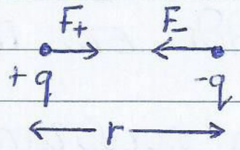
7/10/2015 **ΔΙΑΛΕΞΗ #1** (Σαουλίδου Ν.)

1ο κομμάτι: Ηλεκτροστατική



Ισχύει $\vec{F}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot q}{r^2}\cdot\hat{r}$

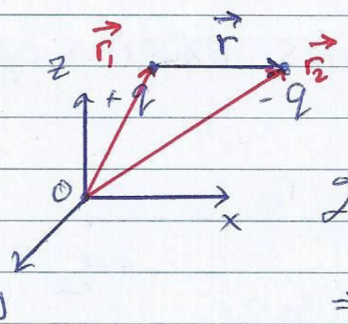
Μονάδες S.I.: $q \to C$
$r \to m$
$F \to N$

Άρα $N = \ldots\ldots \frac{C^2}{m^2}$

$\uparrow$ $\frac{Nm^2}{C^2} \rightsquigarrow$ οι μονάδες του $\frac{1}{\varepsilon_0}$.

Δηλαδή ισχύει: $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-19}\cdot\frac{C^2}{N\cdot m^2}$ (σταθερά)

Έστω ότι μεταβάλλουμε το σύστημα συντεταγμένων:



Τότε $\vec{r_1}+\vec{r}=\vec{r_2} \Rightarrow \vec{r}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$

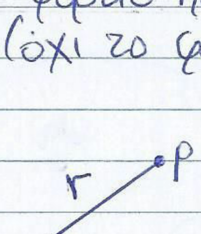
Συνεπώς, προκύπτει: $\vec{F}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2\,\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{F}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2\cdot(\vec{r_2}-\vec{r_1})}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|^3}$, αφού $\hat{r}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

Από τα παραπάνω φορτία δημιουργείται ένα ηλεκτροστατικό πεδίο. Για να περιγράψουμε το πεδίο αυτό χρειαζόμαστε ένα μέγεθος που να εξαρτάται μόνο από το φορτίο που το δημιουργεί και όχι όλα τα φορτία (όπως η δύναμη). Το μέγεθος αυτό ονομάζεται ένταση και ισχύει:

$\vec{E} = \lim_{q_0\to0}\frac{\vec{F}}{q_0}$, όπου q_0 το δοκιμαστικό φορτίο που τοποθετώ στο πεδίο (όχι το φορτίο Q που γεννά το πεδίο).

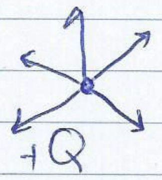
Προκύπτει: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\cdot\hat{r}$



Η φορά της έντασης εξαρτάται από τη φορά της δύναμης που ασκείται στο δοκιμαστικό φορτίο που τοποθετείται στο P (ανάλογα τα πρόσημα).

Θέλουμε η ένταση να είναι διανυσματικό μέγεθος έτσι ώστε να σχετίζεται και με τη φορά της κίνησης του δοκιμαστικού φορτίου, όταν αυτό εισέλθει στο πεδίο.

Χρησιμοποιούμε τις δυναμικές γραμμές, η πυκνότητα των οποίων χαρακτηρίζει την ένταση ενός πεδίου (όσο πιο πυκνές, τόσο πιο ισχυρό το πεδίο).

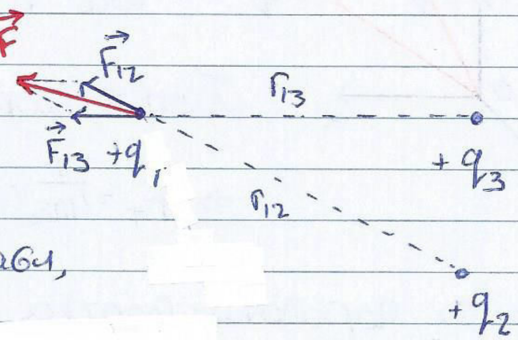


Κατά σύμβαση "βγαίνουν" από τα θετικά και "μπαίνουν" στα αρνητικά φορτία.

Η ένταση είναι εφαπτόμενη στις δυναμικές γραμμές και οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται!

Για τις εντάσεις, όπως και τις δυνάμεις, ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Ισχύει:

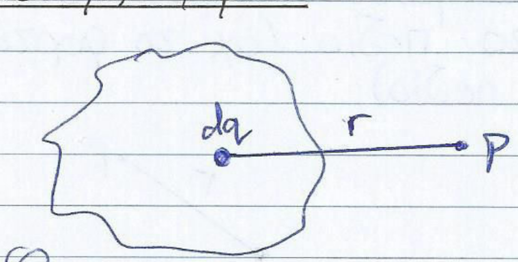
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$, π.χ.



Αντίστοιχα υπολογίζεται η ένταση, στο παραπάνω παράδειγμα.

Υπολογίζω δηλαδή την ένταση λόγω κάθε φορτίου σε σημείο P και αθροίζω διανυσματικά τις επιμέρους εντάσεις.

<u>Κατανομή Φορτίου</u>



Ο τρόπος να βρω την ένταση στο P είναι να χωρίσω την κατανομή του Q σε στοιχειώδη dq και για καθένα από αυτά προσδιορίζω τη στοιχειώδη ένταση dE.

Συνεπώς: $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2}\hat{r}$.

Ολοκληρώνω τη σχέση αυτή για να υπολογίσω τη συνολική ένταση, εφόσον η κατανομή είναι συνεχής.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{dq}{r^2}\hat{r} \quad (1)$$

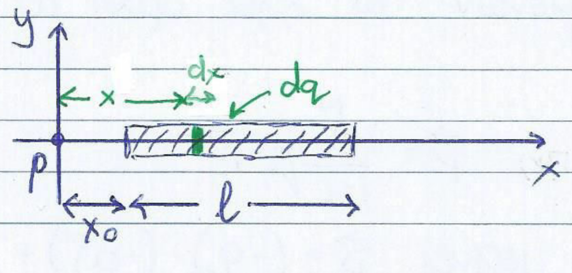
Το r δεν "βγαίνει" από το ολοκλήρωμα, διότι μπορεί η πυκνότητα του φορτίου να εξαρτάται από το r.

Ορίζω ως $\lambda(\vec{r}), \sigma(\vec{r}), \kappa(\vec{r})$ την πυκνότητα φορτίου. Είναι αντίστοιχη της πυκνότητας της μάζας που έχουμε δει. Υπάρχει γραμμική, επιφανειακή και χωρική κατανομή πυκνότητας:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(\vec{r}) &= \frac{dq}{dl} \quad (\text{γραμμική}) \\ \sigma(\vec{r}) &= \frac{dq}{dA} \quad (\text{επιφανειακή}) \\ \kappa(\vec{r}) &= \frac{dq}{dV} \quad (\text{χωρική}) \end{aligned}\right\} (2)$$

$(1), (2) \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{\kappa(\vec{r})dV}{r^2}\hat{r}$ (η πιο γενική περίπτωση, για χωρική κατανομή πυκνότητας).

$\Rightarrow$ Εφαρμογή: Έστω μια μη-αγώγιμη ράβδος μήκους l με ομοιόμορφη γραμμική κατανομή φορτίου $\lambda(\vec{r}) = c$ (σταθερή), συνολικού φορτίου Q, που βρίσκεται τοποθετημένη στον άξονα x και απέχει από την αρχή του x_0. Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται σε σημείο P που απέχει x_0 από το ένα άκρο της ράβδου (βλ. σχήμα).



Το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο, γι' αυτό χρησιμοποιούμε το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, με αρχή το σημείο P (το σημείο που μας ενδιαφέρει δηλαδή).

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{x^2}\cdot\hat{i}$$

$$E = \int dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\lambda\cdot\int_{x_0}^{x_0+l}\frac{dx}{x^2}$$ (προσοχή στα όρια ολοκλήρωσης!)

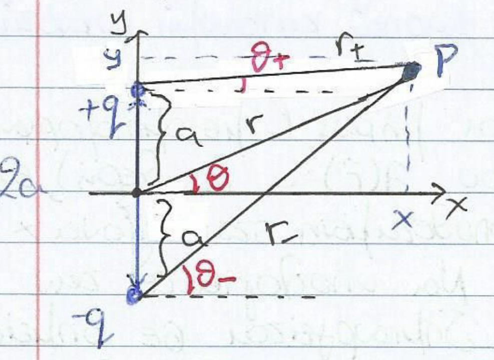
$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{x_0(l+x_0)}\hat{i}$$ (Προφανώς, $Q=\lambda\cdot l$)

Ελέγχω τις μονάδες της σχέσης που προέκυψε για να την επαληθεύσω.
Επιπλέον ελέγχω τη σχέση σε ακραίες καταστάσεις για να δω αν βγάζει νόημα.

π.χ. $\lim_{x_0\to\infty}\vec{E}=0$. Επιπλέον, όταν το $x_0\to\infty$ τότε το $x_0(l+x_0)\to x_0^2$. Αυτό υποδεικνύει πως σε άπειρη απόσταση από το σημείο P το μήκος l της ράβδου θεωρείται αμελητέο δηλαδή η ράβδος αντιμετωπίζεται σαν σημειακό αντικείμενο.

9/10/2015 ΔΙΑΛΕΞΗ #2 (Σαουλίδου Ν.)

Ηλεκτρικά Δίπολα



Δίπολο αποτελεί ένα σύστημα δύο ίσων κατά μέτρο φορτία με αντίθετα πρόσημα (αντίθετα φορτία).

Ορίζω το σύστημα συντεταγμένων να έχει αρχή το μέσο της απόστασης 2a.

Ορίζουμε ως διπολική ροπή $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i\cdot\vec{r_i}$

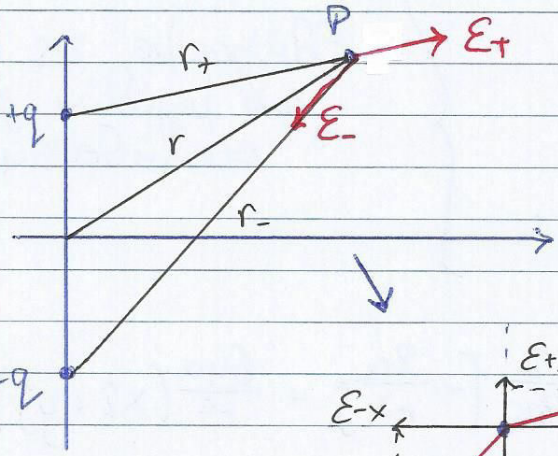
Στην προκειμένη περίπτωση ισχύει $\vec{p} = (-q)\cdot(-a\hat{j}) + q\cdot(a\hat{j}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{p} = 2aq\hat{j}$ (1)

Ισχύει λόγω γεωμετρίας: $r^2 = x^2 + y^2$

και $r_\mp^2 = x^2 + (y \mp a)^2 = r^2 + a^2 \mp 2ya$

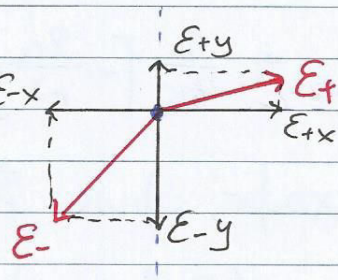
$\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta_\pm = \frac{x}{r_\pm}$, $\sin\theta_\pm = \frac{(y \mp a)}{r_\pm}$



$$\vec{\mathcal{E}}_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r_+^2}\hat{r}_+$$

$$\vec{\mathcal{E}}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r_-^2} \cdot \hat{r}_-$$

↳ το $\hat{r}_-$ ορίζεται με φορά "προς το $-q$", γι' αυτό δεν μπαίνει στον τύπο "$-$".



Προκύπτει $\mathcal{E}_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2}\right)$ και

$$\mathcal{E}_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sin\theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin\theta_-}{r_-^2}\right)$$

Αν αντικαταστήσω τα $r_\mp^2$ με $r^2 + a^2 \mp 2ya$ προκύπτει:

$$\mathcal{E}_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}}\right]$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y-a}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}}\right]$$

$$\left[x^2 + (y \pm a)^2\right]^{-3/2} = \left[r^2 + a^2 \pm 2ay\right]^{-3/2} = r^{-3}\Big[1 + \underbrace{\frac{a^2 \pm 2ay}{r^2}}_{"s"}\Big]^{-3/2}$$

Θέλω να δω τι συμβαίνει για μακρινές αποστάσεις:

Όταν λοιπόν ισχύει $r \gg a$, θα έχουμε:

$$(1+s)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}s + \frac{15}{8}s^2 - \dots$$

Κρατάω τους όρους ...s και ...s^2, γιατί από 'κει και πέρα οι όροι θα μικραίνουν πάρα πολύ.

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{6xya}{r^5} + \dots \\ E_y &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{2a}{r^3} + \frac{6y^2a}{r^5}\right) + \dots \end{aligned}\right\}$$

Ελέγχουμε τις διαστάσεις των μεγεθών για επαλήθευση!

Άρα $\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{2a}{r^3}\hat{j} + \frac{6ya}{r^5}(x\hat{i} + y\hat{j})\right]$

Από τη σχέση (1) έχουμε, όμως $\vec{p} = 2aq\hat{j}$, άρα:

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\left[\frac{3xy}{r^2}\cdot\hat{i} + \left(\frac{3y^2}{r^2} - 1\right)\hat{j}\right] \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot\left[2\cos\theta\cdot\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$

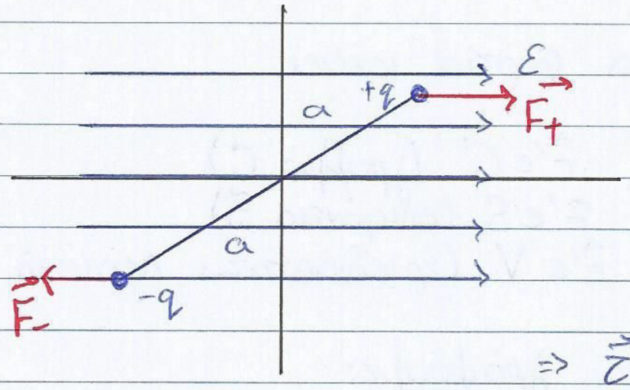
Παρατηρώ πως εδώ έχουμε $1/r^3$ αντίθετα με το $1/r^2$ που έχουμε στην περίπτωση ενός σημειακού φορτίου. Όσο αυξάνεται το r, το $1/r^3$ τείνει στο 0 γρηγορότερα από το $1/r^2$, άρα στην παραπάνω περίπτωση η ένταση μηδενίζεται γρηγορότερα όσο απομακρυνόμαστε από το δίπολο.

Σχετικά με τη διπολική ροπή...

Έστω ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο, στο οποίο τοποθετώ το δίπολο αυτό υπό τυχαία γωνία.

Βλέπε σχήμα

↓



Υπολογίζουμε τη ροπή που ασκείται στο δίπολο:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = (a\cdot\cos\theta\hat{i} + a\sin\theta\hat{j}) \times q\mathcal{E}\cdot\hat{i} -$$

$$-(-a\cdot\cos\theta\hat{i} - a\cdot\sin\theta\hat{j}) \times q\cdot\mathcal{E}\cdot\hat{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = 2aF\cdot\sin\theta(-\hat{k}) = p\cdot\mathcal{E}\cdot\sin\theta\,\hat{k} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{\mathcal{E}}$$

(σχέση ροπής στρέψης $\vec{\tau}$ και διπολικής ροπής $\vec{p}$)

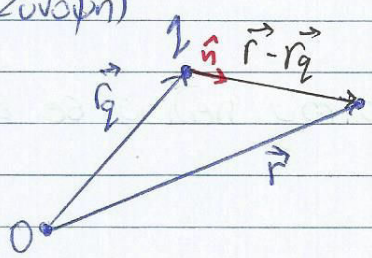
Σχετικά με την ενέργεια που παράγεται:

$$dW = -\tau\cdot d\theta \Rightarrow W = -\int_{\theta}^{\theta_0} \tau\cdot d\theta \Rightarrow \ldots \Rightarrow W = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}} = U,$$

όπου U η δυναμική ενέργεια του συστήματος.

12/10/2015 <u>ΔΙΑΛΕΞΗ #3</u> (Γ. Διαμάντης)

(Σύνοψη)



$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r_q}}{|\vec{r}-\vec{r_q}|^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r_q}|^2}\cdot\hat{n}, \text{ όπου}$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}-\vec{r_q}}{|\vec{r}-\vec{r_q}|}$$

Η ένταση του πεδίου είναι διάνυσμα που "δείχνει προς το φορτίο" όταν το φορτίο είναι αρνητικό και "φεύγει από το φορτίο", όταν το φορτίο είναι θετικό.

Τα φορτία χωρίζονται σε διακριτά και σε φορτία που κατανέμονται συνεχώς.

Για συνεχώς κατανεμημένα φορτία ισχύει:

$$dq(\vec{r}') = \begin{cases} \lambda(\vec{r}')\cdot dl, & \vec{r}' \in G \text{ (γραμμή } G) \\ \sigma(\vec{r}')\cdot ds, & \vec{r}' \in S \text{ (επιφάνεια } S) \\ \kappa(\vec{r}')\cdot dv, & \vec{r}' \in V \text{ (τρισδιάστατη περιοχή } V) \end{cases}$$

Γενικά θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_G \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dl +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_S \frac{\sigma(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}ds + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_V \frac{\kappa(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv$$

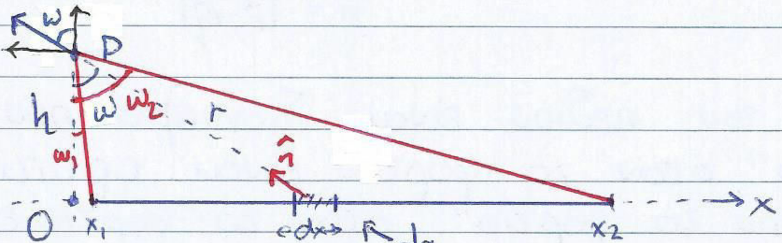
$\lambda \to C/m$, $\sigma \to C/m^2$, $\kappa \to C/m^3$ (μονάδες μέτρησης)

Η παραπάνω έκφραση αποτελεί τον νόμο της επαλληλίας για ηλεκτροστατικό πεδίο.

⇒ Εφαρμογή: Έστω ευθύγραμμο τμήμα μήκους l στο οποίο υπάρχει ομογενής γραμμική πυκνότητα φορτίου.

Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου.

Έστω τυχαίο σημείο P.



$$d\vec{E}(P) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\hat{n}, \quad dE_\perp = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cos\omega\cdot dx$$

$$dE_\parallel = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\sin\omega\cdot dx$$

Ολοκληρώνω ως προς x ανάμεσα στα x_1, x_2.
Εκφράζω τις ποσότητες είτε ως προς x είτε ως προς ω:

$x = h \cdot \tan\omega$, $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ (rad)

$dx = h \cdot \frac{1}{\cos^2\omega} \cdot d\omega$

Επίσης, $r = \frac{h}{\cos\omega}$, άρα με βάση αυτούς τους μετασχηματισμούς προκύπτει:

$$dE_{\parallel} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h} \cdot \sin\omega \cdot d\omega \quad \text{και} \quad dE_{\perp} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h} \cdot \cos\omega \, d\omega$$

$\Downarrow$ ολοκλήρωση

$$E_{\perp} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h}(\sin\omega_2 - \sin\omega_1) \quad \kappa'$$

$$E_{\parallel} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h}(\cos\omega_2 - \cos\omega_1)$$

Αν θέλω να "βγάλω" πάλι τις γωνίες και να "βάλω" αποστάσεις:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\omega_2 = \frac{x_2}{\sqrt{h^2+x_2^2}}, \quad \sin\omega_1 = \frac{x_1}{\sqrt{h^2+x_1^2}} \\ \cos\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{h^2+x_2^2}}, \quad \cos\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{h^2+x_1^2}} \end{array}\right\}$$ αντικαθιστώ στα παραπάνω και προκύπτει:

$$\boxed{\begin{array}{l} E_{\perp} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h}\left\{\frac{x_2}{\sqrt{h^2+x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{h^2+x_1^2}}\right\} \quad \text{και} \\ E_{\parallel} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left\{\frac{1}{\sqrt{h^2+x_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2+x_1^2}}\right\}. \end{array}}$$

Όπως πάντα, για επαλήθευση συγκρίνουμε τις μονάδες που προκύπτουν στα δύο μέλη της σχέσης.

i) Αν $x_2 \to \infty$ (δηλαδή έχουμε ημιευθεία), τότε $\omega_2 \to \frac{\pi}{2}$ rad

Τότε: $E_{\perp} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h} \cdot (1 - \sin\omega_1)$ κ' $E_{\parallel} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h} \cdot \cos\omega_1$

ii) Αν $x_2 \to \infty$ <u>ΚΑΙ</u> το P είναι πάνω ακριβώς από το x_1 ($\omega_1 = 0$):

Τότε: $E_{\perp} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h}$ κ' $E_{\parallel} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h}$ $(E_{\perp} = E_{\parallel})$

iii) Αν $x_1 \to -\infty$, $x_2 \to \infty$ $\left(\omega_1 \to -\frac{\pi}{2},\ \omega_2 = \frac{\pi}{2}\right)$, τότε:

$$E_\perp = 2 \cdot \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h} \Rightarrow E_\perp = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h} \quad \text{κ'} \quad E_{\parallel} = 0.$$

(Στην περίπτωση αυτή όλος ο άξονας x είναι "γεμάτος φορτίο").

iv) Για $h \to \infty$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα θα φαίνεται σαν σημείο. (φυσικά, $h >> |x_1|, |x_2|$)

Τότε $E_{\parallel} \to 0$, ενώ $E_\perp \to \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h^2} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{L}$

η απόδειξη της σημειακής συμπεριφοράς.

v) Για $h \to 0$, τότε το P θα είναι συνευθειακό με την ευθεία του φορτίου. (αλλά έξω από το ευθύγραμμο τμήμα)

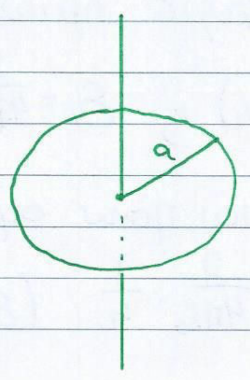
Τότε $E_{\parallel} \to \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|x_2|} - \frac{1}{|x_1|} \right)$.

Θα ισχύει $\frac{x_2}{\sqrt{h^2+x_2^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{h^2+x_1^2}} = \frac{1}{h} \left\{ \frac{x_2}{|x_2|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{x_2^2}}} - \frac{x_1}{|x_1|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+h^2/x_1^2}} \right\} =$

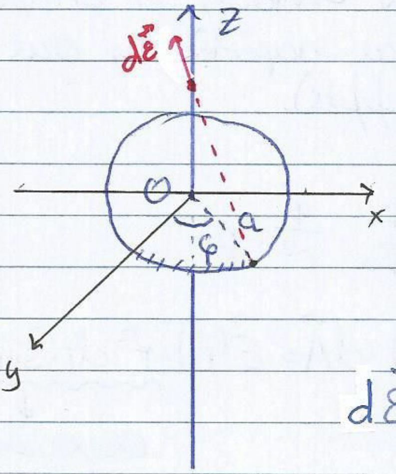
$= \frac{1}{h} \left\{ \frac{x_2}{|x_2|} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{x_2^2} + \ldots\right)}_{1 \text{ για } h \to 0} - \frac{x_1}{|x_1|} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{h^2}{x_1^2} + \ldots\right)}_{1 \text{ για } h \to 0} \right\} \to$

$\to \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{x_2}{|x_2|} - \frac{x_1}{|x_1|} \right)$, αν $x_1 > 0$ και $x_2 < 0$ ή $x_1 < 0$ και $x_2 > 0$, τότε έχουμε απειρισμό, ενώ αν $x_1 > 0$ και $x_2 > 0$ ή $x_1 < 0$ και $x_2 < 0$, τότε έχουμε μηδενισμό. (διακρίναμε περιπτώσεις)

⇒ Εφαρμογή: Δακτυλίδι ακτίνας a.



Διαλέγω σαν σύστημα συντεταγμένων ένα με αρχή O το κέντρο του δαχτυλιδιού.



$\vec r = z\hat k = (0, 0, z)$

$\vec r\,' = a\cdot\cos\varphi\,\hat i + a\cdot\sin\varphi\,\hat j$

$dq = \lambda\, dl = \lambda\cdot a\cdot d\varphi$

$$d\vec E(z\hat k) = \frac{\lambda\cdot a\cdot d\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-a\cdot\cos\varphi\,\hat i - a\cdot\sin\varphi\,\hat j + z\hat k}{(a^2+z^2)^{3/2}} \;* \Rightarrow$$

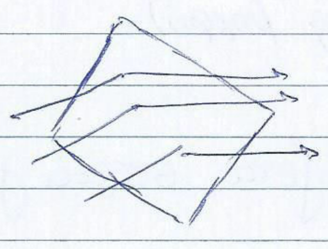
$$\Rightarrow \vec E(z\hat k) = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\cdot\hat k$$

$$* \;\vec E(z\hat k) = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{-a\cos\varphi\,\hat i - a\sin\varphi\,\hat j + z\hat k}{(a^2+z^2)^{3/2}}\cdot d\varphi \;\dots$$

14/10/2015 **ΔΙΑΛΕΞΗ #4** (Ν. Σαουλίδου)

Σχετικά με το δίπολο:

$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{\vec p}{r^3} + \frac{3\cdot(\vec p\cdot\vec r)\cdot\vec r}{r^5}\right) \to \text{χαρακτηρίζει δίπολο}$$



Η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών ενός πεδίου σχετίζεται με την ένταση του πεδίου αυτού.

Ροή: Το πλήθος των δυναμικών γραμμών που περνάει από στοιχειώδη επιφάνεια dA επί την ένταση.

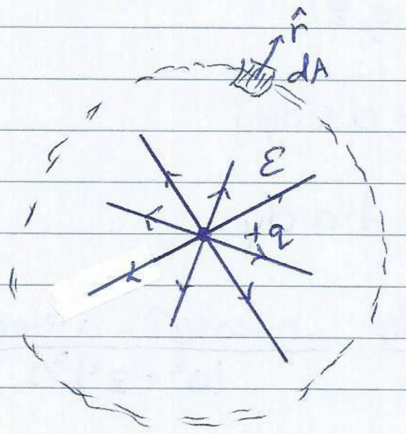
$d\Phi = \vec E\cdot d\vec A$, όπου $d\vec A = dA\cdot\hat n$, όπου $\hat n$ κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο.

Η ροή είναι μονόμετρο μέγεθος, για να υπολογίσω ροή σε επιφάνεια ολοκληρώνω:

διπλό ολοκλήρωμα

$$\Phi_{ολ} = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

Όταν $d\vec{A} \perp \vec{E}$ τότε $d\Phi = 0$ (αν δηλαδή η επιφάνεια είναι παράλληλη στις δυναμικές γραμμές).



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\hat{r}$$

$$d\Phi = \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{A} = \vec{E}(\vec{r})\cdot \underbrace{r^2\cdot \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{r}}_{\text{στοιχειώδης επιφάνεια}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\hat{r}\cdot r^2\cdot\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi\cdot\hat{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\cdot\sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi \Rightarrow \Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi = q/\varepsilon_0 = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A}}$$ Νόμος του Gauss

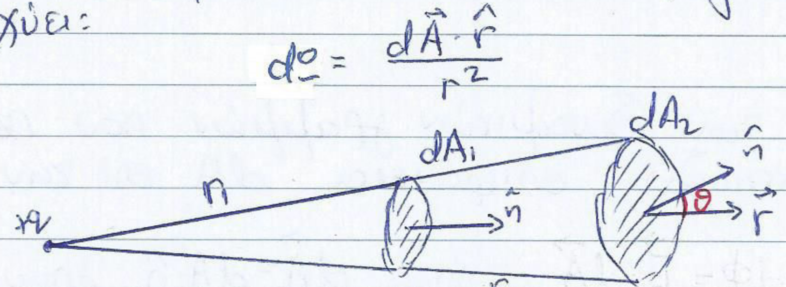
$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = q/\varepsilon_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\int_V \rho\, dV$$, όπου ρ χωρική πυκνότητα φορτίου

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0}$$ 1η σχέση ηλεκτροστατικής (σε διαφορική μορφή)

Έστω $d\Omega$ μια ποσότητα που ονομάζεται στερεά γωνία και ισχύει:

$$d\Omega = \frac{d\vec{A}\cdot\hat{r}}{r^2}$$



$$d\Omega = \frac{d\vec{A}_1\cdot\hat{r}}{r_1^2} = \frac{d\vec{A}_2\cdot\hat{r}}{r_2^2} = \frac{dA_2\cdot\cos\theta}{r_2^2} \quad (1)$$

$$d\Phi_1 = \vec{E_1}\cdot d\vec{A_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r_1^2}\cdot dA_1 \ (2)$$
$$d\Phi_2 = \vec{E_2}\cdot d\vec{A_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r_2^2}\cdot dA_2\cdot\cos\theta \ (3)$$
$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$$d\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\cdot d\Omega \qquad d\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\cdot d\Omega$$

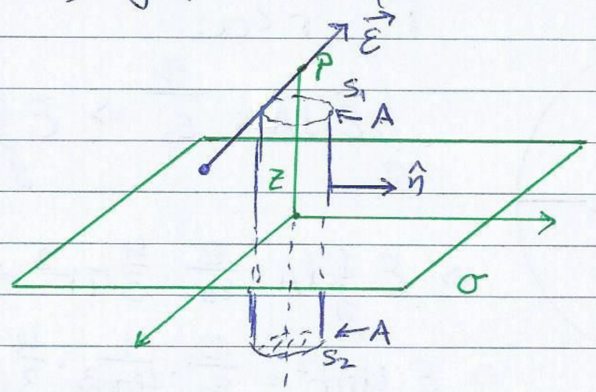
$\Downarrow$

$$d\Phi_1 = d\Phi_2 \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_2 = q/\varepsilon_0$$

Δεν εξαρτάται, δηλαδή, από το μέγεθος πως η επιφάνεια (S) είναι ακανόνιστη, εξαρτάται μόνο από την κατανομή φορτίου.

⇒ Εφαρμογή:

A: εμβαδόν διατομής



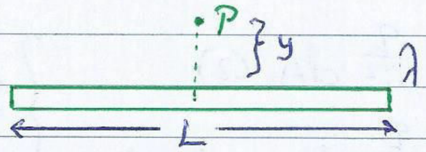
Για να χρησιμοποιήσω το νόμο του Gauss πρέπει να υπάρχει συμμετρία στην κατανομή και το σχήμα.

Από τη συμμετρία του προβλήματος προκύπτει πως η συνισταμένη ένταση θα είναι "συγκεντρωμένη" στον άξονα z.

$$\Phi_{ολ} = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi_{ολ} = \int_{S_1}\vec{E}d\vec{A} + \int_{S_2}\vec{E}d\vec{A} = \frac{A\cdot\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2E\cdot A = \frac{A\cdot\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}}$$

⇒ Εφαρμογή: Έστω ράβδος απείρου μήκους, αμελητέας ακτίνας με ομοιόμορφη γραμμική κατανομή λ. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλο το χώρο και να συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό της ράβδου πεπερασμένου μήκους L όταν πλησιάζω πολύ κοντά σε αυτήν.

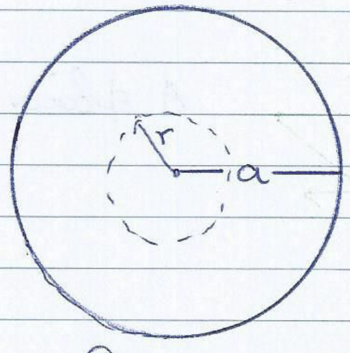


, $y \ll L$

$\Rightarrow$ βλ. σελ. 17

16/10/2015 ΔΙΑΛΕΞΗ #5

$\Rightarrow$ Εφαρμογή: Δίνεται συμπαγής σφαίρα ακτίνας a με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου (χωρική) συνολικού φορτίου q. Να βρεθεί και να απεικονιστεί γραφικά η ένταση σε όλο το χώρο.



Για $r<a$:

$$\oint_{S'} \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \oint_{S'} dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho\, dV \Rightarrow$$

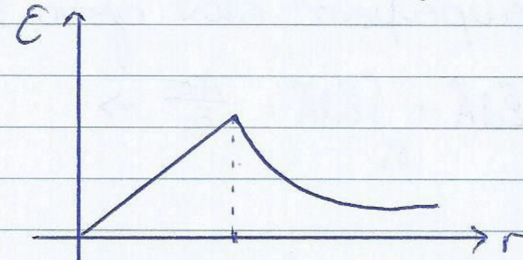
$$\Rightarrow E \cdot \oint_{S'} dA = \frac{\varrho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{4\pi a^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow$$

$$\varrho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

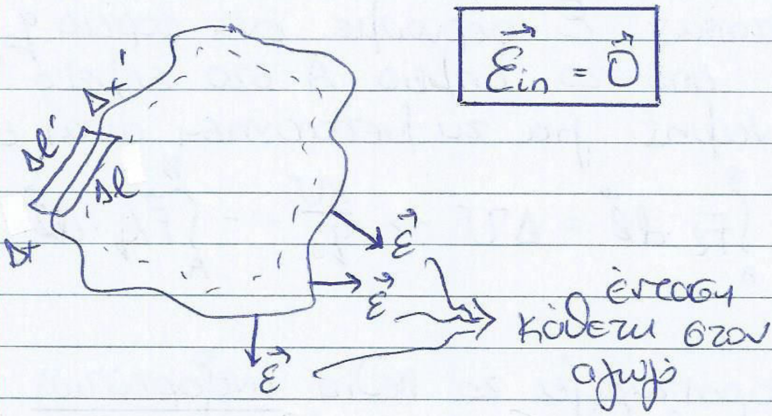
$$\Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot a^3} \cdot r^3 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \cdot r \cdot \hat{r}}$$

Ομοίως λύνω και για $r>a$, τελικά προκύπτει:



Αγωγοί

Υλικά στα οποία τα ηλεκτρόνια μπορούν να κινούνται στο εσωτερικό τους. Σε κατάσταση ισορροπίας η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν.



$$\boxed{\vec{E}_{in} = \vec{0}}$$

<u>Σημείωση:</u> Το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι διατηρητικό.

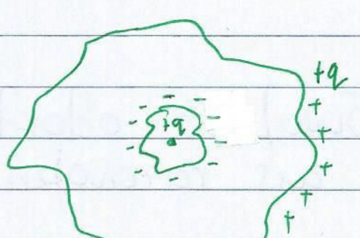
$\Downarrow$

$$\oint_\ell \frac{\vec{F}}{q} d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \underbrace{\int \vec{E} d\vec{x}^{\nearrow 0} + \int \vec{E} d\vec{x}'^{\nearrow 0}}_{\text{αλληλοαναιρούνται}} + \int \vec{E} d\vec{\ell}^{\nearrow 0,\ \text{αφού είναι μέσα στον αγωγό}} + \int \vec{E} d\vec{\ell}' = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \int \vec{E} d\vec{\ell}' = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{\ell}'$, άρα <u>ΔΕΝ</u> γίνεται να υπάρχει εφαπτομενική συνιστώσα της έντασης, παρά μόνο <u>κάθετη</u>.

Αυτό σημαίνει πως δεν μπορεί να υπάρξει κίνηση στην επιφάνεια του αγωγού (δηλαδή επάνω στην επιφάνεια του αγωγού η διαφορά δυναμικού είναι μηδέν, άρα ο αγωγός είναι ισοδυναμική επιφάνεια).

$\Rightarrow$ <u>Άσκηση:</u> Έστω αγωγός με "κούφιο" εσωτερικό. Τοποθετούμε μέσα στην κοιλότητα φορτίο q. Να βρεθεί η κατανομή φορτίου στο εσωτερικό και το εξωτερικό του αγωγού. Τι συμβαίνει όταν μετακινούμε την κατανομή του φορτίου q στο εσωτερικό της κοιλότητας;



Θα πρέπει πάντα $\vec{E}_{in} = \vec{0}$, άρα ακόμη κι αν μετακινήσουμε την κατανομή στο εσωτερικό, στο εξωτερικό θα κατανέμεται πάντα θετικά.

Σε ένα πεδίο έντασης $\mathcal{E}$ φέρνουμε ένα φορτίο q_0 το οποίο μετακινούμε από το σημείο Α στο σημείο Β. Το έργο της δύναμης για τη μετακίνηση αυτή είναι:

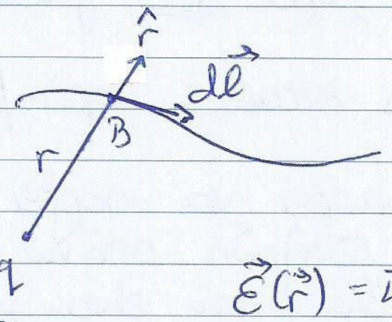
$$W = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_A^B F_e\, d\vec{l} = \Delta U \Rightarrow \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{F}/q \cdot d\vec{l} = -\int_A^B \vec{\mathcal{E}} d\vec{l}$$

Το μέγεθος $\frac{\Delta U}{q_0}$ χαρακτηρίζει το πεδίο ανεξαρτήτως του φορτίου και ονομάζεται δυναμικό (διαφορά δυναμικού).

Η διαφορά δυναμικού είναι μέγεθος μονόμετρο. Μονάδα μέτρησης του είναι το 1 Volt στο S.I.

Ισχύει: $\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l} \Rightarrow V_B - V_A = -\int_A^B \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_B = -\int_\infty^B \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l}$ (έτσι ορίζεται το δυναμικό σε σημείο, αφού θεωρούμε $V_\infty = 0$)



$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\hat{r}$$

$$V_B = -\int_\infty^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\hat{r}\cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\cdot\int_\infty^B \frac{1}{r^2}\cdot dr \Rightarrow$$

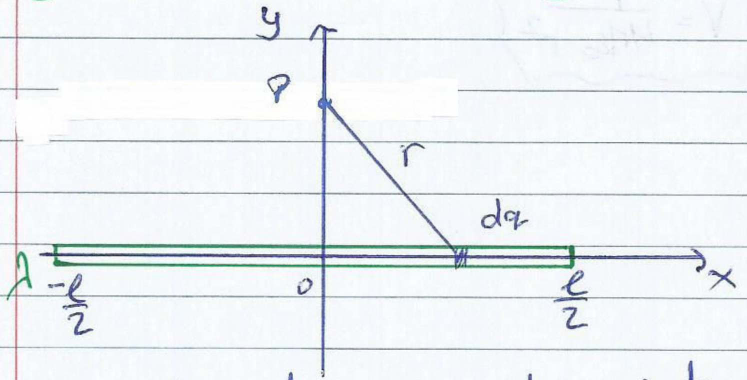
$$\Rightarrow \boxed{V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}}$$

Αντί για σημειακό φορτίο μπορώ να θεωρήσω και τυχαία κατανομή, άρα μπορώ να γράψω:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{r}$$

Για να υπολογίσω το συνολικό δυναμικό ολοκληρώνω την παραπάνω σχέση, ανάλογα της κατανομής του φορτίου.

⇒ Εφαρμογή: Θεωρούμε ράβδο μήκους ℓ που έχει ομοιόμορφη γραμμική κατανομή φορτίου λ. Να βρείτε το δυναμικό σε σημείο P που βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο και σε ύψος y. Τι συμβαίνει όταν $y \ll \ell$ και τι όταν $y \gg \ell$;



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{\lambda \cdot dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

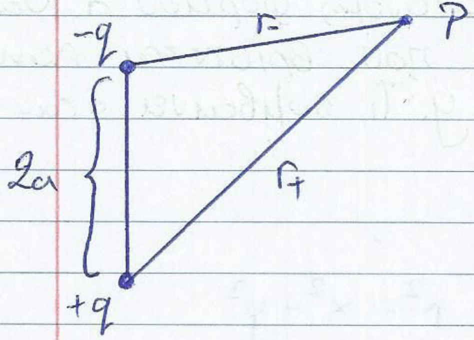
$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left[\frac{\ell/2 + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}{-\ell/2 + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}\right]$$

• Εάν $y \gg \ell$, τότε $\lim_{y \to \infty} V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \ln 1 = 0$, άρα το δυναμικό σε άπειρη απόσταση από τη ράβδο είναι 0.

• Εάν $y \ll \ell$, τότε $\lim_{y \to 0} V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \lim_{y \to 0} \ln\left(\frac{\ell/2 + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}{-\ell/2 + \sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}\right) = \infty$,

δηλαδή πολύ κοντά στη ράβδο το δυναμικό φαίνεται να τείνει στο άπειρο.

Τι συμβαίνει όταν έχουμε δίπολο, σχετικά με το δυναμικό;



Για $r \gg a$ προκύπτει:

$$\boxed{V = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}}$$

19/10/2015 ΔΙΑΛΕΞΗ #6 (Γ. Διαμάντης)

Πίσω στην άσκηση με το δαχτυλίδι...

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{a\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \cdot \hat{k} = \frac{Q\delta}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \cdot \hat{k}$$, αφού $Q\delta = 2\pi \cdot a \cdot \lambda$

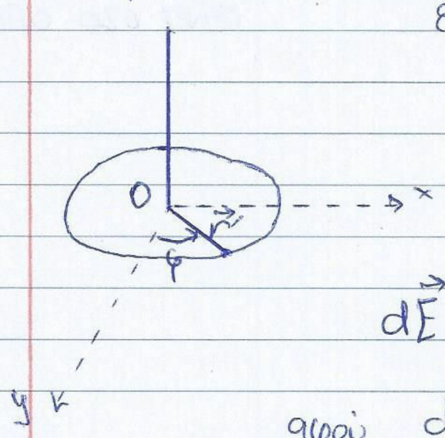
i) Εάν το κέντρο του δαχτυλιδιού βρίσκεται σε τυχαίο σημείο z_0, τότε:

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{Q\delta}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z - z_0}{(a^2+(z-z_0)^2)^{3/2}} \cdot \hat{k}$$

ii) Εάν $|z| \gg a$, τότε το δαχτυλίδι θα φαίνεται σαν σημείο:

$$\lim_{|z| \to \infty} \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{Q\delta}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{|z|^3} \cdot \hat{k} = \frac{Q\delta}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \frac{1}{z^2} \hat{k}$$

Μπορούμε να τοποθετήσουμε το δαχτυλίδι στο επίπεδο x-y, εάν η πυκνότητα φορτίου δεν είναι σταθερή.



$$\vec{r}' = a \cdot \cos\varphi \cdot \hat{i} + a \cdot \sin\varphi \cdot \hat{j}$$

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \sin\varphi$$

$$\vec{r} = z\hat{k}$$

$$d\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-a\cos\varphi\hat{i} - a\sin\varphi\hat{j} + z\hat{k}}{(a^2+z^2)^{3/2}} \cdot (\lambda_0 \cdot a) \cdot \sin\varphi \, d\varphi,$$

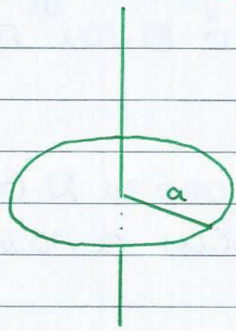
αφού $dq = \lambda \cdot dl = \lambda_0 \sin\varphi \cdot a \cdot d\varphi$

Τελικά: $\vec{E}(z\hat{k}) = -\frac{\lambda_0 \cdot a^2}{4\pi\varepsilon_0} \hat{j} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi}{(a^2+z^2)^{3/2}} \cdot d\varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\lambda_0 \cdot a^2}{4\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{j}$$

Εδώ, $Q_S = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \cdot \sin\varphi \, a \, d\varphi = 0$

⇒ Εφαρμογή: Έστω δίσκος ακτίνας α στον οποίο υπάρχει ομογενής επιφανειακή πυκνότητα σ.



$$\vec{r}' = \rho \cdot \cos\varphi \hat{i} + \rho \cdot \sin\varphi \hat{j} \quad \text{για} \quad 0 \le \rho \le a$$

$$\vec{r} = z\hat{k}$$

$$dq = \sigma \cdot \underbrace{\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi}_{ds}$$

Τότε, $\vec{E}(z\hat{k}) = \underbrace{\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi}_{Q_\Delta} \cdot \frac{-\rho\cos\varphi \hat{i} - \rho \sin\varphi \hat{j} + z\hat{k}}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_0^a \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \cdot z\hat{k} = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot z\hat{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{a^2} \frac{dt}{[t+z^2]^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot z\hat{k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{t+z^2}}\right]_0^{a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z\hat{k} \cdot \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \hat{k} \cdot \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right].$$

$$Q_\Delta = \sigma \cdot \pi \cdot a^2$$

(i) $|z| \gg a$

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \hat{k} \cdot \frac{z}{|z|} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}}}\right) \simeq \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \hat{k} \cdot \frac{z}{|z|} \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) \simeq \frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sigma}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \hat{k} \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \frac{1}{z^2} \Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) \simeq \frac{Q_\Delta}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \hat{k}$$

(ii) Εάν $a \to \infty$ είναι σαν να έχουμε φορτίο σε όλο το επίπεδο x-y. Τότε:

$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \hat{k} \cdot \frac{z}{|z|}$, αφού $a \to \infty \Rightarrow \frac{1}{a^2} \to 0$

iii) Όταν $z \to 0_+$, τότε $\vec{\mathcal{E}}(0_+\hat{k}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$

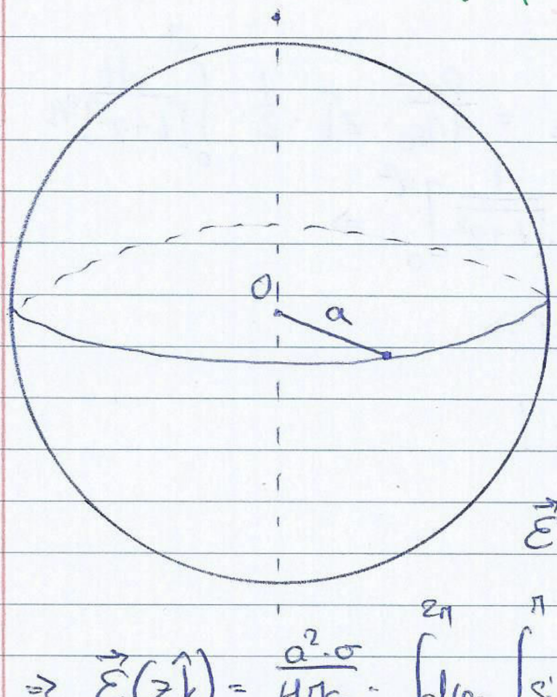
Όταν $z \to 0_-$, τότε $\vec{\mathcal{E}}(0_-\hat{k}) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$

Σε αντίθεση με αυτό που είχε προκύψει για τη γραμμή, το φορτίο δεν απειρίζεται, αφού το όριο είναι πεπερασμένο.

$\vec{\mathcal{E}}(0_+\hat{k}) - \vec{\mathcal{E}}(0_-\hat{k}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k}$ → θα προκύπτει και από το N. Gauss.

Είναι η ασυνέχεια που προκύπτει στην κάθετη συνιστώσα.

⇒ <u>Εφαρμογή</u>: Έστω σφαίρα ακτίνας a με ομογενή επιφανειακή πυκνότητα σ. Να υπολογιστεί το ηλ. πεδίο σε όλο το χώρο.



$\vec{r} = z\hat{k}$

$\vec{r}' = a\cdot\cos\varphi\sin\theta\hat{i} + a\sin\varphi\sin\theta\hat{j} + a\cdot\cos\theta\hat{k}$

$0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$

$dq = \sigma \cdot \underbrace{a^2 \cdot \sin\theta d\theta d\varphi}_{ds}$

$$\vec{\mathcal{E}}(z\hat{k}) = \frac{a^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}}(z\hat{k}) = \frac{a^2\cdot\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \frac{-a\cos\varphi\sin\theta\hat{i} - a\sin\varphi\sin\theta\hat{j} + (z-a\cos\theta)\hat{k}}{(a^2+z^2-2az\cos\theta)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}}(z\hat{k}) = \frac{2\pi\sigma a^2}{4\pi\varepsilon_0}\hat{k}\cdot\int_0^{\pi} \frac{z-a\cos\theta}{[a^2+z^2-2az\cos\theta]^{3/2}}\cdot\sin\theta d\theta$$

Θέτω $t = \cos\theta \Rightarrow dt = -\sin\theta d\theta$, προκύπτει:

$$\vec{\mathcal{E}}(z\hat{k}) = \frac{2\pi\sigma a^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\hat{k}\cdot\int_{-1}^{1} \frac{z-at}{[a^2+z^2-2azt]^{3/2}}dt \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma a^2}{2\varepsilon_0}\hat{k}\left\{\frac{1}{az}\left[\frac{z-a}{|z-a|}-\frac{z+a}{|z+a|}\right]-a\cdot\int_{-1}^{1}\frac{dt}{(a^2+z^2-2azt)^{1/2}}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma a^2}{2\varepsilon_0}\hat{k}\left\{\frac{1}{az}\left[\frac{z-a}{|z-a|}-\frac{z+a}{|z+a|}\right]-a\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{-2az}\cdot\sqrt{a^2+z^2-2azt}\right)\Big|_{-1}^{1}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma a^2}{2\varepsilon_0}\hat{k}\cdot\left\{\frac{1}{az}\left[\frac{z-a}{|z-a|}-\frac{z+a}{|z+a|}\right]-\frac{1}{az^2}\left[|z-a|-|z+a|\right]\right\}$$

(i) Εάν $|z|>a$, δηλ. $z>a$ ή $z<-a$, τότε:

$$\vec{E}(z\hat{k}) = -\frac{1}{az^2}\cdot\frac{\sigma\cdot a^2}{2\varepsilon_0}\hat{k}\cdot\left(|z-a|-|z+a|\right)$$

- $z>a \Rightarrow |z-a|-|z+a| = z-a-z-a = -2a$, $\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^2}\hat{k}$
- $z<-a \Rightarrow |z-a|-|z+a| = a-z+z+a = 2a$, $\vec{E}(z\hat{k}) = -\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^2}\hat{k}$

Όμως $Q_\Sigma = 4\pi\sigma a^2$, άρα προκύπτει:

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \begin{cases} \frac{Q_\Sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\hat{k}, & z>a \\ -\frac{Q_\Sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{z^2}\hat{k}, & z<-a \end{cases}$$ (ένταση εκτός σφαίρας)

(ii) Εάν $|z|<a$, δηλ. $-a<z<a$, τότε:

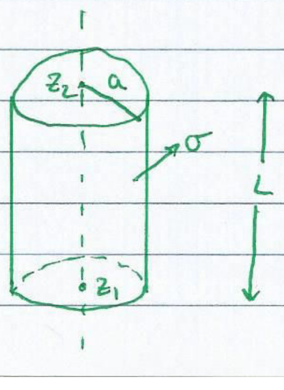
$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma a^2}{2\varepsilon_0}\hat{k}\cdot\left\{\frac{1}{az}\cdot(-2)-\frac{1}{az^2}(a-z-z-a)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma a^2}{2\varepsilon_0}\hat{k}\cdot\left\{-\frac{2}{az}+\frac{2}{az}\right\} \Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = 0$$

(ένταση εκτός σφαίρας)

Άρα εκτός της σφαίρας το πεδίο είναι στη μορφή Coulomb, ενώ εντός της σφαίρας η ένταση είναι μηδέν.

⇒ <u>Άσκηση</u>:



Να υπολογισθεί η ένταση στον άξονα z.

<u>Απάντηση</u>: $\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\hat{k}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+(z_2-z)^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^2+(z_1-z)^2}}\right]$

<u>Λύση:</u> Ισχύει $\vec{r}' = a\cdot\cos\varphi\hat{i} + a\cdot\sin\varphi\hat{j} + z'\hat{k}$, $z_1 \leq z' \leq z_2$

Εδώ $\vec{r} = z\hat{k}$, συνεπώς $\vec{r}-\vec{r}' = -a\cos\varphi\hat{i} - a\sin\varphi\hat{j} + (z-z')\hat{k}$

Άρα $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{a^2+(z-z')^2}$

Επιπλέον, $dq = \sigma\cdot a\, d\varphi\cdot dz'$

$$\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{a\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int_{z_1}^{z_2} dz'\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{a\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int_{z_1}^{z_2} dz'\,\frac{-a\cos\varphi i - a\sin\varphi j + (z-z')\hat{k}}{[a^2+(z-z')^2]^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{2\pi a\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\hat{k}\cdot\int_{z_1}^{z_2}\frac{z-z'}{[a^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,dz'$$

Θέτω $\xi = \frac{1}{[a^2+(z-z')^2]^{1/2}} \Rightarrow d\xi = \frac{z-z'}{[a^2+(z-z')^2]^{3/2}}\,dz'$

Άρα $\vec{E}(z\hat{k}) = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\cdot[\xi] \Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\cdot\left[\frac{1}{[a^2+(z-z')^2]^{3/2}}\right]_{z_1}^{z_2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E}(z\hat{k}) = \frac{a\cdot\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}\cdot\left[\frac{1}{[a^2+(z-z_2)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[a^2+(z-z_1)^2]^{1/2}}\right]$$

21/10/2015 ΔΙΑΛΕΞΗ #7 (Ν. Σαουλίδου)

$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow dV = -(E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k})\cdot(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) \Rightarrow$

$\Rightarrow dV = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)\ (1)$

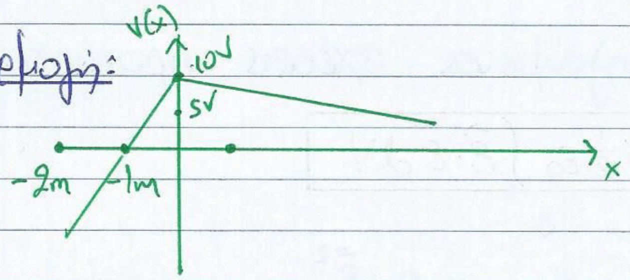
Αλλά $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)(2)$

$(1),(2) \Rightarrow \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V}$$

$\Rightarrow$ Εφαρμογή:

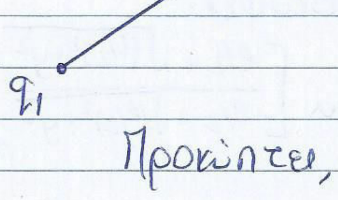


Πού μεγιστοποιείται το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου;

Στα αριστερά ($x<0$), διότι η κλίση είναι μεγαλύτερη και είναι γνωστό πως η κλίση (ρυθμός μεταβολής) είναι η ένταση.

Γνωρίζουμε πως $\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, άρα συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις προκύπτει:

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$



$U_{12} = q_2 \cdot \Delta V_{12} = q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{r_{12}} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$U_{21} = q_1 \cdot \Delta V_{21} = q_1 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{r_{21}} = \frac{q_1 q_2}{r_{21}}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

Προκύπτει, δηλαδή, $U_{12} = U_{21}$.

Αν το γενικεύσουμε για πολλά φορτία, προκύπτει:

$U = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ ή $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$

Εάν από τα διακριτά φορτία γενικεύσουμε σε συνεχείς κατανομές:

$$U = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\iint \frac{\rho(\vec{r})\cdot\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV\,dV'$$

<u>Σημείωση:</u> Το 1/2 προστίθεται ώστε να μην διπλομετρήσω.

Το παραπάνω γράφεται:

$$U = \frac{1}{2}\cdot\iint \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV}\cdot\rho(\vec{r}')\cdot dV' \Rightarrow$$

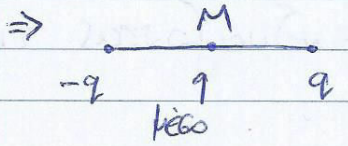
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\int V(r)\cdot\rho(\vec{r}')\cdot dV'$$

Με βάση τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V \vec{E}\cdot\vec{E}\,dV}$$

$$\Downarrow$$

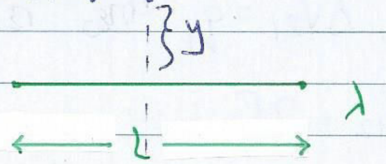
$U = \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\,dV$, η ποσότητα $\frac{\varepsilon_0\cdot E^2}{2}$ εκφράζει την ενέργεια ανά μονάδα όγκου σε οποιοδήποτε φυσικό σύστημα και ονομάζεται πυκνότητα ενέργειας. Ισχύει, δηλαδή, $w_E = \frac{\varepsilon_0\cdot E^2}{2}$.

⇒ 

Τι έργο δαπανούμε για να τοποθετήσουμε ένα σωματίδιο από το άπειρο στο Μ;

$V_\infty = 0$, $V_M = 0$, άρα $W = 0$.

⇒ <u>Εφαρμογή:</u>



Είχε προκύψει:

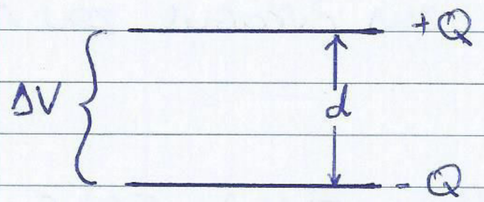
$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{\ell/2+\sqrt{(\ell/2)^2+y^2}}{-\ell/2+\sqrt{(\ell/2)^2+y^2}}\right]$$

Αν παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $V(y)$ ως προς y θα προκύψει η συνάρτηση $E(y)$.

Θα προκύψει τότε:

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y} \cdot \frac{\ell/2}{\sqrt{(\ell/2)^2 + y^2}}.$$

<u>Πυκνωτές</u>

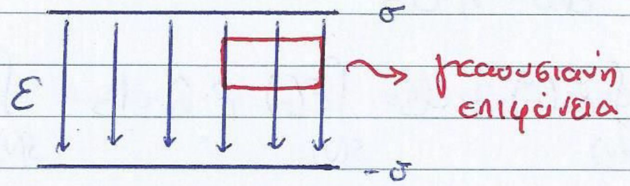


Οι πυκνωτές είναι χρήσιμοι διότι σε αυτούς αποθηκεύουμε ενέργεια την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αργότερα με την αποφόρτισή του.

Ορίζουμε τη χωρητικότητα (C) του πυκνωτή για την οποία ισχύει:

$$Q = C \cdot \Delta V \quad (I)$$

Μονάδες: $Cb/V = F$ (Farad)



Προκύπτει από τον νόμο του Gauss πως:

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

Από τη σχέση $dV = \vec{E} d\vec{\ell}$ θα προκύψει: $\Delta V = -\mathcal{E} \cdot d \quad (2)$

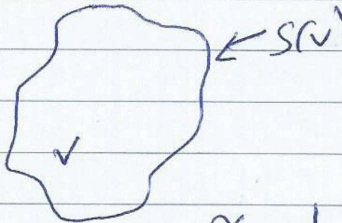
Από τις σχέσεις (1), (2) η σχέση (I) γίνεται:

$$\sigma A = C \cdot \mathcal{E} d \Rightarrow \sigma A = C \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d \Rightarrow \boxed{C = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d}}$$

Άρα η χωρητικότητα του πυκνωτή εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του.

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε και με κυλινδρικούς/σφαιρικούς πυκνωτές.

23/10/2015 ΔΙΑΛΕΞΗ #8 (Γ. Διαμάντης)



Νόμος Gauss: $\oint_{S(V)} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot Q_V$

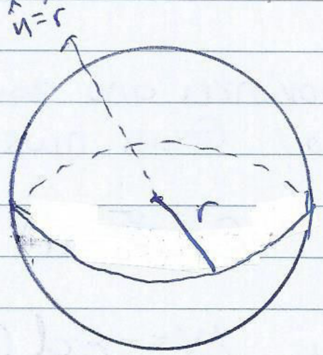
Χρησιμοποιείται όταν έχουμε περιπτώσεις συμμετρίας για τον υπολογισμό της έντασης του πεδίου.

1. Σφαιρική Συμμετρία

Ισχύει για δυναμικό $V(r)$, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r) = E(r)\cdot\hat{r}$

Μπορούμε να έχουμε επιφανειακή ή χωρική κατανομή (σ ή κ αντίστοιχα).

Εφαρμόζουμε το νόμο της ηλεκτρικής ροής για σφαίρα:



$d\vec{s} = \hat{n}\cdot ds$

$\oint_{S(r)} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\cdot\hat{n}\cdot ds = \int_{S(r)} \mathcal{E}(r)\cdot\hat{r}\cdot\hat{n}\cdot ds = \int_{S(r)} \mathcal{E}(r)\cdot ds =$

$\mathcal{E}(r)\cdot 4\pi r^2$, αφού $ds = r^2 \sin\theta\, d\theta\cdot d\varphi$.

Όμως $\mathcal{E}(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot Q_V \Rightarrow \mathcal{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot Q_V\cdot\frac{1}{r^2}$

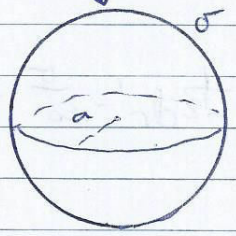
$\Rightarrow$ Έστω φορτίο q στην αρχή των αξόνων, μπορεί να προκύψει και από το νόμο του Gauss η ένταση και το δυναμικό:

$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\hat{r}$, $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$

$\Rightarrow$ Εφαρμογή: Έστω σφαίρα πυκνότητας σ και ακτίνας a. Να υπολογιστεί η ένταση για: i) $r<a$ (εντός σφαίρας)

ii) $r>a$ (εκτός σφαίρας)

φορτίο στην επιφάνεια



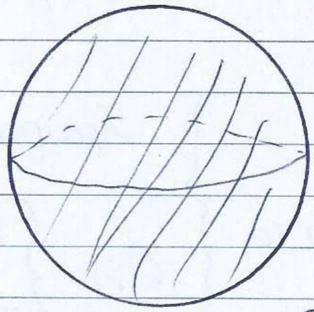
σ

(i) $r<a$: $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot \underbrace{Q_V(r)}_{0} \Rightarrow E(r)=0$

(επειδή το φορτίο είναι στην επιφάνεια)

(ii) $r>a$: $E(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\underbrace{(4\pi a^2\sigma)}_{Q} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\cdot\frac{a^2}{r^2}$

⇒ Εφαρμογή: Έστω σε σφαίρα ακτίνας a έχουμε ομογενή χωρική πυκνότητα φορτίου κ. Να υπολογιστεί η ένταση του πεδίου σε όλο το χώρο.



Ισχύει, όπως έχει αποδειχθεί,

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot Q_V(r)$$

i) $r<a$: $Q_V(r) = \kappa\cdot\frac{4\pi r^3}{3}$

$E(r) = \kappa\cdot\frac{r}{3\epsilon_0}$, δηλαδή μέσα στη σφαίρα αυτή η συνάρτηση είναι γραμμική

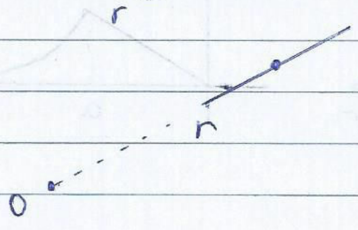
(ii) $r>a$: $Q_V(r) = \kappa\cdot\frac{4\pi a^3}{3}$

Άρα $E(r) = \frac{\kappa}{3\epsilon_0}\cdot\frac{a^3}{r^2}$.

Για τις προηγούμενες περιπτώσεις μπορούμε να υπολογίσουμε και το αντίστοιχο δυναμικό.

Θεωρούμε πως για πεπερασμένη κατανομή φορτίου το δυναμικό μηδενίζεται στο άπειρο.

$$V(r) = \int_r^{\infty} E(r')dr'$$



$d\vec{l} = \hat{r}\cdot dr'$

$\vec{E}(\vec{r}') = E(r')\cdot\hat{r}$

Για την Εφαρμογή #1:

i) Για $r<a$, $V(r) = \int_r^a 0\,dr' + \int_a^{\infty} E(r')dr'$

$\Rightarrow V(r) = \int_a^{\infty}\frac{\sigma}{\epsilon_0}\cdot\frac{a^2}{r'^2}dr' \Rightarrow$

$\Rightarrow V(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot a = \text{const.}$

(ii) Για $r>a$: $V(r) = \int_r^\infty E(r')\cdot dr' = \int_r^\infty \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{a^2}{r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{a^2}{r}$

Για την εφαρμογή #2:

(i) Για $r<a$: $V(r) = \int_r^a \frac{k}{3\varepsilon_0} r' dr' + \int_a^\infty \frac{k}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{a^3}{r'^2}dr' \Rightarrow$

$\Rightarrow V(r) = \frac{k}{6\varepsilon_0}\cdot(a^2 - r^2) + \frac{k}{3\varepsilon_0} a^2$

(ii) Για $r>a$: $V(r) = \int_r^\infty \frac{k}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{a^3}{r'^2}dr' \Rightarrow V(r) = \frac{k}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{a^3}{r}$

ΣΥΝΟΨΗ:

Σημειακό Φορτίο

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\hat{r}$

$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$

Εάν $q>0$

Σφαίρα #1

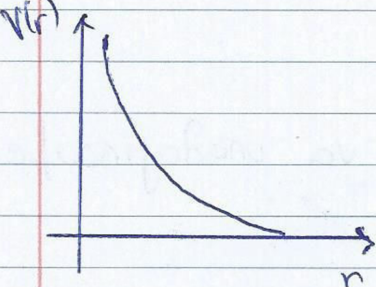
$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & r<a \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{a^2}{r^2}\hat{r}, & r>a \end{cases}$

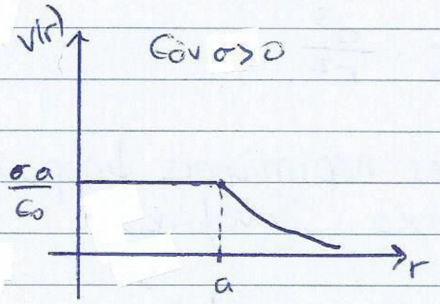
$V(r) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot a, & r<a \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\frac{a^2}{r}, & r>a \end{cases}$

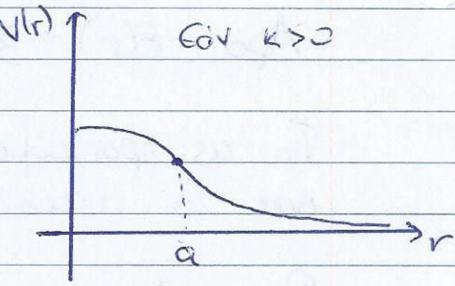
Σφαίρα #2

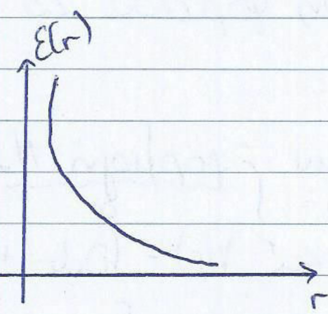
$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{k}{3\varepsilon_0}\cdot r\cdot\hat{r}, & r<a \\ \frac{k}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{a^3}{r^2}\hat{r}, & r>a \end{cases}$

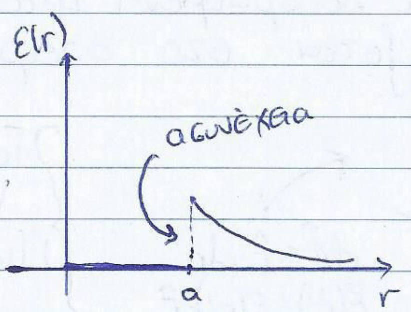
$V(r) = \begin{cases} \frac{k}{2\varepsilon_0}a^2 - \frac{k}{6\varepsilon_0}r^2, & r<a \\ \frac{k}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{a^3}{r}, & r>a \end{cases}$

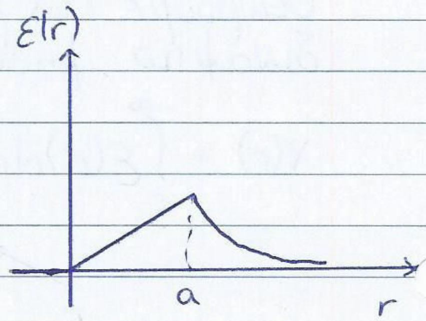






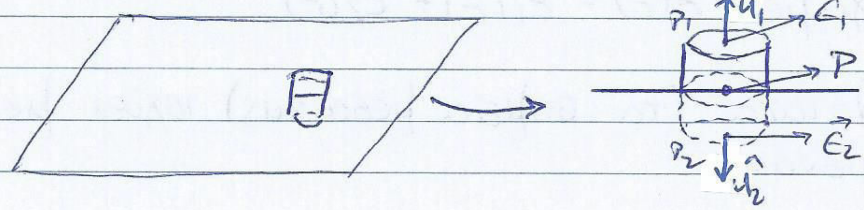






ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Έστω επιφάνεια με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.



Από το νόμο του Gauss: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_r}{\epsilon_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E}_1\cdot\hat{u}_1\cdot\Delta S + \vec{E}_2\cdot\hat{u}_2\cdot\Delta S + \underbrace{\Phi_\Pi}_{\text{στα τοιχώματα (παράπλευρη επιφάνεια)}} = \frac{\sigma(P)\cdot\Delta S}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

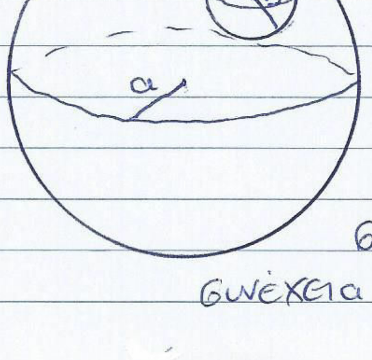
$$\Rightarrow (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\cdot\hat{u}_1\cdot\Delta S + \Phi_\Pi = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0}\cdot\Delta S$$

Παίρνουμε συμμετρικά το όριο, ώστε η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου να τείνει στο 0. Τότε, $\vec{E}_1 = \vec{E}(P_+)$, $\vec{E}_2 = \vec{E}(P_-)$ και $\Phi_\Pi = 0$, αφού μηδενίστηκε και η ίδια η παράπλευρη επιφάνεια. Έτσι προκύπτει:

$$(\vec{E}(P_+) - \vec{E}(P_-))\hat{u}_1\cdot\Delta S = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0}\cdot\Delta S \Rightarrow$$

$$[\vec{E}(P_+) - \vec{E}(P_-)]\,\hat{u}_1 = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0},$$ άρα παρουσιάζεται στην επιφάνεια ασυνέχεια στην κάθετη συνιστώσα.

$\Rightarrow$



κοιλότητα μέσα σε σφαίρα γεμάτη με φορτίο.

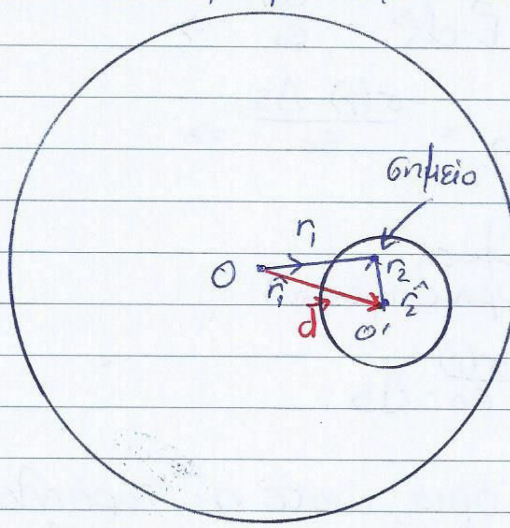
Θα υπολογίσουμε πρώτα ένταση σφαίρας με πυκνότητα φορτίου κ και στη συνέχεια ένταση σφαίρας με πυκνότητα φορτίου -κ.

Η πρώτη σφαίρα θα έχει ακτίνα a, ενώ η δεύτερη σφαίρα θα έχει ακτίνα b.

Έτσι, θα έχουμε $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$

Για την κοιλότητα (τα σημεία μέσα της) ισχύει με βάση τα προηγούμενα:

$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{k}{3\varepsilon_0} r_1 \cdot \hat{r}_1$ και $\vec{E}_2(\vec{r}) = -\frac{k}{3\varepsilon_0} r_2 \cdot \hat{r}_2$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k}{3\varepsilon_0}\left(r_1 \hat{r}_1 - r_2 \hat{r}_2\right) \Rightarrow$$

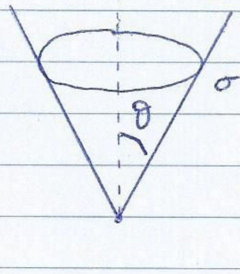
$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{k}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{k}{3\varepsilon_0} \cdot \vec{d}$$

Αν οι σφαίρες ήταν ομόκεντρες τότε το παραπάνω διάνυσμα θα είχε τιμή μηδέν, δηλαδή εντός της σφαίρας ακτίνας b η ένταση του πεδίου θα ήταν 0.

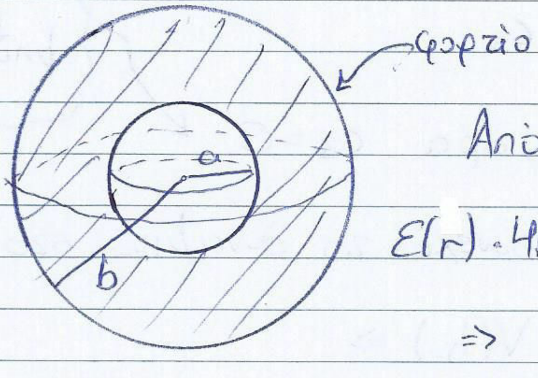
26/10/2015 **ΔΙΑΛΕΞΗ #9** (Γ. Διαμάντης)

Έστω κώνος με πυκνότητα φορτίου που εξαρτάται μόνο από τη γωνία θ. Τότε $\vec{E}(\vec{r}) = E(\theta) \cdot \hat{\theta}$



Σε μια τέτοια περίπτωση το επιχείρημα της συμμετρίας στέκει (εξάρτηση από μία μόνο παράμετρο το θ) όμως ο υπολογισμός της έντασης με το Νόμο του Gauss δεν είναι πρακτική διαδικασία.

=> Εφαρμογή: Έστω $\kappa(r) = \begin{cases} 0, & r<a \\ k_0 \cdot \frac{a^2}{r^2}, & a<r<b \\ 0, & r>b \end{cases}$



Από το Νόμο του Gauss έχουμε:

$$\mathcal{E}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot 4\pi \cdot \int_0^r \kappa(r') r'^2 dr' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(r) \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_0^r \kappa(r') \cdot r'^2 dr'$$

(i) Για $r<a$ ισχύει $\kappa = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(r) = 0$

(ii) Για $a<r<b$ ισχύει $\kappa = k_0 \cdot \frac{a^2}{r^2}$:

$$\mathcal{E}(r) \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_a^r \frac{k_0 \cdot a^2}{r'^2} \cdot r'^2 \cdot dr' = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot k_0 \cdot a^2 (r-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(r) = \frac{k_0}{\varepsilon_0} \cdot a^2 \cdot (r-a) \cdot \frac{1}{r^2}$$

(iii) Για $r>b$ ισχύει $\kappa = 0$:

$$\mathcal{E}(r) \cdot r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_a^b \frac{k_0 \cdot a^2}{r'^2} r'^2 \cdot dr' \Rightarrow \mathcal{E}(r) = \frac{k_0}{\varepsilon_0} \cdot a^2 \cdot (b-a) \cdot \frac{1}{r^2}$$

Άρα ισχύει τελικά:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & r<a \\ \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot k_0 \cdot a^2 \cdot (r-a) \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}, & a<r<b \\ \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot k_0 \cdot a^2 \cdot (b-a) \cdot \hat{r}/r^2, & r>b \end{cases}$$

Γνωρίζουμε πως $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r) = -\frac{dV}{dr} \cdot \hat{r} = \mathcal{E}(r) \cdot \hat{r}$

Συνεπώς $\mathcal{E}(r) = -\frac{dV}{dr}$

(i) $r<a$: $\mathcal{E}(r) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow V = c_1$

(ii) $a<r<b$: $\frac{dV}{dr} = -\frac{k_0 \cdot a^2}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + \frac{k_0 \cdot a^3}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0} \cdot \ln(r) - \frac{k_0 \cdot a^3}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + c_2$$

(iii) $r > b$: $\frac{dV}{dt} = -\frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0} \cdot (b-a) \cdot \frac{1}{r^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0}(b-a) \cdot \frac{1}{r} + c_3$$

Επιλογή σημείου για το μηδενισμό του δυναμικού

Θεωρούμε πως $V(\infty) = 0$, άρα $c_3 = 0$.

Επιπλέον, για να είναι συνεχές το δυναμικό στο b θα πρέπει να ισχύει $V(b_+) = V(b_-) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0} \cdot \frac{b-a}{b} = -\frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0} \cdot \ln b - \frac{k_0 a^2}{\epsilon_0} \frac{a}{b} + c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0} \ln b + \frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0}$$

Κατά συνέπεια προκύπτει $V(r)$, για $a < r < b$:

$$V(r) = \frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right) - \frac{k_0 a^2}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{a}{r} - 1\right).$$

Ξανά, πρέπει να ισχύει $V(a_+) = V(a_-) \Rightarrow c_1 = \frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Τελικά:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) & r < a \\ \frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right) - \frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{a}{r} - 1\right), & a < r < b \\ \frac{k_0 \cdot a^2}{\epsilon_0}(b-a) \cdot \frac{1}{r}, & r > b \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Εφαρμογή: Να προσδιοριστεί η χωρική πυκνότητα φορτίου για την οποία το ηλεκτρικό πεδίο παραμένει σταθερό (μη ομογενές πεδίο).

Νόμος Gauss για σφαίρα ακτίνας r:

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_0^r k(r') r'^2 dr' \Rightarrow E \cdot r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_0^r k(r') \cdot r'^2 dr' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2Er = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot (k(r) \cdot r^2) \Rightarrow \boxed{k(r) = \frac{2E \cdot \epsilon_0}{r}}$$

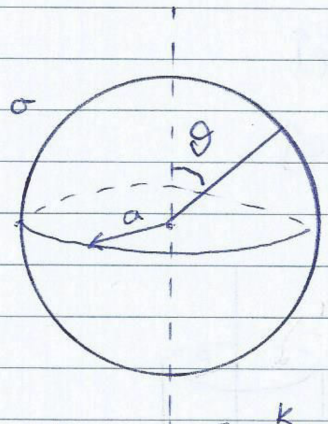
$$Q_r = 4\pi \cdot \int_0^r \frac{2E\varepsilon_0}{r'} r'^2 dr' \Rightarrow Q_r = 4\pi \cdot E \cdot \varepsilon_0 r^2$$

⇒ <u>Εφαρμογή:</u> Θεωρούμε σφαίρα ακτίνας a με σταθερή χωρική πυκνότητα φορτίου.

Γνωρίζουμε από προηγούμενη άσκηση πως:

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{k}{6\varepsilon_0} r^2 + \frac{k}{2\varepsilon_0} a^2, & r<a \\ \frac{k}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{a^3}{r}, & r>a \end{cases}$$ και

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{k}{3\varepsilon_0} \cdot \vec{r}, & r<a \\ \frac{k_0}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{a^3}{r^2}, & r>a \end{cases}$$



Θεωρούμε τώρα σφαίρα με επιφανειακή πυκνότητα σ η οποία δίνεται από τη σχέση $\sigma = \sigma_0 \cdot \cos\theta$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα παίρνουμε τα εξής:

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = \begin{cases} \frac{k}{3\varepsilon_0} Z, & r<a \\ \frac{k \cdot a^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{r^3}, & r>a \end{cases} \rightarrow \text{συνεχής συνάρτηση με } z = r\cdot\cos\theta$$

Όμως $\vec{E}'(x,y,z) = -\vec{\nabla} V' = \begin{cases} -\frac{k}{3\varepsilon_0} \hat{k}, & r<a \\ -\frac{ka^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{\hat{k}}{r^3}, & r>a \end{cases}$

Θυμόμαστε πως $V_{\delta,\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$ (δυναμικό διπόλου)

$$\frac{ka^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi k a^3}{3} \cdot \frac{\hat{k}\cdot\vec{r}}{r^3} \quad \text{με } \vec{p} = \frac{4\pi a^3}{3} k \hat{k}$$

Επίσης, $\vec{E}_{\delta,\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{p}) - r^2 \vec{p}}{r^5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\delta,\varepsilon}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\left(\frac{4\pi a^3}{3}\right)\cdot\frac{3\hat{r}\cdot\cos\theta - \hat{k}}{r^3}$$

Αυτό είναι το ηλεκτρικό πεδίο εκτός σφαίρας.

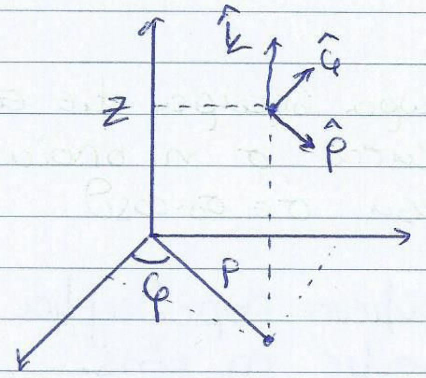
$$\vec{E}(a_+\hat{r}) - E(a_-\hat{r}) = \frac{K}{3\epsilon_0}(3\hat{r}\cos\theta - \hat{k}) + \left(\frac{K}{3\epsilon_0}\right)\hat{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(a_+\hat{r}) - \vec{E}(a_-\hat{r}) = \frac{K}{\epsilon_0}\cdot\hat{r}\cdot\cos\theta$$

$$\hat{r}\cdot|\vec{E}(a_+\hat{r}) - \vec{E}(a_-\hat{r})| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma = K\cdot\cos\theta$$

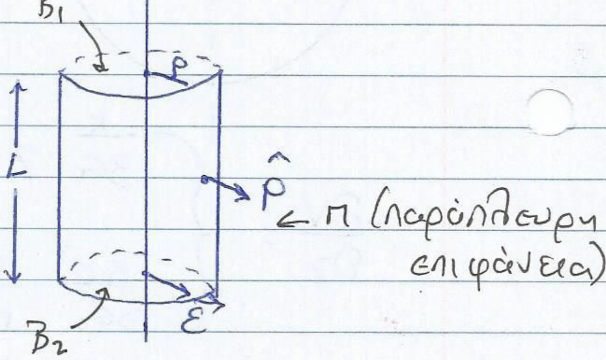
30/10/2015 ΔΙΑΛΕΞΗ #10 (Γ. Διαμάντης)

2. Κυλινδρική Συμμετρία (ρ, φ, z)



$\hat{\rho} = \cos\varphi\,\hat{i} + \sin\varphi\,\hat{j}$

$\hat{\varphi} = \sin\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}$



Θα ισχύει $\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\cdot\hat{\rho}$

Το $\hat{\rho}$ θα είναι κάθετο σε κάθε παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.

Τότε, $\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \int_{B_1}\vec{E}\cdot\hat{n}\,ds + \int_{B_2}\vec{E}\cdot\hat{n}\,ds + \int_{\Pi}\vec{E}\cdot\hat{n}\,ds =$

$$\int_{B_1} E(\rho)\,\overbrace{\hat{\rho}\cdot(-\hat{k})}^{0}\cdot ds + \int_{B_2} E(\rho)\,\overbrace{\hat{\rho}\cdot\hat{k}}^{0}\cdot ds + \int_{\Pi} E(\rho)\hat{\rho}\cdot\hat{\rho}\cdot ds = E(\rho)\cdot\int_{\Pi}\underbrace{ds}_{ds=\rho\,dz\,d\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = E(\rho)\cdot 2\pi\rho L$$

Από το νόμο του Gauss παίρνουμε: $E(\rho)\cdot 2\pi\rho L = \frac{1}{\epsilon_0}\cdot Q_{v(\rho,L)}$

Προκύπτει: $\boxed{E(\rho) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho L}\cdot Q_v(\rho, L)}$

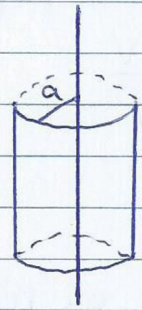
⇒ Εφαρμογές:

#1: Άπειρη ευθεία με σταθερή γραμμική πυκνότητα λ.

Υπάρχει κυλινδρική συμμετρία, άρα εφαρμόζουμε αυτό που προέκυψε από το νόμο του Gauss:

$$E(\rho) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho L}\cdot \overbrace{\lambda L}^{Q} \Rightarrow \boxed{E(\rho)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho}}$$

#2: Άπειρη κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας α με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ.



Ξανά, υπάρχει κυλινδρική συμμετρία:

(i) Για $\rho<a$ ισχύει $Q=0$, άρα $E(\rho)=0$.

(ii) Για $\rho>a$ ισχύει $Q = \sigma\cdot 2\pi\cdot a\cdot L$

$$E(\rho)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho L}\cdot\sigma\cdot 2\pi\cdot a\cdot L \Rightarrow E(\rho)=\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho}$$

Το φορτίο ανά μονάδα μήκους θα είναι $q_L/L = 2\pi a\sigma$

Αν θέταμε $2\pi a\sigma=\lambda$, τότε το παραπάνω αποτέλεσμα θα ταυτιζόταν με αυτό της 1ης εφαρμογής.

#3: Άπειρη κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας α με ομογενή χωρική πυκνότητα φορτίου κ.

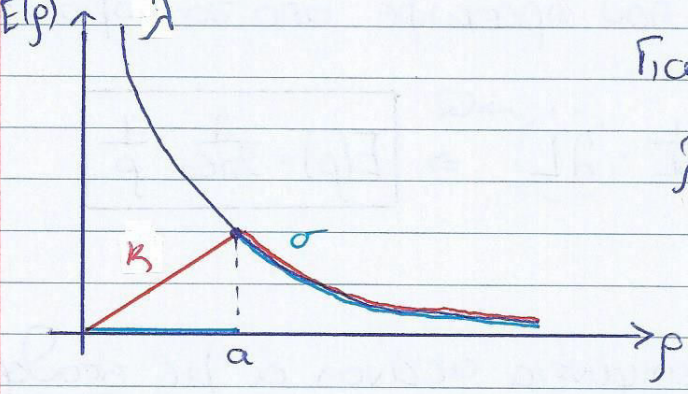
(i) Για $\rho<a$ θα ισχύει: $E(\rho)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho L}\cdot \kappa\cdot\pi\rho^2\cdot L \Rightarrow$

$$\Rightarrow E(\rho) = \frac{\kappa}{2\varepsilon_0} \cdot \rho$$

(ii) Για $\rho > a$ θα ισχύει: $E(\rho) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho L} \cdot \kappa \cdot \pi a^2 L \Rightarrow$

$$\Rightarrow E(\rho) = \frac{\kappa}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{a^2}{\rho}$$

Σε αντίθεση με πριν (#2) εδώ δεν έχουμε ασυνέχεια.



Για $\lambda, \sigma, \kappa > 0$, όπου θεωρήσαμε:

$$\lambda = 2\pi a \sigma = \kappa \pi a^2$$

Στη συνέχεια μελετάμε το δυναμικό σε κάθε περίπτωση.

Ισχύει $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\rho) = -\frac{dV}{d\rho} \cdot \hat{\rho} \Rightarrow E(\rho) = -\frac{dV}{d\rho}$

#1: $-\frac{dV}{d\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \Rightarrow V(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln(\rho) + c$

Προσοχή!! Εδώ $V(\infty) = \infty$ άρα δεν μπορούμε να κάνουμε την παραδοχή που κάναμε στη σφαιρική συμμετρία. Αυτό συμβαίνει, διότι στην κυλινδρική συμμετρία η κατανομή δεν είναι πεπερασμένη, αλλά άπειρη. Πρέπει, λοιπόν, να διαλέξουμε $\rho_0 > 0$ με $\rho_0 \neq \infty$ τέτοιο, ώστε $V(\rho_0) = 0$.

Τότε $-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln(\rho_0) + c = 0 \Rightarrow c = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln(\rho_0)$. Τελικά προκύπτει:

$$V(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Φυσικά, το ρ_0 δεν έχει σημασία όταν μιλάμε για ενέργεια ή έργο, διότι εκεί μας ενδιαφέρει η διαφορά δυναμικού:

$$\Delta V = V(\rho_1) - V(\rho_2) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) - \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_0}\right)\right) \Rightarrow \Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right).$$

#2: Για $\rho<a$, $-\frac{dV}{d\rho}=0$, ενώ για $\rho>a$, $-\frac{dV}{d\rho}=\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho}$.

$V(\rho)=c_1$ $\quad$ $V(\rho)=-\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\cdot\ln(\rho)+c_2$

Λόγω της συνέχειας του δυναμικού θα πρέπει:

$V(a_-)=V(a_+)\Rightarrow c_1=-\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\cdot\ln(a)+c_2$. Συνεπώς:

$$V(\rho)=\begin{cases} c_2-\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\cdot\ln(a), & \rho<a \\ c_2-\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\cdot\ln(\rho), & \rho>a \end{cases}$$

Έστω, ξανά, ότι το δυναμικό μηδενίζεται σε κάποιο ρ_0.

Εδώ, θεωρούμε $\rho_0=a$, άρα $V(a)=0\Rightarrow$

$c_2=\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln(a)$, άρα τελικά:

$$V(\rho)=\begin{cases} 0, & \rho<a \\ -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{\rho}{a}\right), & \rho>a. \end{cases}$$

#3: Θα ισχύει $V(\rho)=\int_\rho^\infty E(\rho')d\rho'$

Για $r<a$: $V(\rho)=\int_\rho^a\frac{k}{2\varepsilon_0}\rho'\cdot d\rho'+\int_a^\infty\frac{ka^2}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho'}d\rho'\Rightarrow$

$$\Rightarrow V(\rho)=\frac{k}{4\varepsilon_0}(a^2-\rho^2)+\left[\frac{ka^2}{2\varepsilon_0}\cdot\ln\rho'\right]_a^\infty$$

Έστω, αυθαίρετα πως $V(2a)=0$. Τότε, το ολοκλήρωμα θα εκτείνεται ως το $2a$, αντί του απείρου και θα ισχύει:

$$V(\rho)=\frac{k}{4\varepsilon_0}(a^2-\rho^2)+\frac{ka^2}{2\varepsilon_0}\cdot\ln2$$

Σημείωση: Θα βόλευε περισσότερο το a αντί του $2a$.

Για $\rho > a$: $V(\rho) = \int_{\rho}^{2a} \frac{\kappa a^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho'} d\rho' \Rightarrow V(\rho) = \frac{\kappa a^2}{2\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{2a}{\rho}\right)$

$\Rightarrow$ Εφαρμογή: Έστω τώρα μεταβλητή πυκνότητα κ.

Θα ισχύει $E(\rho) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho L} \cdot Q_{v(\rho,L)}$, όμως:

$Q_{v(\rho,L)} = \int_{V(\rho,L)} \kappa(\rho') \cdot dv = \int_{V(\rho,L)} \kappa(\rho') \cdot \rho' \cdot d\rho' \cdot d\varphi \, dz$

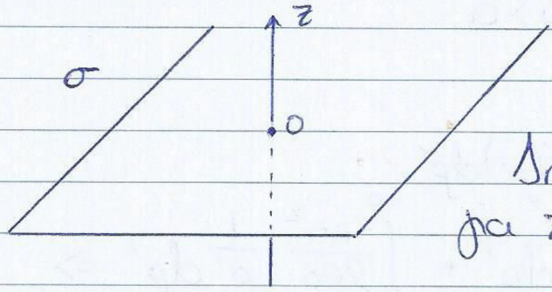
Έστω ότι το κ δεν εξαρτάται από τα φ, z, αλλά μόνο τορ:

$Q_{v(\rho,L)} = 2\pi L \cdot \int_{V(\rho,L)} \kappa(\rho') \cdot \rho' d\rho'$. Έτσι, προκύπτει:

$E(\rho) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \int_0^{\rho} \kappa(\rho') \cdot \rho' d\rho'$

3. Επίπεδη Συμμετρία (x, y, z)

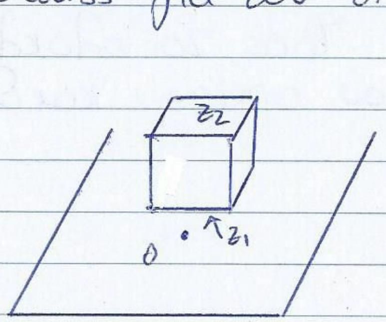
$\Rightarrow$ Εφαρμογή: Έστω επίπεδο ομογενούς επιφανειακής πυκνότητας σ.



Τότε, $\vec{E}(\vec{r}) = E(z) \cdot \hat{k}$

Δημιουργούνται δύο "ημιχώροι", ένας για $z > 0$ και ένας για $z < 0$.

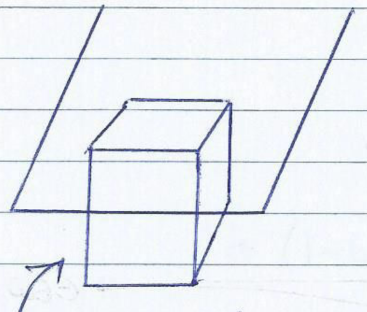
Θα πρέπει: $E(-z) = -E(z)$. Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss για τον υπολογισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου:



Έστω $z > 0$:

Τότε $-E(z_1) \cdot S + E(z_2) \cdot S = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow E(z_2) = E(z_1) = E_+$



Στην περίπτωση αυτή θα ισχύει

$$\left.\begin{aligned} E_+ S - E_- S &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} S \\ E_- &= -E_+ \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

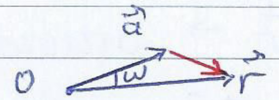
$$\Rightarrow E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

2/11/2015 ΔΙΑΛΕΞΗ #11 (Γ. Διαμάντης)

Πλειονοπολικό Ανάπτυγμα

Έστω φορτίο q σε σημείο $\vec{a}$. Τότε, $V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}$, όπου

$$|\vec{r}-\vec{a}| = (r^2 + a^2 - 2ar\cdot\cos\omega)^{1/2}$$



Για αυτόν το λόγο προκύπτει:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\omega}} \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/r^2 - 2a\cos\omega \cdot \frac{1}{r}}}$$

Θέτουμε $a/r = x$, άρα $f(x) = \sqrt{1 + x^2 - 2x\cdot\cos\omega}$ $(r \gg a)$

Κατά Taylor: $f(x) \simeq f(0) + x\cdot\frac{df}{dx}(0) + \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{d^2f}{dx^2}(0) + \ldots$

Ισχύει $\frac{df}{dx} = -\frac{1}{2}[2x - 2\cos\omega]\cdot[1 + x^2 - 2ax\cdot\cos\omega]^{-3/2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = (\cos\omega - x)[1 + x^2 - 2x\cos\omega]^{-3/2}$$

Επιπλέον, $\frac{d^2f}{dx} = -[1 + x^2 - 2x\cdot\cos\omega]^{-3/2} + (\cos\omega - x)\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(2x - 2\cos\omega)\cdot[1 + x^2 - 2x\cdot\cos\omega]^{-5/2}$

Άρα $\frac{d^2f}{dx} = [3(\cos\omega - x)^2(1 + x^2 - 2x\cdot\cos\omega)^{-1} - 1]\cdot(1 + x^2 - 2x\cdot\cos\omega)^{-3/2}$

Όμως $f(0) = 1$, $\frac{df}{dx}(0) = \cos\omega$, $\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 3\cos^2\omega - 1$

Έχουμε, λοιπόν:

$$f(x) \simeq 1 + x\cdot \cos\omega + \frac{1}{2}x^2(3\cos^2\omega - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{a}{r}\right) = 1 + \frac{a}{r}\cdot\cos\omega + \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\cdot(3\cos^2\omega - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{a}{r}\right) = 1 + \frac{ra\cdot\cos\omega}{r^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2a^2}{r^4}(3\cdot\cos^2\omega - 1) \Rightarrow$$

εσωτερικό γινόμενο

$$\Rightarrow f\left(\frac{a}{r}\right) = 1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{a}}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{a})^2 - r^2a^2}{r^4} \dots$$

Προκύπτει, τελικά:

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{a}\vec{r}}{r^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3(\vec{a}\vec{r})^2 - r^2a^2}{2r^5} + \dots$$

Αυτό είναι το πλειονοπολικό ανάπτυγμα για ένα φορτίο, όπου:

$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} \rightarrow$ αντιστοιχεί σε φορτίο

$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{a}\vec{r}}{r^3} \rightarrow$ αντιστοιχεί σε δίπολο διπολικής ροπής $\vec{p} = q\cdot\vec{a}$

$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{3(\vec{a}\vec{r})^2 - r^2a^2}{2r^5} \rightarrow$ αντιστοιχεί σε τετράπολο, κ.ο.κ.

Έστω τώρα ότι έχουμε φορτία q_i, $i = 1, 2, \dots, n$ σε αντίστοιχες θέσεις $\vec{a_i}$. Τότε, από την αρχή της επαλληλίας παίρνουμε:

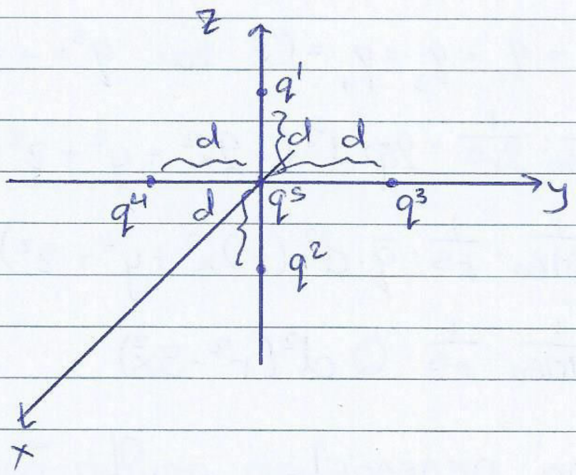
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^5}\cdot\sum_{i,j} x_i x_j Q_{ij}$$

$$Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$$

$$\vec{P} = q_1\vec{a_1} + q_2\vec{a_2} + \dots + q_n\vec{a_n}, \quad Q_{ij} = \sum_{i,j} q\cdot(3a_i a_j - \delta_{ij}a^2)$$

<u>Σημείωση:</u> Το ανάπτυγμα θα μπορούσε να συνεχιστεί και να μελετήσουμε οκτάπολο, δεκαεξάπολο, κ.ο.κ., αλλά στα πλαίσια της ΦΙΙΙ μας ενδιαφέρουν οι όροι μέχρι το τετράπολο.

⇒ Εφαρμογή:



$q^{(i)} \rightarrow$ δείκτης, όχι δύναμη

Ισχύει: $q^1 \rightarrow \vec{a}^1 = (0,0,d)$ $\quad q^2 \rightarrow \vec{a}^2 = (0,0,-d)$

$q^3 \rightarrow \vec{a}^3 = (0,d,0)$ $\quad q^4 \rightarrow \vec{a}^4 = (0,-d,0)$

$q^5 \rightarrow \vec{a}^5 = (0,0,0)$

$Q = q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5$

$\vec{P} = (0, d(q_3 - q_4), d(q_1 - q_2))$

• $Q_{xx}^{(1)} = -q^1 \cdot d^2$, $\quad Q_{yy}^{(1)} = -q^1 \cdot d^2$, $\quad Q_{zz}^{(1)} = (3d^2 - d^2) q^1 = 2d^2 \cdot q^1$

$Q_{xy}^{(1)} = Q_{yz}^{(1)} = Q_{zx}^{(1)} = 0$

• $Q_{xx}^{(2)} = -q^2 d^2$, $\quad Q_{yy}^{(2)} = -q^2 d^2$, $\quad Q_{zz}^{(2)} = 2d^2 \cdot q^2$

$Q_{xy}^{(2)} = Q_{yz}^{(2)} = Q_{zx}^{(2)} = 0$

• $Q_{xx}^{(3)} = -q^3 d^2$, $\quad Q_{yy}^{(3)} = 2d^2 \cdot q^3$, $\quad Q_{zz}^{(3)} = -q^3 d^2$

• Ομοίως με το (3) το (4)

Άρα, με προσέγγιση τετραπόλου, το δυναμικό θα είναι:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^1 + \dots + q^5}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dy(q_3 - q_4) + dz(q_1 - q_2)}{r^3} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2r^5} \Big\{ -x^2 d^2 (q^1 + q^2 + q^3 + q^4) + y^2 d^2 \big(2(q_3 + q_4) - (q_1 + q_2) \big)$$

$$+ z^2 d^2 \big(2(q_1 + q_2) - (q_3 + q_4) \big) \Big\}$$

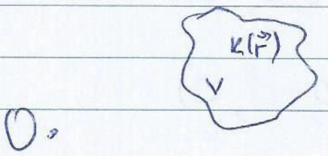
Έστω ότι $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = Q$ και $q^5 = -4Q$

Τότε $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{2r^5}\cdot 2Qd^2(-2x^2+y^2+z^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r^5}\cdot Q\cdot d^2(-2x^2+y^2+z^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r^5}\cdot Q\cdot d^2(r^2-3x^2)$$

Αυτά ισχύουν για πεπερασμένο αριθμό διακριτών φορτίων.
Τι συμβαίνει όμως για πεπερασμένες κατανομές φορτίων;



$a = \max(|\vec{r}| \in V)$

$d = \max(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|,\ \vec{r}_i, \vec{r}_j \in V)$ (διάμετρος)

Εδώ αρκεί η "μακρινή απόσταση r" προϋποθέτει $r \gg a+d$.

Τότε: $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\int_V \frac{\kappa(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\cdot\int \kappa(\vec{r}')\left[1+\frac{r'^2}{r^2}+2\frac{r'}{r}\cos\omega\right]^{-1/2}dv'$

Έτσι, $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q_V}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{2r^5}\cdot\sum_{i,j} x_i x_j Q_{ij} + \dots$

Όπου $Q_V = \int_V \kappa(\vec{r}')dv'$

$\vec{P} = \int_V \kappa(\vec{r}')\cdot\vec{r}'\cdot dv'$

$Q_{ij} = \int \kappa(\vec{r}')\cdot(3r_i'\cdot r_j' + \delta_{ij}\vec{r}'^2)$

$\Rightarrow$ Στην άσκηση με το δαχτυλίδι είχαμε δει:

$\lambda(\varphi) = \lambda_0\cdot\cos\varphi$

$Q = \int_0^{2\pi}\lambda(\varphi)\cdot a\cdot d\varphi = 0$

$\vec{P} = \int_0^{2\pi}\lambda_0\cos\varphi\,(a\cos\varphi\,\hat{i} + a\sin\varphi\,\hat{j})\,a\,d\varphi = 2\pi^2\lambda_0 a^2\hat{i}$

Άρα εμφανίζεται μόνο το δυναμικό δίπολου στο $V(r)$.

Πώς μεταβάλλεται ο τύπος που υπολογίσαμε εάν αλλάξουμε το σύστημα αναφοράς;

Έστω $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{h}$, τότε:

$\kappa(\vec{r}') = \kappa(\vec{r})$, αφού το φορτίο σαν μετρήσιμη ποσότητα δεν μεταβάλλεται.

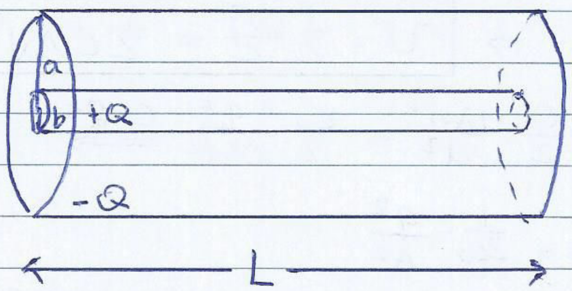
Άρα $Q = Q'$. Σε ό,τι αφορά τη διπολική ροπή:

$$\vec{P} = \int_V \kappa(\vec{r}) \cdot \vec{r} \cdot dv$$

$$\vec{P}' = \int_V \kappa(\vec{r}') \cdot \vec{r}' \cdot dv' \xRightarrow{dv' = dv} \vec{P}' = \int_V \kappa(\vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{h}) \cdot dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P}' = \int_V \kappa(\vec{r}) \cdot \vec{r} \cdot dv - \int_V \vec{h} \cdot dv \Rightarrow \vec{P}' = \vec{P} - \vec{h} \cdot Q_V.$$

4/11/2015 ΔΙΑΛΕΞΗ #12 (Ν. Σαουλίδης)



Θεωρούμε $L >> b - a$

Ποια είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή; (το πεδίο είναι ακτινικό)

Έστω κύλινδρος ακτίνας r, με $b < r < a$.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \text{ (Νόμος Gauss)} \Rightarrow \int_{\substack{\text{παράπλευρη} \\ \text{επιφάνεια}}} E(r) \cdot \hat{r} \cdot \hat{r} \cdot dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

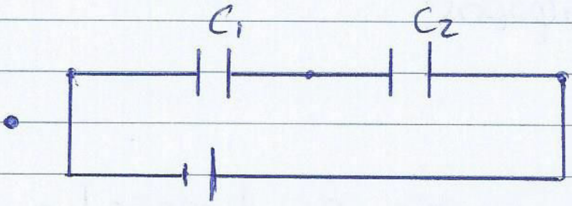
$$\Rightarrow E(r) \cdot \int dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot \ell = \frac{\frac{\ell}{L} \cdot Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q_{enc}}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow E(\vec{r}) = \frac{Q_{enc}}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r} \cdot \hat{r}.$$

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_a^b \frac{Q_{enc}}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r} \cdot dr \Rightarrow$$

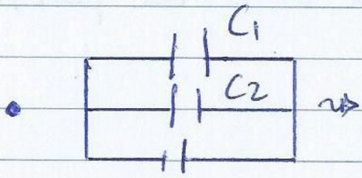
$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{Q_{enc}}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right), \text{ άρα } C = \frac{Q_{enc}}{|\Delta V|} \Rightarrow C = 2\pi\epsilon_0 \cdot L \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Ομοίως μπορεί να βρεθεί το C για σφαιρικό πυκνωτή.
(βλ. σελ. 45)



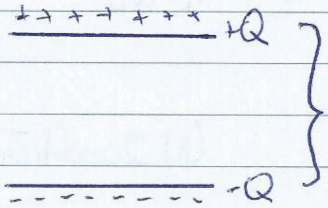
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



$$\Delta V = V_1 = V_2, \quad Q = Q_1 + Q_2$$
$$\Downarrow$$
$$C = C_1 + C_2$$

Ενέργεια Πυκνωτή



$$\Delta U = q \cdot \Delta V$$

$$U = \int_0^Q \Delta V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow$$

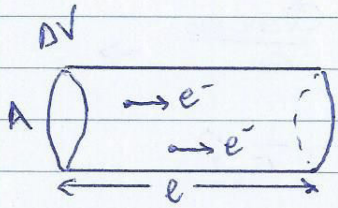
$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2}$$

$$w_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot E^2 \xrightarrow{E \cdot d = |\Delta V|} w_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{|\Delta V|^2}{d^2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{Q^2}{C^2 d^2} \xrightarrow{C = \frac{A}{d}\varepsilon_0}$$

$$w_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{Q^2}{A^2 \varepsilon_0^2} \cdot \frac{d^2}{d^2} \Rightarrow w_E = \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{A^2}$$

$$\int_V w_E dV = \int_V \frac{Q^2}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{A^2} dV = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A^2} \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 d}{A \cdot \varepsilon_0} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Εσωτερικό Αγωγών



$$I = dq/dt \Rightarrow I_{avg} = \Delta Q / \Delta t = \frac{n \cdot q \cdot A \cdot \Delta x}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{avg} = n \cdot q \cdot A \cdot V_d \rightsquigarrow \text{μέση ταχύτητα}$$

Μέση ταχύτητα: κίνηση μέχρι να συγκρουστεί με άτομο του υλικού

$$I_{avg} = n \cdot q \cdot A \cdot v_A \Rightarrow \frac{I_{avg}}{A} = n \cdot q \cdot v_A \Rightarrow \vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v_A} \quad (1)$$

επιφανειακή πυκνότητα

$$v_f = v_i + at \Rightarrow v_f = v_i + \left(\frac{F}{m_e}\right) t = v_i + \frac{qE}{m_e} \cdot t \Rightarrow$$

$$\langle \vec{v_f} \rangle = \frac{q\vec{E}}{m_e} \langle t \rangle \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \vec{j} = n \cdot q^2 \cdot \frac{1}{m_e} \cdot \langle t \rangle \cdot \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{j} = \frac{nq^2}{m_e}\tau \vec{E}}$$

Ισχύει πως $\frac{nq^2}{m_e}\tau$ εξαρτάται μόνο από τον αγωγό και τους φορείς. (όχι τις διαστάσεις, αλλά το υλικό του αγωγού)

Μπορούμε να ορίσουμε $\sigma = \frac{nq^2}{m_e}\tau$ ως <u>αγωγιμότητα</u>.

Τελικά: $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$

Ισχύει πως $\Delta V = E \cdot \ell$, άρα μπορούμε να γράψουμε:

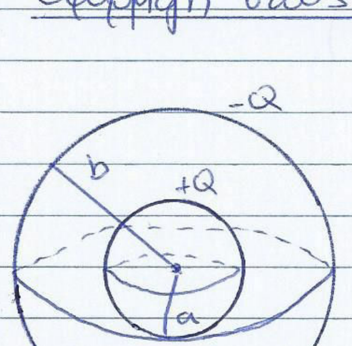
$$J = \sigma \cdot \frac{\Delta V}{\ell} \Rightarrow \frac{I}{A} = \sigma \cdot \frac{\Delta V}{\ell} \Rightarrow I = \frac{\sigma \cdot A}{\ell} \cdot \Delta V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\Delta V}{R}}$$, (μακροσκοπικός νόμος Ohm)

όπου $\frac{\sigma \cdot A}{\ell} = \frac{1}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\ell}{A}}$

Το σ εξαρτάται από το υλικό, ενώ τα ℓ, A εξαρτώνται από τις διαστάσεις του αγωγού.

⇒ <u>Εφαρμογή στους πυκνωτές</u>: Να υπολογιστεί η χωρητικότητα σφαιρικού πυκνωτή.



Θεωρούμε γκαουσιανή επιφάνεια (σφαίρα) ακτίνας r με a<r<b. Τότε, από το νόμο του Gauss παίρνουμε:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot \int r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\hat{r}}.$$

Για τη διαφορά δυναμικού ισχύει:

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = -\int_a^b \frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}dr = -\frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0}\cdot\int_a^b \frac{1}{r^2}dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0}\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b \Rightarrow \Delta V = \frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

$$C = \frac{Q_{enc}}{|\Delta V|} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0\cdot\left(\frac{b\cdot a}{b-a}\right).$$

Τι συμβαίνει όταν $b\to\infty$;

$$\lim_{b\to\infty} C = 4\pi\epsilon_0\cdot\lim\left(\frac{b\cdot a}{b-a}\right) = 4\pi\epsilon_0\cdot a$$

Θεωρήστε ότι η ακτίνα του εξωτερικού φλοιού διπλασιάζεται από b σε 2b. Θεωρώντας ότι το φορτίο δεν αλλάζει, να υπολογίσετε τη μεταβολή στην ενέργεια του πυκνωτή.

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 4\pi\epsilon_0\cdot\left(\frac{ba}{b-a}\right) \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_{enc}^2}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{b-a}{ba} \\ C_2 &= 4\pi\epsilon_0\cdot\left(\frac{2ba}{2b-a}\right) \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_{enc}^2}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{2b-a}{2ba} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{b-a}{ba}}{\frac{2b-a}{2ba}} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{2b-2a}{2b-a} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = 1-\frac{a}{2b-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_1 = \left(1-\frac{a}{2b-a}\right)\cdot U_2 \quad \text{ή} \quad U_2 = \frac{2b-a}{2(b-a)}\cdot U_1 \Rightarrow$$

$$U_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{b}{2(b-a)}\right)\cdot U_1$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 \Rightarrow \Delta U = U_1\cdot\left(\frac{b}{2(b-a)}-\frac{1}{2}\right).$$

6/11/2015 **ΔΙΑΛΕΞΗ #13** (Ν. Σαουλίδου)

Μέθοδος των ειδώλων

Έστω ϕ_1, ϕ_2 οι λύσεις για το δυναμικό στο σύνορο κλειστής επιφάνειας.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ορίζουμε } \phi = \phi_1 - \phi_2 \\ \text{Ισχύει } \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{array}\right\} \nabla^2\phi = 0 \text{ , αφού } \nabla^2\phi_1 = \nabla^2\phi_2$$

$\Downarrow$

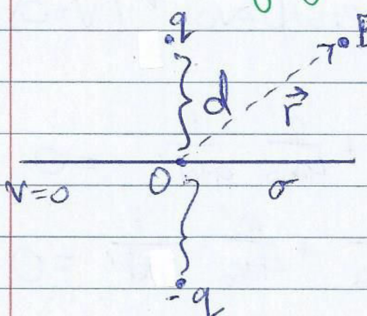
$\Rightarrow \int_V \varphi \nabla^2 \varphi = 0$. Ισχύει $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi \cdot \varphi) = \varphi \nabla^2\varphi + \vec{\nabla}\varphi \vec{\nabla}\varphi$, άρα:

$$\int_V \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi\varphi) - \int_V \vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\varphi = 0 \Rightarrow \oint_{S(V)} \varphi \vec{\nabla}\varphi d\vec{A} - \int_V \vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\varphi = 0 \; (3)$$

Όμως $\vec{\nabla}\varphi_1 \hat{n} = \vec{\nabla}\varphi_2 \hat{n}$, άρα $\vec{\nabla}\varphi \hat{n} = 0$, άρα από την (3)

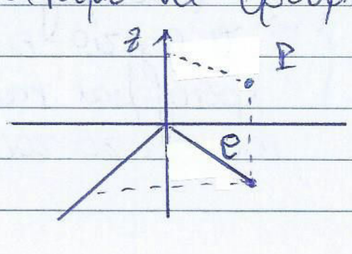
προκύπτει $\int_V \vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\varphi = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\varphi = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\varphi = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 + c$

$\Rightarrow$ Εφαρμογή: Έστω ένας άπειρος γειωμένος αγωγός ($V=0$). Τοποθετούμε φορτίο q σε απόσταση d πάνω από τον αγωγό.



Παίρνουμε σε απόσταση d ένα φανταστικό φορτίο $-q$ (είδωλο).
Βρήκαμε, λοιπόν, μια διάταξη που να ικανοποιεί τη συνθήκη ($V=0$) στο σύνορο που μας ενδιαφέρει (αγωγός).

Για τυχαίο σημείο P που απέχει απόσταση r από το O, θέλουμε να βρούμε τα $V(\vec{r})$, $E(\vec{r})$, σ, q



$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|\vec{r}-d\hat{k}|} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{|\vec{r}+d\hat{k}|} \Rightarrow \qquad \{\rho^2 = x^2+y^2\}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2+d^2-2dz}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2+d^2+2dz}}\right)$$

Για $z=0$ θα πρέπει $V=0$, συνθήκη που ικανοποιείται από την παραπάνω σχέση.

Ομοίως προκύπτει $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+(z-d)\hat{k}}{(\rho^2+z^2+d^2-2dz)^{3/2}} - \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+(z+d)\hat{k}}{(\rho^2+z^2+d^2+2dz)^{3/2}}\right)$

$$\vec{E}(x,y,z=0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x\hat{i}+y\hat{j}-d\hat{k}}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} - \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+d\hat{k}}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}\right] =$$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2d\hat{k}}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}\right)$, άρα η συνθήκη ικανοποιείται (ένταση κάθετη στον αγωγό).

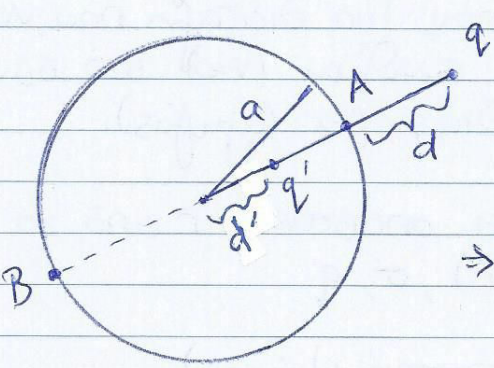
Αλλά $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, άρα $\sigma = \frac{q}{4\pi}\left(-\frac{2d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{q}{2\pi}\cdot\frac{d}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}$$

$$Q_{\varepsilon\pi} = \int_S \sigma\, dA = \int_S -\frac{qd}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}\rho\, d\rho\, d\varphi = -\frac{qd}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty}\frac{\rho}{(\rho^2+d^2)^{3/2}}d\rho =$$

$$= -\frac{qd}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+d^2}}\right)_0^{\infty} \Rightarrow Q_{\varepsilon\pi} = -q$$

Έστω σφαιρικός αγωγός ακτίνας a και φορτίο q σε απόσταση d από τον αγωγό. Ο αγωγός είναι γειωμένος ($V=0$). Να βρεθούν τα προηγούμενα.

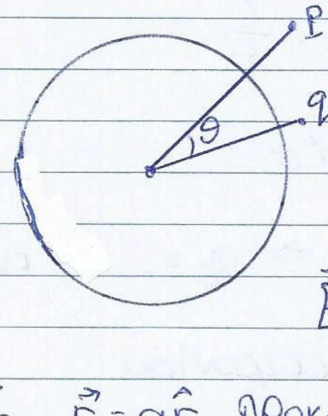


$$\left.\begin{aligned} V_A &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{d} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{a-d'} = 0 \\ V_B &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{d+2a} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{a+d'} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow q' &= -q\cdot\frac{a}{d} \\ d' &= \frac{a^2}{d} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ προσδιορίζω έτσι τι φορτίο-είδωλο χρειάζομαι και πού να το τοποθετήσω

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{1}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}}}_{\text{από το } q} - \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{r^2d^2}{a^2}+a^2-2rd\cos\theta\right)^{1/2}}}_{\text{από το } q'}\right]$$

Για $r=a$ προκύπτει $V=0$ (η συνθήκη ικανοποιείται)



Στο σχήμα φαίνεται η παραπάνω γωνία θ

Η ένταση του ηλ. πεδίου προκύπτει:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-d\hat{a}}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}} - \frac{\frac{d^2}{a^2}\vec{r}-d\hat{a}}{\left(\frac{d^2r^2}{a^2}+a^2-2rd\cos\theta\right)^{3/2}}\right]$$

Για $\vec{r}=a\hat{r}$ προκύπτει:

$$E = -\frac{q}{4\pi a^2\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{\left(\frac{d^2}{a^2}-1\right)\cdot\hat{r}}{\left(\frac{d^2}{a^2}+1-2\frac{d}{a}\cos\theta\right)^{3/2}}\right]$$

(η συνθήκη ικανοποιείται, δηλαδή ένταση στη διεύθυνση του $\hat{r}$).

Θα προκύψει $Q_{επ} = q' = -q\frac{a}{d}$

9/11/2015 ΔΙΑΛΕΞΗ #14 (Γ. Διαμάντης)

Έστω σφαίρα με φορτίο ομοιόμορφα κατανεμημένο παντού.

Πυκνότητα ενέργειας $w_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{k}{3\varepsilon_0} r\hat{r} & r\le a \\ \frac{k}{3\varepsilon_0}\cdot a^3/r^2\cdot\hat{r}, & r>a \end{cases}$$

όπου a η ακτίνα της σφαίρας.

$$\vec{E}^2 = \begin{cases} \frac{k^2}{9\varepsilon_0^2} r^2 \\ k^2/9\varepsilon_0^2\cdot\frac{a^6}{r^4} \end{cases}$$

Άρα $U_E = \int w_E dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\cdot 4\pi\cdot\left\{\int_0^a \frac{k^2}{9\varepsilon_0^2} r^4 dr + \int_a^\infty \frac{k^2}{9\varepsilon_0}\cdot a^6\cdot\frac{1}{r^2}dr\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow U_E = \varepsilon_0\cdot 2\pi\cdot\frac{k^2}{9\varepsilon_0^2}\left\{\frac{1}{5}a^5 + a^5\right\} \Rightarrow U_E = \varepsilon_0\cdot 2\pi\cdot\frac{k^2}{9\varepsilon_0^2}\cdot a^5\cdot\left\{\underbrace{\tfrac{1}{5}}_{0<r<a} + \underbrace{1}_{r>a}\right\}$$

Το $1/5$ είναι η ενέργεια που περικλείεται μέσα στη σφαίρα δηλαδή ανεξαρτήτως του r μέσα στη σφαίρα περικλείεται το 20% της συνολικής ενέργειας.

Συνολικό φορτίο κατανομής: $Q = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \kappa$

$Q^2 = 16\pi^2 a^6 \cdot \frac{\kappa^2}{9}$, άρα $U_E = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{6}{5}$

Για επιφανειακή πυκνότητα: $Q = 4\pi a^2 \sigma$.

Για το ηλεκτρόνιο: $m_e c^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{a_\varepsilon} \Rightarrow a_\varepsilon = \ldots$, και

έτσι υπολογίζεται η ακτίνα του ηλεκτρονίου.

<u>Ενέργεια Αλληλεπίδρασης δύο φορτίων</u>

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_1}}{|\vec{r} - \vec{r_1}|^3} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r_2}}{|\vec{r} - \vec{r_2}|^3}$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \vec{\mathcal{E}}^2 = \frac{q_1^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r_1}|^4} + \frac{q_2^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r_2}|^4} + \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r_1})(\vec{r} - \vec{r_2})}{|\vec{r} - \vec{r_1}|^3 |\vec{r} - \vec{r_2}|^3}$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω ποσότητα στο χώρο:

$$\frac{q_1^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r_1}|^4} dv = \frac{q_1^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \int \frac{1}{r'} dv' = \frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r'^2} dr'$$

$$\frac{q_1 q_2}{16\pi^2\varepsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r_1})(\vec{r} - \vec{r_2})}{(|\vec{r} - \vec{r_1}||\vec{r} - \vec{r_2}|)^3} dv = \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\varepsilon_0} \int \frac{\vec{r}' \cdot (\vec{r}' + \vec{a})}{r'^3 \cdot |\vec{r}' + \vec{a}|^3} dv', \text{ όπου } \vec{a} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$$

$$= \frac{q_1 q_2}{16\pi^2\varepsilon_0} \int_0^\infty dr' \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{r' + a \cdot \cos\vartheta}{r'^2 + a^2 + 2ar'\cos\vartheta} =$$

$$= \frac{q_1 q_2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \int_0^\infty dr' \cdot \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \cdot \frac{r' + a\cos\vartheta}{(r'^2 + a^2 + 2ar'\cos\vartheta)^{3/2}} = \ldots = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int \frac{1}{r'^2} dr' =$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{a}$$