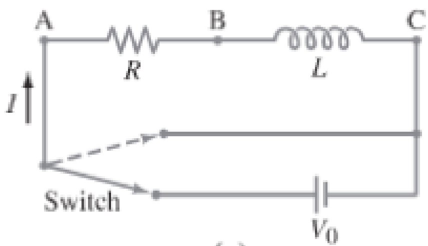
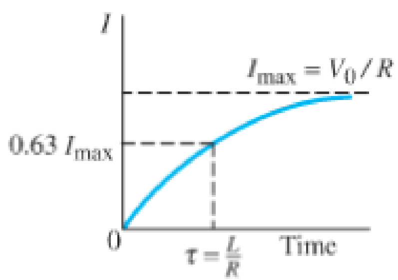
AC Κυκλώματα

Κυκλώματα LR

- Τι συμβαίνει όταν ένα κύκλωμα LR συνδεθεί με πηγή συνεχούς τάσης V_0?



(a)



Σταθερά χρόνου $\tau = \dfrac{L}{R}$

Κανόνας βρόχων Kirchhoff (άθροισμα δυναμικών κατά μήκος του βρόχου)

$$V_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$V_0 = IR + L\frac{dI}{dt}$$

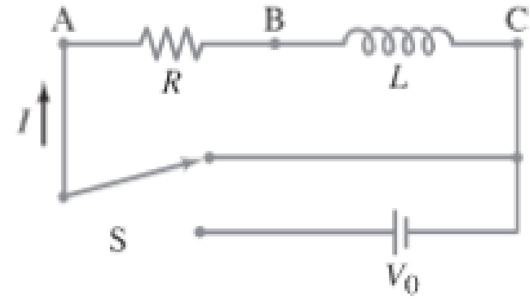
$$\int_{I=0}^{I} \frac{dI}{V_0 - IR} = \int_0^t \frac{dt}{L}$$

$$-\frac{1}{R}\ln\left(\frac{V_0 - IR}{V_0}\right) = \frac{t}{L}$$

$$I = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

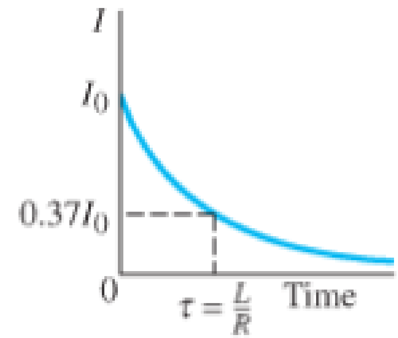
Κυκλώματα LR

- Όταν ανοίξει ο διακόπτης



$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\int_{I=0}^{I}\frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt$$



- Όπου $I=I_0$ για $t=0$ και $I=I$ για t

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t$$

$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$ Σταθερά χρόνου

Ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο

- Παρεχόμενη ισχύς σε πηνίο επαγωγής L διαρρέεται από ρεύμα I που μεταβάλλεται με ρυθμό dI/dt

$$P = I\mathcal{E} = LI\frac{dI}{dt}$$

- Έργο που απαιτείται για την αύξηση του I από 0 σε I

$$dW = Pdt = LIdI$$

$$W = \int dW = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

Υπενθύμιση: αποθηκευμένη ενέργεια πυκνωτή, όταν στα άκρα του επιβάλλεται τάση V

Ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο

- Ενέργεια συναρτήσει του μαγνητικού πεδίου

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \qquad\qquad B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}\right)\left(\frac{B\ell}{\mu_0 N}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} A\ell$$

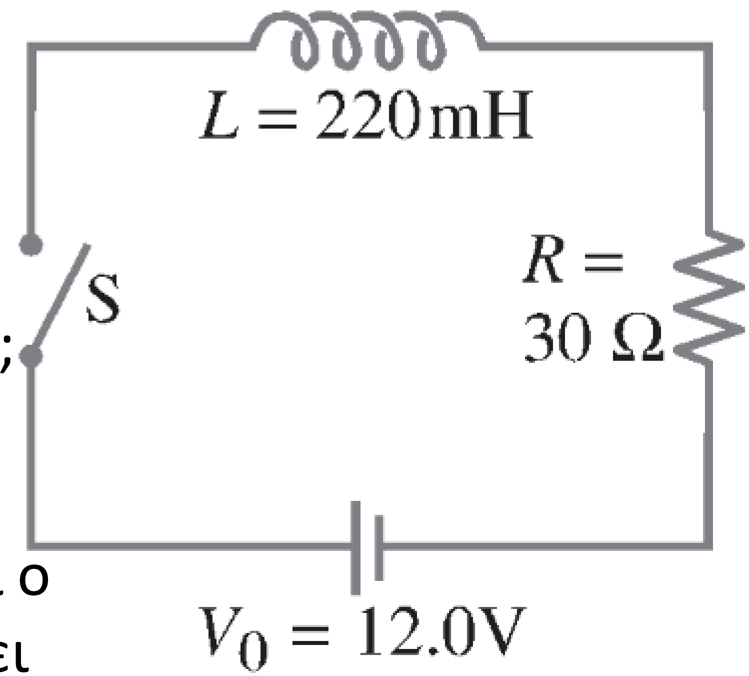
Πυκνότητα ενέργειας $$u = \frac{1}{2}\frac{B}{\mu_0}$$

Ισχύει για κάθε περιοχή του χώρου που υφίσταται μαγνητικό πεδίο

Παράδειγμα

Τη στιγμή $t = 0$, μια πηγή τάσης $12,0\mathrm{V}$ συνδέεται σε σειρά με ένα πηνίο $220\mathrm{mH}$ και μια αντίσταση 30Ω

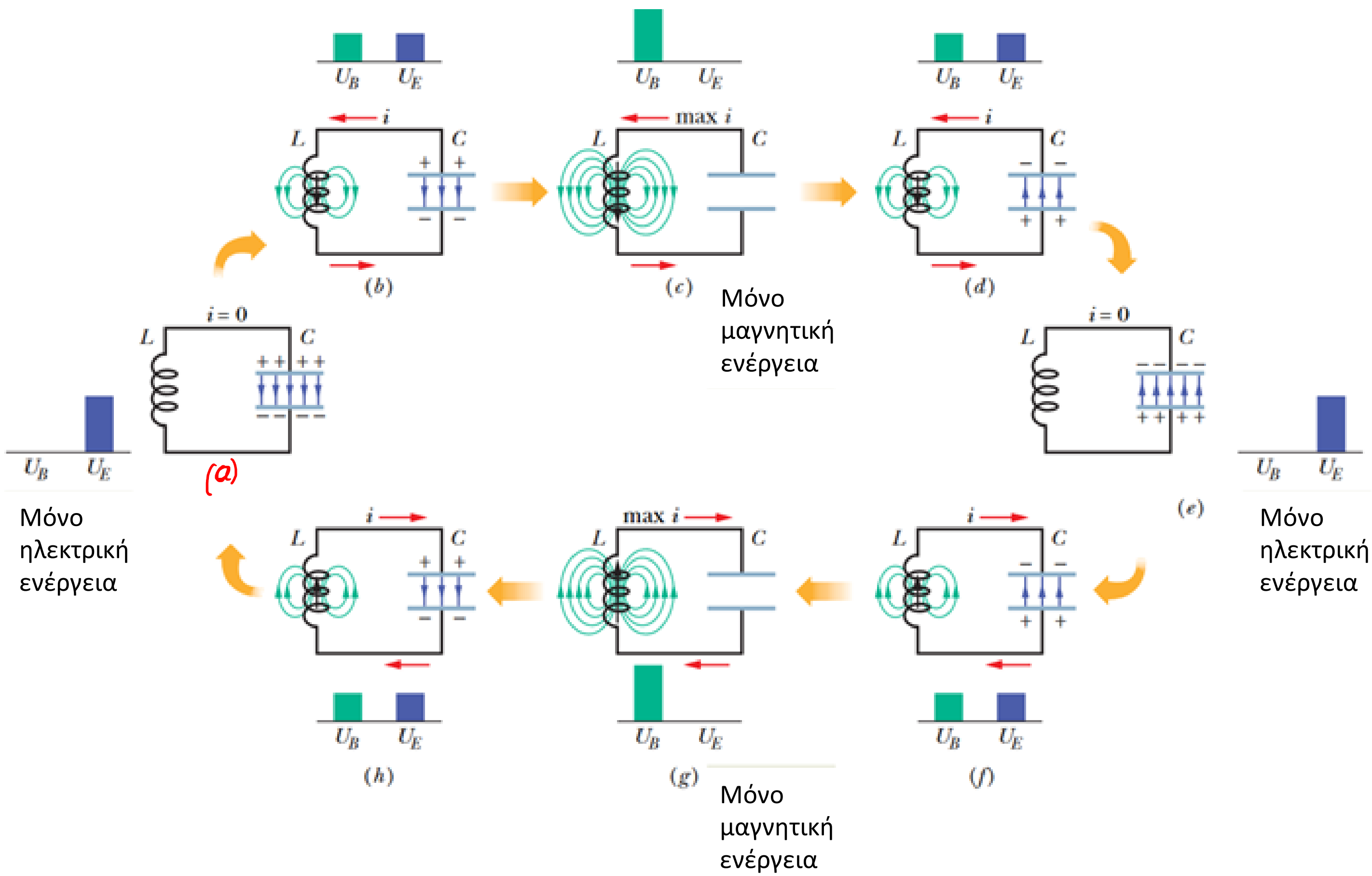
Α) Πόση είναι η τιμή του ρεύματος τη στιγμή $t = 0$;
Β) Ποια είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος;
Γ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του ρεύματος;
Δ) Πόσος χρόνος απαιτείται για να φτάσει το ρεύμα στο μισό της μέγιστης τιμής του;
Ε) Σε εκείνη τη χρονική στιγμή, ποιος είναι ο ρυθμός με τον οποίο η πηγή τάσης παρέχει ενέργεια και,
ΣΤ) Ποιος είναι ο ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου;



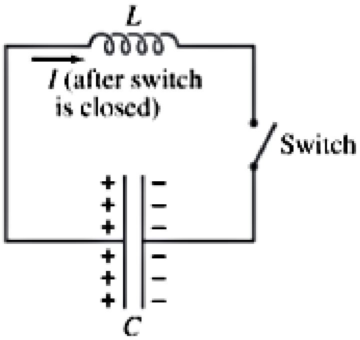
Κυκλώματα LC

Κύκλος ταλάντωσης κυκλώματος LC

(Halliday, Resnick, Walker)



Κυκλώματα LC



- Ιδανικό κύκλωμα LC με μηδέν αντίσταση

- Κανόνας βρόχων Kirchhoff (άθροισμα δυναμικών κατά μήκος του βρόχου)

$$-L\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{Q}{LC}=0$$

εστω λύση $Q=Q_0\cos(\omega t+\phi)$

$$-\omega^2Q_0\cos(\omega t+\phi)+\frac{1}{LC}Q_0\cos(\omega t+\phi)=\left(-\omega^2+\frac{1}{LC}\right)Q_0\cos(\omega t+\phi)=0$$

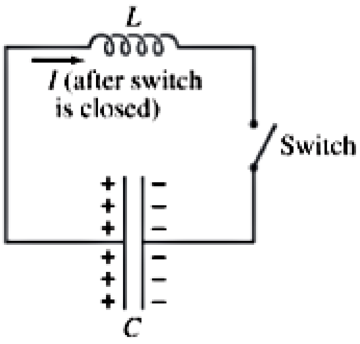
Αληθεύει μόνο εάν $\boxed{\left(-\omega^2+\frac{1}{LC}\right)=0\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}=2\pi f}$

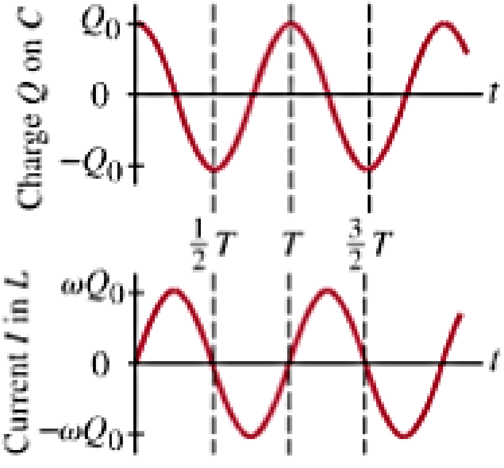
Κυκλώματα LC

- Το φορτίο του πυκνωτή σε Κύκλωμα LC ταλαντώνεται συνημιτονοειδώς και το ρεύμα στο πηνίο

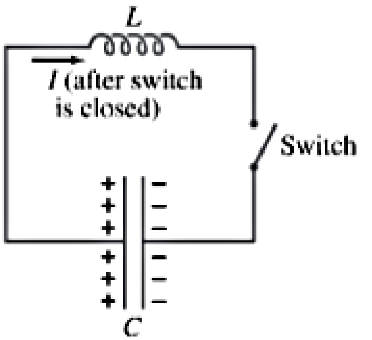
$$I = -\frac{dQ}{dt} = \omega Q_0 \sin(\omega t + \phi) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$I_{\max} = \omega Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$$





Κυκλώματα LC



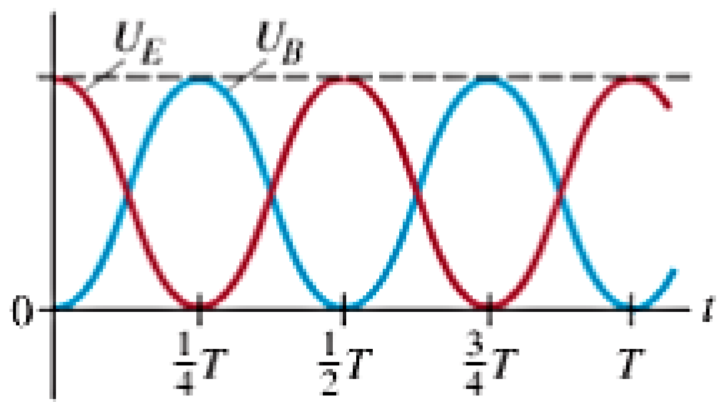
- Η αποθηκευμένη ενέργεια στο ηλεκτρικό πεδίο του

πυκνωτή κάθε χρονική στιγμή t

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi)$$

- Η αποθηκευμένη ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου την ίδια χρονική στιγμή t

$$U_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{L\omega^2 Q_0^2}{2}\sin^2(\omega t + \phi) = \frac{Q_0^2}{2C}\sin^2(\omega t + \phi)$$

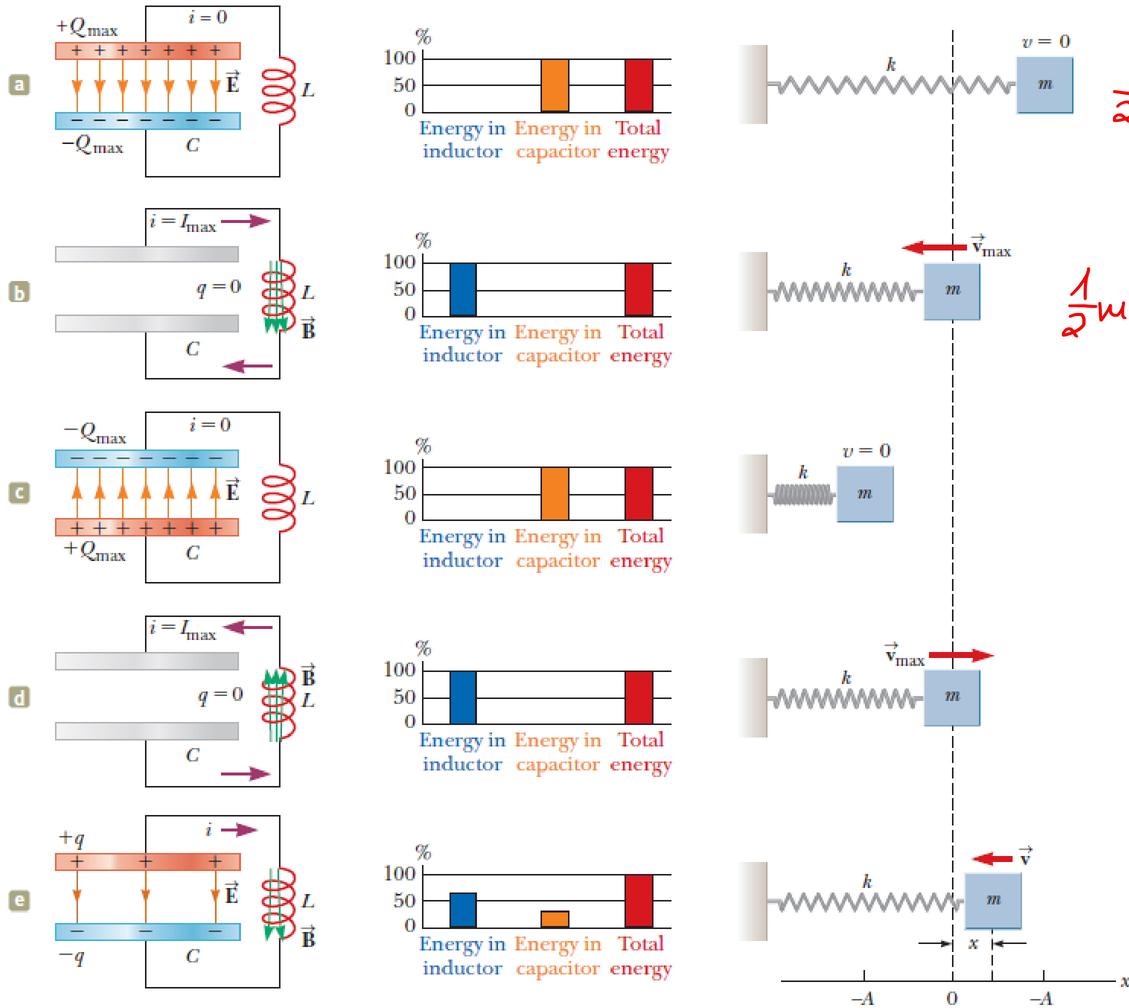


Κυκλώματα LC

- Ηλεκτρομαγνητικό ανάλογο ταλαντώσεων

$\frac{Q^2_{max}}{2C}$

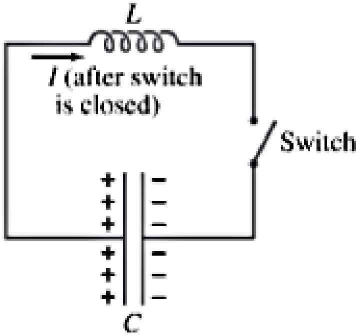
$\frac{1}{2} L i^2$



$\frac{1}{2} k x^2$

$\frac{1}{2} m v^2$

Κυκλώματα LC



- Η συνολική ενέργεια

$$U = U_E + U_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q_0^2}{2C}\left[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)\right] = \frac{Q_0^2}{2C}$$

- Ταλαντωτής LC ή ηλεκτρομαγνητικός ταλαντωτής

Παράδειγμα

Ένας πυκνωτής $1200pF$ φορτίζεται πλήρως από μια πηγή συνεχούς τάσης $500\mathrm{V}$. Στη συνέχεια αποσυνδέεται από την πηγή και συνδέεται, τη στιγμή $\mathrm{t=0}$, με ένα πηνίο $75\mathrm{mH}$. Να προσδιοριστούν:

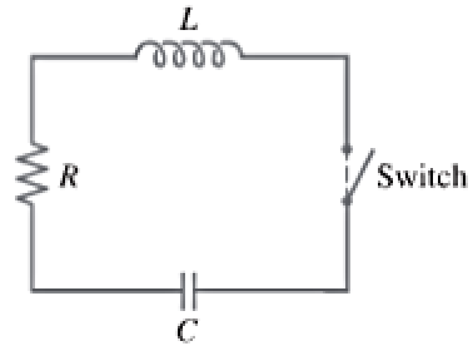
α) το αρχικό φορτίο στον πυκνωτή,

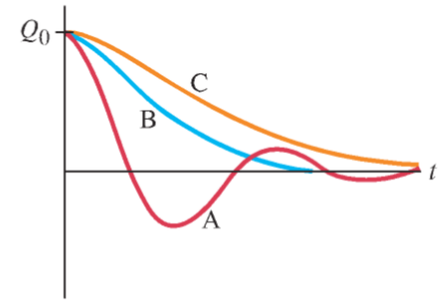
β) το μέγιστο ρεύμα,

γ) η συχνότητα f και η περίοδος T της ταλάντωσης και

δ) η συνολική ενέργεια που ταλαντώνεται στο σύστημα.

Κυκλώματα LRC





- Κύκλωμα LC με αντίσταση
- Κανόνας βρόχων Kirchhoff (άθροισμα δυναμικών κατά μήκος του βρόχου)

$$-L\frac{dI}{dt} - IR + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0$$ εστω λύση $Q = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega' t + \phi)$

- Το σύστημα θα είναι αποσβενόμενο αν $R^2 < \dfrac{4L}{C}$
- Αν το $R < \sqrt{4L/C}$

Η γωνιακή συχνότητα $\boxed{\omega' = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}$

Παράδειγμα

Τη χρονική στιγμή $t=0$, ένα πηνίο $40\ \mathrm{mH}$ τοποθετείται σε σειρά σε μια αντίσταση $R=3{,}0\ \Omega$ και έναν φορτισμένο πυκνωτή $C = 4{,}8\mu F$.

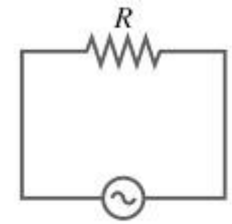
α) Δείξτε ότι το κύκλωμα αυτό θα εκτελεί ταλάντωση.

β) Καθορίστε τη συχνότητα ταλάντωσης.

γ) Πόσος χρόνος απαιτείται για να ελαττωθεί το φορτίο στο μισό της αρχικής του τιμής;

δ) Ποια τιμή της αντίστασης R θα αποτρέψει την ταλάντωση του κυκλώματος;

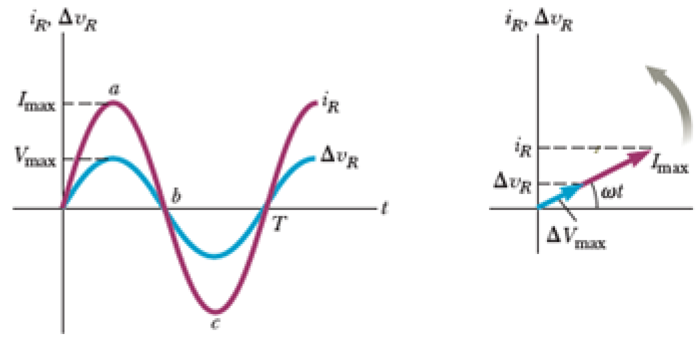
Κυκλώματα με εναλλασσόμενη πηγή



- Αντιστάτης

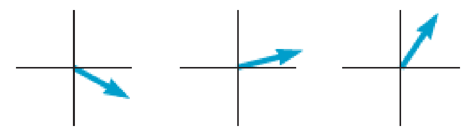
$$\Delta v + \Delta v_R = 0$$

$$\Delta v - i_R R = 0$$

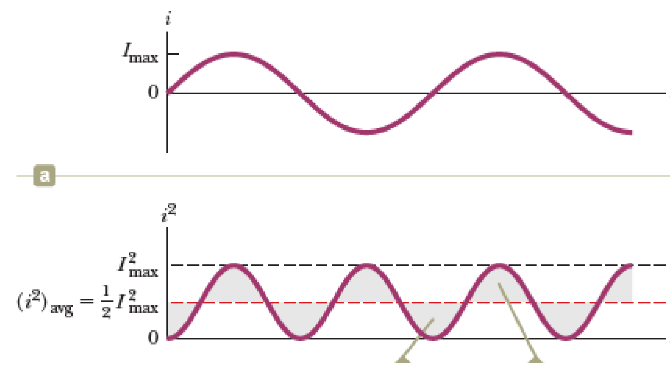


$$i_R = \frac{\Delta v}{R} = \frac{\Delta V_{max}}{R} sin\omega t = I_{max}\, sin\omega t$$

$$\Delta v_R = i_R R = I_{max} R sin\omega t$$



$$I_{rms} = \sqrt{(i^2)_{avg}} = \sqrt{\frac{1}{2} I_{max}^2} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = 0.707 I_{max}$$

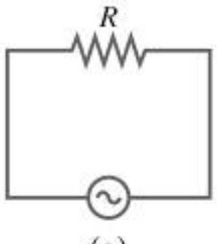


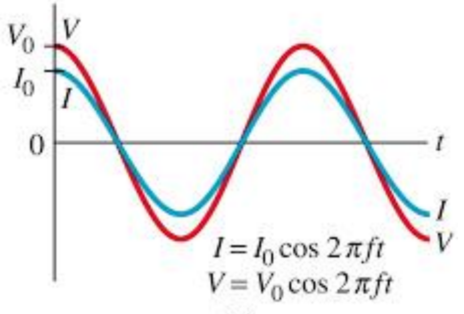
$$P = i^2 R = I_{rms}^2 R$$

Κυκλώματα με εναλλασσόμενη πηγή

- Αντιστάτης
  - Εναλλασσόμενη πηγή παράγει συνημιτονοειδή συχνότητα f και ρεύμα

$$I = I_0 \cos 2\pi f t = I_0 \cos \omega t$$



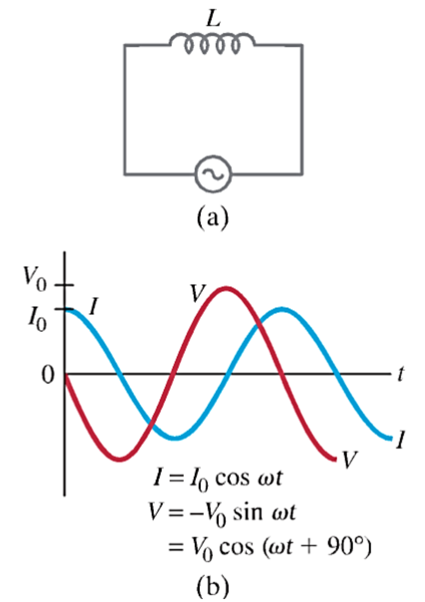


$$V = IR = RI_0 \cos \omega t = V_0 \cos \omega t$$

  - Μέση τιμή ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα

$$\overline{P} = \overline{I}\,\overline{V} = I_{rms}^2 R = \frac{V_{rms}^2}{R}$$

Κυκλώματα με εναλλασσόμενη πηγή



- Πηνίο (με αμελητέα αντίσταση)
  - Κανόνας του Kirchhoff

$$\Delta v = L\frac{di_L}{dt} = \Delta V_{max} sin\omega t$$

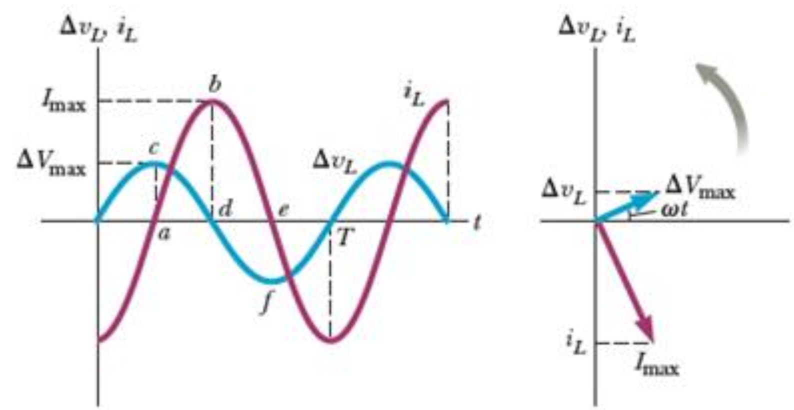
$$di_L = \frac{\Delta V_{max}}{L} sin\omega t dt$$

$$i_L = \frac{\Delta V_{max}}{L}\int sin\omega t dt = -\frac{\Delta V_{max}}{\omega L} cos\omega t$$

Ισχύει ότι $cos\omega t = -\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$i_L = \frac{\Delta V_{max}}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

  - Το ρεύμα υστερεί της τάσης κατά 90°(π/2)
  - Δεν καταναλώνεται κατά μέσο όρο ενέργεια



Κυκλώματα με εναλλασσόμενη πηγή

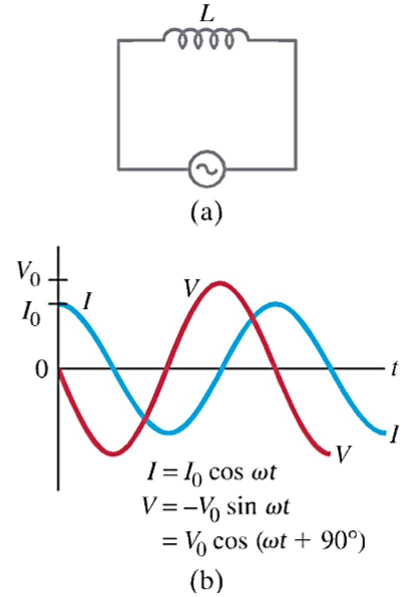
- Πηνίο (με αμελητέα αντίσταση)
  – Εμποδίζει τη ροή του φορτίου στο εναλλασσόμενο ρεύμα με την αντι-ΗΕΔ

$$V_0 = I_0 X_L$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

$$V_{rms} = I_{rms} X_L$$

  – Επαγωγική αντίδραση του πηνίου σε μονάδες Ohm
  – Ισχύει για μέγιστες τιμές μόνο V_0 και I_0 και για ενεργές τιμές V_{rms} και I_{rms}



Παράδειγμα

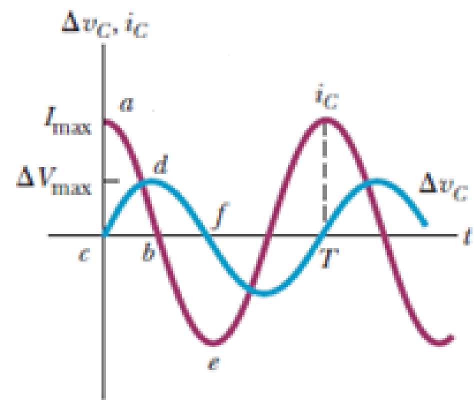
Ένα πηνίο έχει αντίσταση $R=100\Omega$ και επαγωγή $L=0.3H$.
Προσδιορίστε το ρεύμα στο πηνίο εάν επιβάλλεται σε αυτό

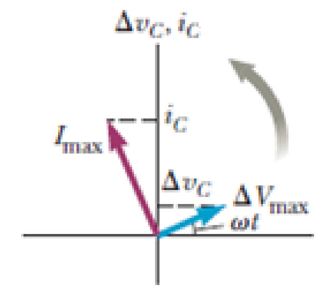
α) μια συνεχής τάση 120V.

β) εναλλασσόμενη τάση 120V (rms) με συχνότητα 60Hz.

Κυκλώματα με εναλλασσόμενη πηγή

- Πυκνωτής
  - Κανόνας του Kirchhoff





$$\Delta v - \frac{q}{C} = 0$$

$$q = C\Delta V_{max} sin\omega t$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \omega C\Delta V_{max} cos\omega t$$

$$cos\omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = \omega C\Delta V_{max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

  - Το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά 90°
  - Δεν καταναλώνεται κατά μέσο όρο ενέργεια

Κυκλώματα με εναλλασσόμενη πηγή

- Πυκνωτής
  - Κανόνας του Kirchhoff – επιβαλλόμενη τάση σε κάθε t

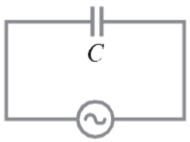
$$V = \frac{Q}{C}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = I_0 \cos \omega t$$

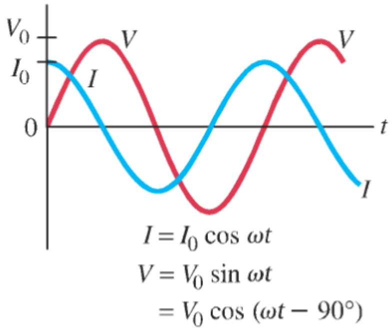
$$Q = \int_0^t dQ = \int_0^t I_0 \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$V = \frac{Q}{C} = I_0 \left(\frac{1}{\omega C} \right) \sin \omega t = V_0 \cos(\omega t - 90)$$

$$V_0 = I_0 \left(\frac{1}{\omega C} \right)$$



(a)



(b)

  - Το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά 90°
  - Δεν καταναλώνεται κατά μέσο όρο ενέργεια

Κυκλώματα με εναλλασσόμενη πηγή

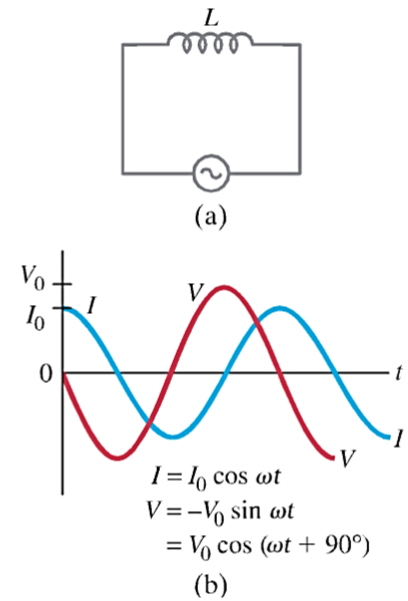
- Πυκνωτής

$$V_0 = I_0 X_C$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$V_{rms} = I_{rms} X_C$$

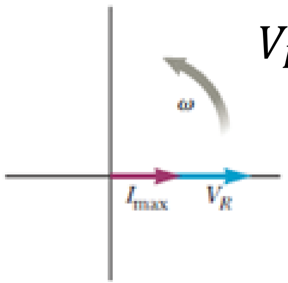
  - Χωρητική αντίδραση του πυκνωτή σε μονάδες Ohm
  - Ισχύει για μέγιστες τιμές μόνο V_0 και I_0 και για ενεργές τιμές V_{rms} και I_{rms}

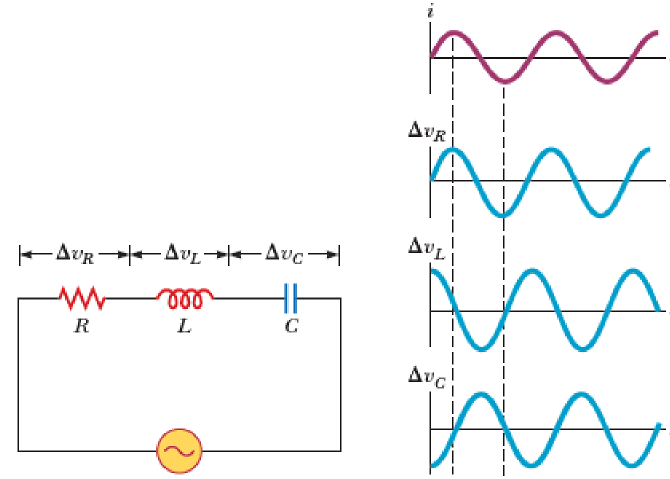


Εναλλασσόμενο κύκλωμα LRC

Αντιστάτης

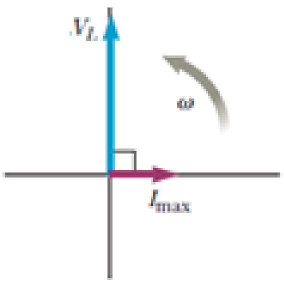
$$V_R = I_0 \mathrm{R} sin\omega t = V_R sin\omega t$$





Πηνίο

$$V_L = I_0 X_L sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_L cos\omega t$$



$$\Delta v = V_0 \sin\omega t$$

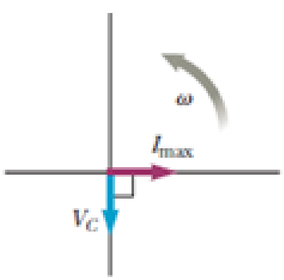
$$I = I_0 sin(\omega t - \varphi)$$

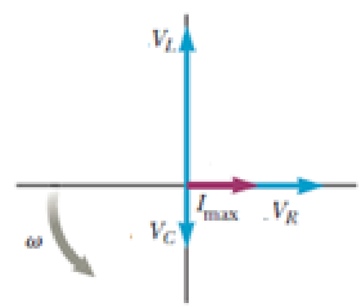
Κανόνας του Kirchhoff – επιβαλλόμενη τάση σε κάθε t

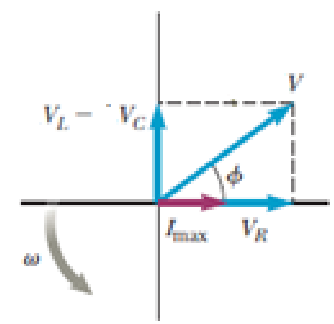
$$V = V_R + V_L + V_C$$

Πυκνωτής

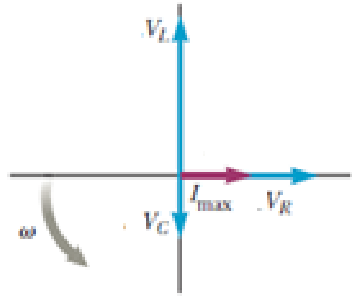
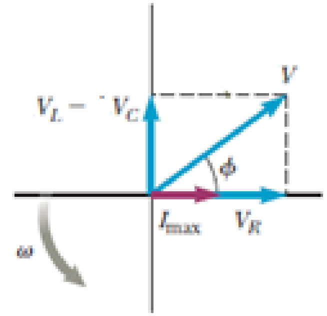
$$V_C = I_0 X_C sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -V_C cos\omega t$$







Εναλλασσόμενο κύκλωμα LRC

- Σύνθετη αντίδραση

κυκλώματος

$$V_0 = \sqrt{(V_L - V_C)^2 + V_R^2} = I_{max}\sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}$$

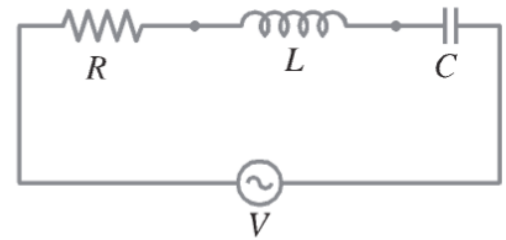
$$I_{max} = \frac{V_0}{\sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}}$$

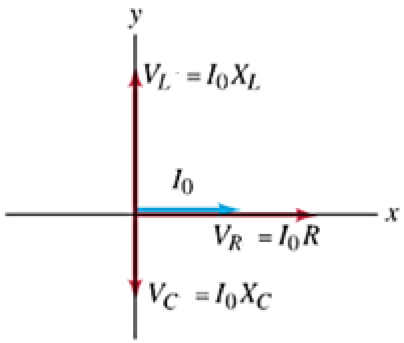
$$Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2} = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$$

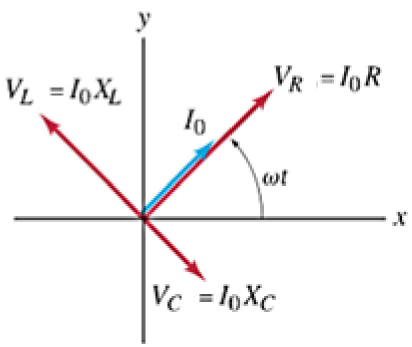
$$tan\varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{I_0(X_L - X_C)}{I_0\ R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

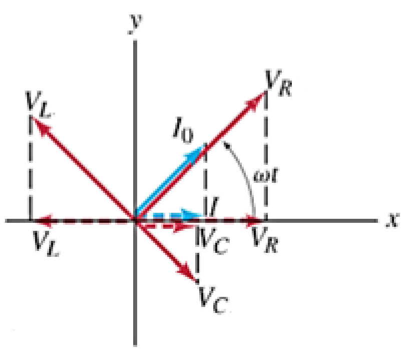
$$cos\varphi = \frac{V_R}{V} = \frac{I_0 R}{I_0\ Z} = \frac{R}{Z}$$

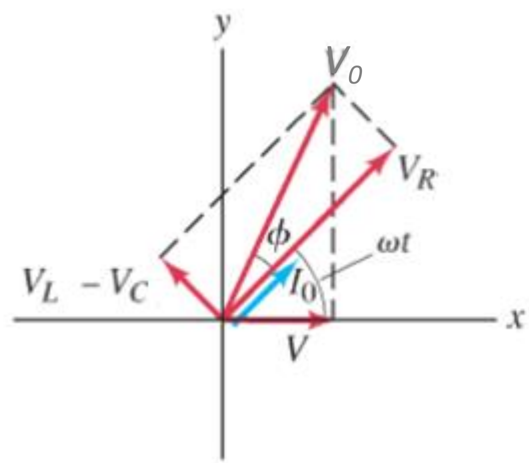
Περιστροφή στη συχνότητα f









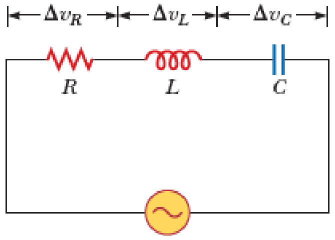


$$V_R = I_0 R$$

$$V_L = I_0 X_L$$

$$V_C = I_0 X_C$$

Εναλλασσόμενο κύκλωμα LRC

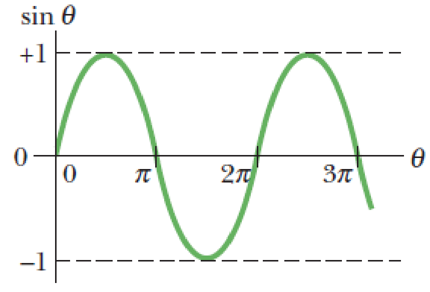


Ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα

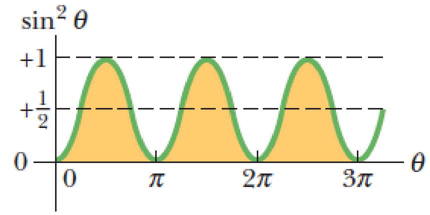
$$P = I^2 R = [I_{max} sin(\omega t - \varphi)]^2 R$$

$$= I_{max}^2 R sin^2(\omega t - \varphi)$$

Η μέση τιμή του $\quad \overline{sin^2\theta} = \frac{1}{2}$



(a)



$$\bar{P} = \frac{1}{2} I_{max}^2 R = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 R$$

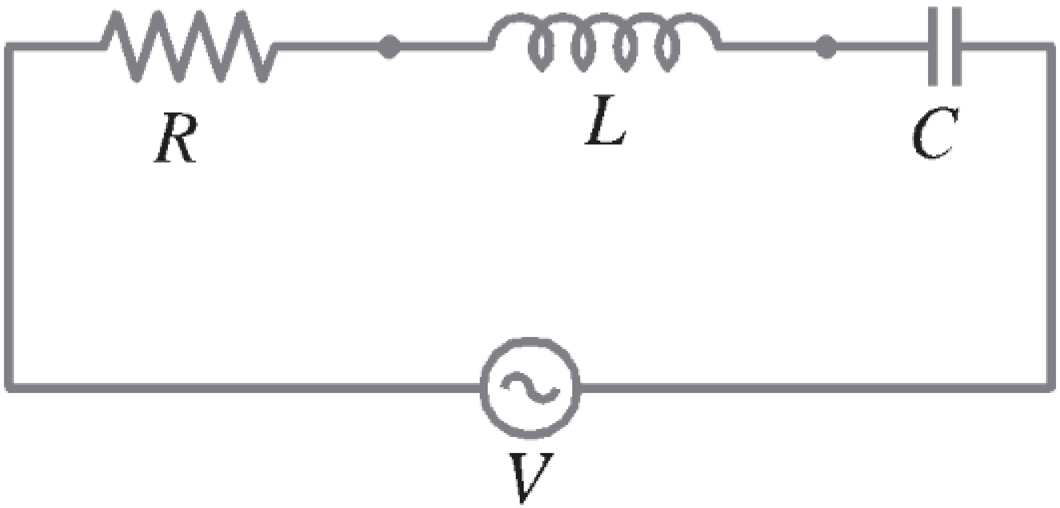
Ισχύει ότι $\quad I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}}$

$$\bar{P} = I_{rms}^2 R$$

$$\bar{P} = I_{rms}^2 Z cos\varphi = I_{rms} V_{rms} cos\varphi$$

Παράδειγμα

Έστω $R = 25,0\Omega$, $L = 30,0mH$ και $C = 12,0\mu F$ και συνδέονται σε σειρά με μια εναλλασσόμενη πηγή τάσης 90,0 V (ενεργός τιμή) και συχνότητα 500 Hz.

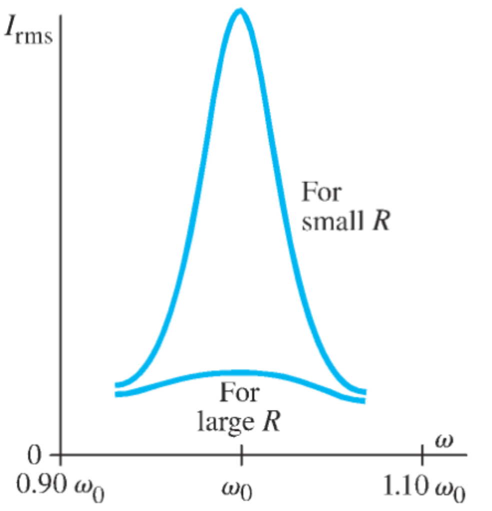


Να υπολογιστούν α) το ρεύμα στο κύκλωμα, β) οι ενδείξεις του βολτόμετρου (ενεργές τιμές) στα άκρα του κάθε στοιχείου, γ) η γωνία φάσης ϕ και δ) η ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα.

Συντονισμός

- Σε κύκλωμα LRC

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{V_{rms}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



- I_{max} όταν $\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) = 0$

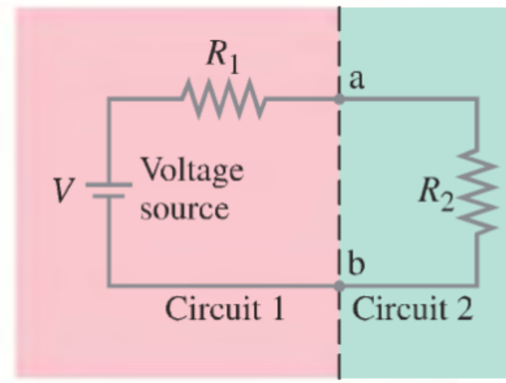
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

- Όταν ω=ω_0, το κύκλωμα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Προσαρμογή σύνθετης αντίστασης

- Μεταφορά μέγιστης ισχύος όταν $Z_{εξόδου}$ (κύκλωμα 1)είναι προσαρμοσμένη με την $Z_{εισόδου}$ (κύκλωμα 2)



$$P = I^2 R_2 = \frac{V^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

- Για Pmax

$$V^2 \left[\frac{1}{(R_1 + R_2)^2} - \frac{2R_2}{(R_1 + R_2)^3} \right] = 0$$

$$R_1 = R_2$$