Άσκηση 4

Θεωρούμε μια πρόσμιξη σε απλό μέταλλο όγκου V με συνολικά $Z_h N$ ελεύθερα ηλεκτρόνια σθένους (Z_h: σθένος, N: αριθμός ατόμων). Η πιθανότητα σκέδασης, ανά μονάδα χρόνου, μιας κατάστασης $|\mathbf{k}\rangle$ της σφαίρας Fermi: $\langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, $k = k_F = \sqrt{2mE_F}/\hbar$, σε μια τελική κατάσταση $|\mathbf{k}'\rangle$ λόγω της πρόσμιξης δίνεται από τη σχέση $P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{2\pi}{\hbar}|T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2\delta(E_F - E_{\mathbf{k}'})$.

(1) Να δειχθεί ότι το στοιχείο του πίνακα μετάβασης γράφεται στη μορφή

$$T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -\frac{4\pi}{V}\frac{\hbar^2}{2mk_F}\sum_l (2l+1)e^{i\delta_l(E_F)}\sin\delta_l(E_F)P_l(\cos\theta) \ , \tag{1}$$

όπου δ_l οι φασικές μετατοπίσεις σκέδασης, P_l τα πολυώνυμα Legendre και θ η γωνία μεταξύ $\mathbf{k}$ και $\mathbf{k}'$.[†]

(2) Να δειχθεί ότι ο αντίστροφος χρόνος ζωής της κατάστασης $|\mathbf{k}\rangle$ είναι

$$\frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} = \sum_{\mathbf{k}'} P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{4\pi}{V}\frac{\hbar}{mk_F}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l(E_F) \ . \tag{2}$$

(3) Θεωρούμε μια μικρή συγκέντρωση, $c = N_i/N$, N_i στατιστικά τυχαία κατανεμημένων προσμίξεων. Αν υποθέσουμε ασύμφωνη σκέδαση από τα N_i ανεξάρτητα σκεδαστικά κέντρα, η παραμένουσα ειδική αντίσταση του κράματος δίνεται από τη σχέση $\rho = \frac{m}{ne^2}N_i\sum_{\mathbf{k}'}P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(1-\cos\theta)$, όπου $n = Z_h N/V$ η πυκνότητα των (ελεύθερων) ηλεκτρονίων του μητρικού μετάλλου. Να δειχθεί ότι

$$\rho = c\frac{2\pi\hbar}{e^2}\frac{2}{Z_h k_F}\sum_l (l+1)\sin^2[\delta_{l+1}(E_F) - \delta_l(E_F)] \ . \tag{3}$$

[†] Τα πολυώνυμα Legendre σχετίζονται με τις σφαιρικές αρμονικές και με την ταυτότητα $(2l+1)P_l(\cos\theta) = 4\pi\sum_m Y_{lm}(\mathbf{k})Y^*_{lm}(\mathbf{k}')$. Τα ίδια ικανοποιούν την εξίσωση ορθογωνιότητας

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x P_l(x)P_{l'}(x) = 2\delta_{ll'}/(2l+1)$$

και συνδέονται με την αναδρομική σχέση $(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$.