\nu \to \infty} \rho = \lim_{x \to \infty} \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} = \rho_0 \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \rho_0 \lim_{x \to \infty} \frac{6x}{e^x} = \rho_0 \lim_{x \to \infty} \frac{6}{e^x} = 0$

(γ') ν πολύ μικρές $\Rightarrow x$ πολύ μικρό $\qquad e^x = 1 + 1 \cdot \frac{x}{1!} + 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + 1 \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots$$

οπότε $e^x - 1 \simeq x$ (πρώτης τάξεως προσέγγιση)

Άρα $\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \simeq \rho_0 \frac{x^3}{x} = \rho_0 x^2 = \rho_{RJ}$

(δ') ν πολύ μεγάλη $\Rightarrow x$ πολύ μεγάλο $\qquad e^x \gg 1$

$$\rho = \rho_0 \frac{x^3}{e^x - 1} \simeq \rho_0 \frac{x^3}{e^x} = \rho_W$$

ΑΣΚΗΣΗ $\rho_W(\nu, T) \neq \rho_{RJ}(\nu, T)$ για μικρές και μεγάλες συχνότητες δηλ. για μικρό και μεγάλο x

$\lim_{x \to \infty} \rho_W = \lim_{x \to \infty} \rho_0 \frac{x^3}{e^x} = \rho_0 \lim_{x \to \infty} \frac{6}{e^x} = 0$

$\lim_{x \to \infty} \rho_{RJ} = \lim_{x \to \infty} \rho_0 x^2 = \infty$

$\Bigg\}\ \lim_{x \to \infty} \rho_W \neq \lim_{x \to \infty} \rho_{RJ}$

$\lim_{x \to 0} \rho_W = \rho_0 \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \rho_0 x^2 = 0$

Αλλά σε μικρά x

$$\rho_W = \rho_0 \frac{x^3}{e^x} \simeq \rho_0 \frac{x^3}{1+x} \neq \rho_{RJ} = \rho_0 x^2$$