ΦΥΣΙΚΗ III

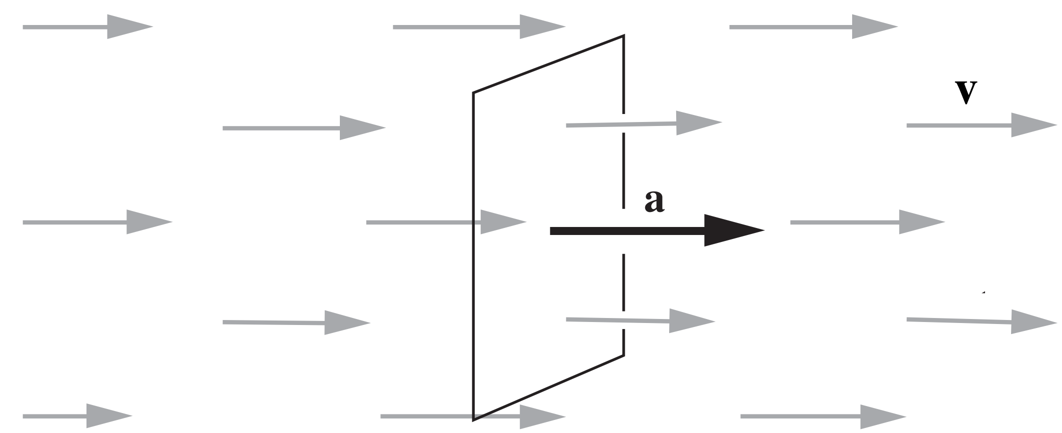
Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

2021 — 2022

Ροή διανυσματικού πεδίου

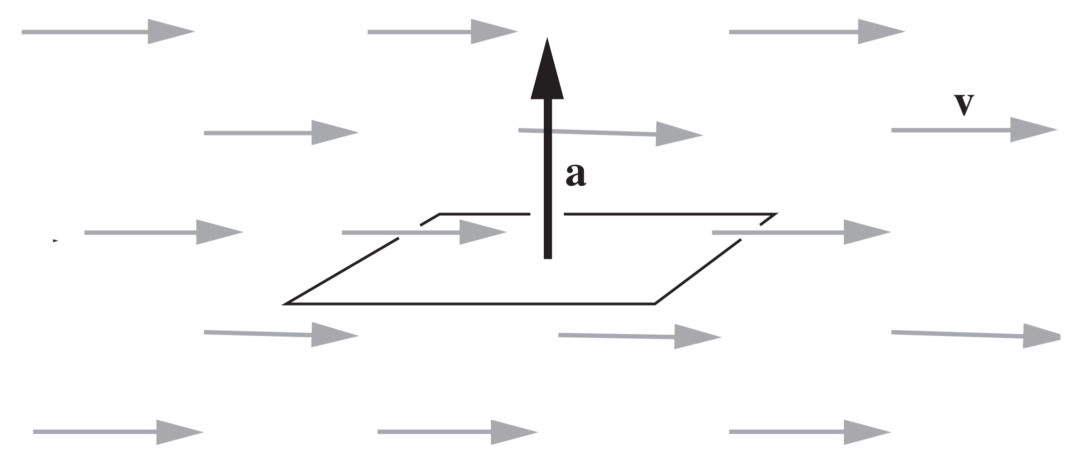
Ρυθμός διέλευσης (ρεύμα) σωματιδίων μέσα από μια επίπεδη επιφάνεια:

$$I = \frac{dN}{dt} = \frac{N}{V}\frac{dx}{dt}a = \rho \underbrace{va}_{\text{Ροή}}$$



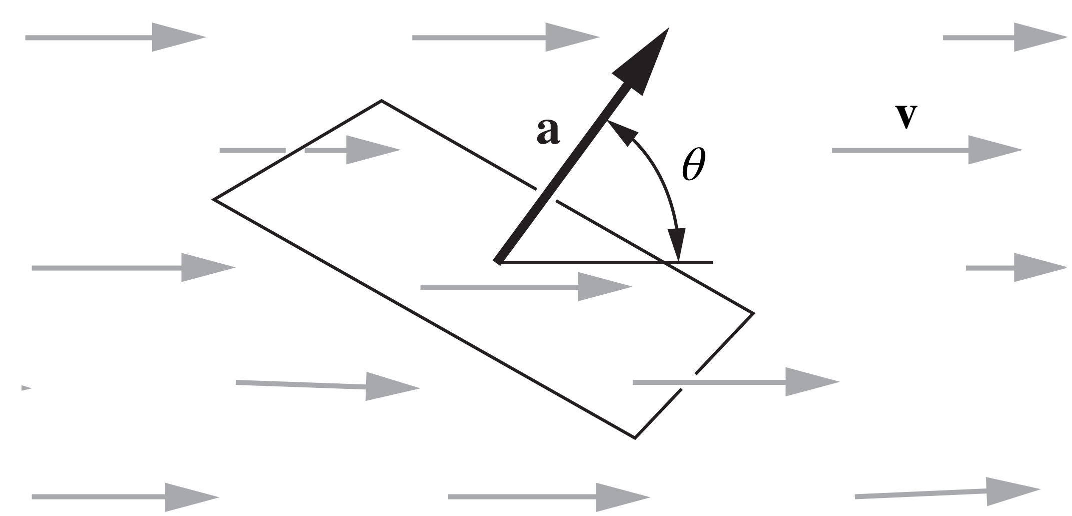
Όταν τα σωματίδια κινούνται παράλληλα με την επιφάνεια:

$$I = \frac{0}{dt} = 0$$



Όταν τα σωματίδια κινούνται υπό γωνία με την επιφάνεια:

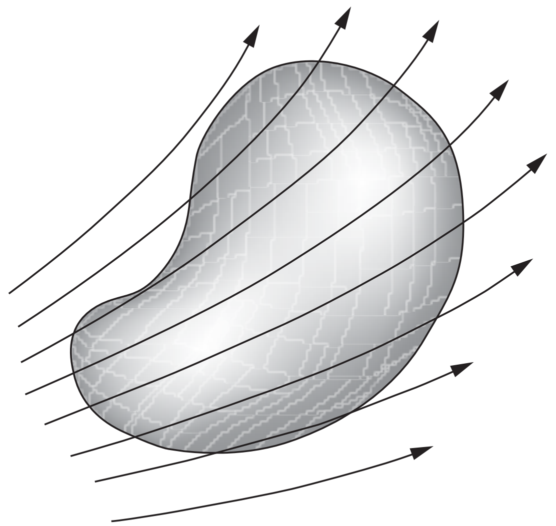
$$I = \frac{dN}{dt} = \frac{N}{V}\frac{dx}{dt}a\cos\theta = \rho va\cos\theta = \rho \underbrace{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}_{\text{Ροή}}$$



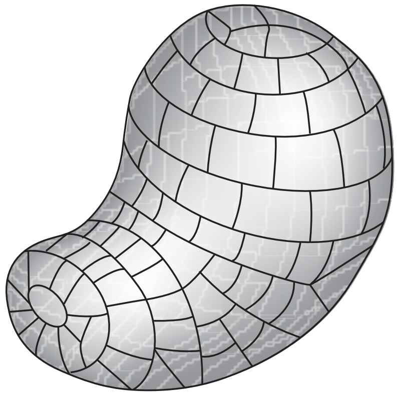
$\mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}$ $\quad$ $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ οι πλευρές της επιφάνειας.

Ροή ηλεκτρικού πεδίου μέσα από κλειστή επιφάνεια

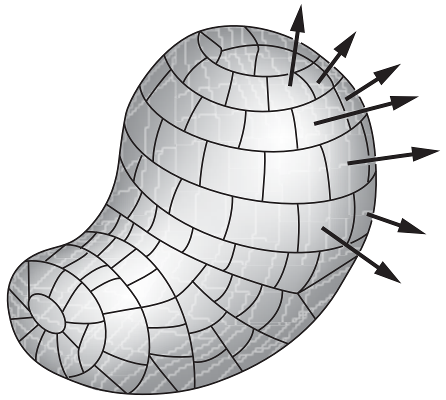
Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου $\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}$ ορίζεται καταρχήν για μια επίπεδη επιφάνεια εμβαδού $\mathbf{a}$.



Για μια κλειστή επιφάνεια, εφαρμόζουμε απειροστικό λογισμό: διαιρούμε την επιφάνεια σε ένα σύνολο απειροστών, σχεδόν επίπεδων, επιφανειών.



Κάθε απειροστό στοιχείο επιφάνειας αναπαρίσταται από ένα διάνυσμα με φορά προς το εξωτερικό της κλειστής επιφάνειας.



$$\Phi = \sum_j \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j \longrightarrow \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

Ο νόμος του Gauss

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i\,(\text{inside } S) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(S)} \rho \, d\tau$$

Ενσωματωμένη η αρχή της επαλληλίας.

- Είναι ισοδύναμος με το νόμο του Coulomb (ίδιος νόμος δύναμης, άλλη διατύπωση), με τη διαφορά ότι ισχύει και για πεδία χωρίς κεντρική συμμετρία.

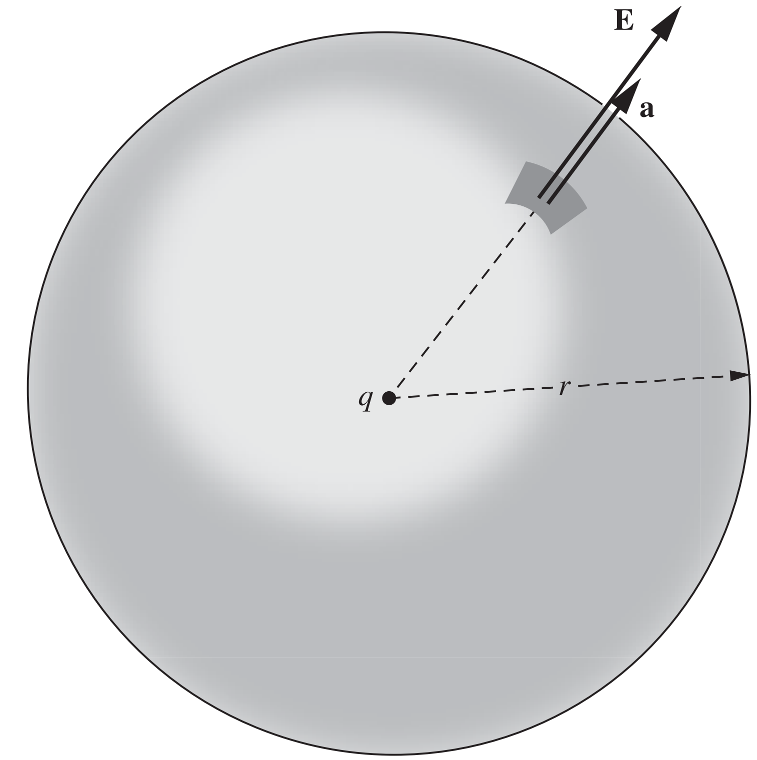
- Μας δίνει το συνολικό φορτίο σε μια περιοχή όταν είναι γνωστό το ηλεκτρικό πεδίο σε όλη την επιφάνεια που ορίζει την περιοχή (αντίστροφα με το νόμο του Coulomb).

- Επιτρέπει τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου για κατανομές φορτίου με ψηλό βαθμό συμμετρίας.

- Μπορεί να πάρει μια μορφή που εφαρμόζεται σε κάθε σημείο μιας περιοχής αντί πάνω σε μια επιφάνεια, μια μορφή που είναι πολύ σημαντική για την περαιτέρω ανάπτυξη του ηλεκτρομαγνητισμού.

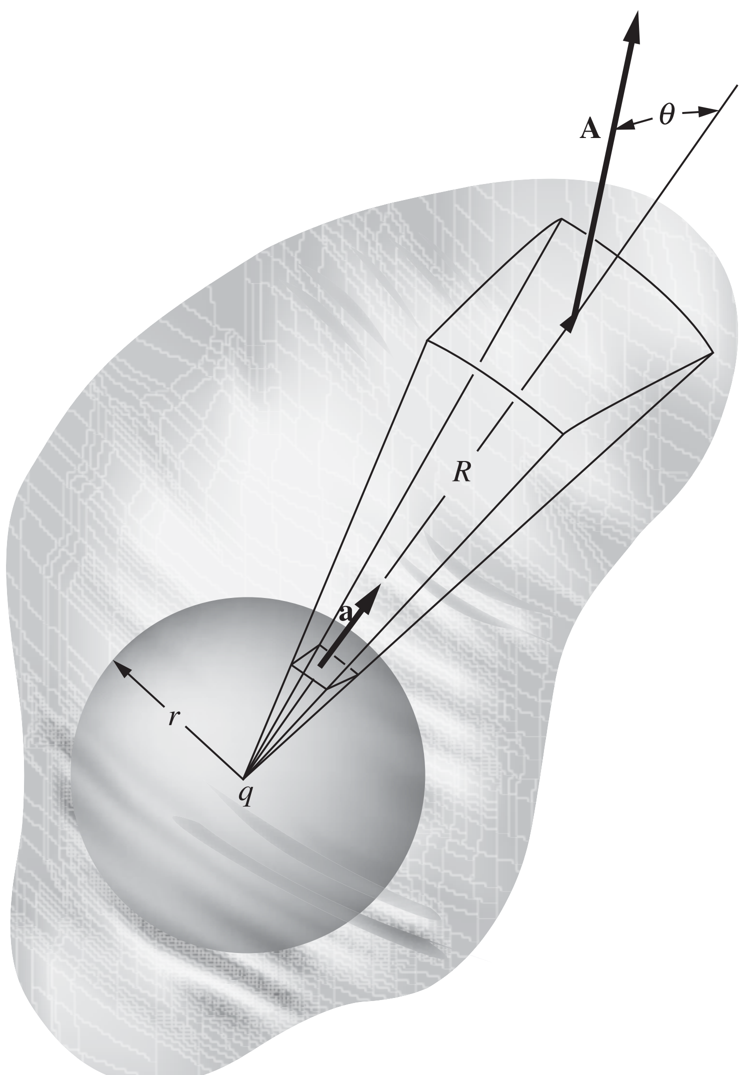
Η σχέση των νόμων Coulomb και Gauss

Ο νόμος του Gauss είναι άμεση συνέπεια του νόμου δύναμης **αντίστροφου τετραγώνου**, στον οποίο υπάγεται και ο νόμος του Coulomb:



$$\Phi = E \cdot A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow$$

Ροή ανεξάρτητη από την ακτίνα της σφαίρας.



Η ροή είναι ανεξάρτητη και από το σχήμα της κλειστής επιφάνειας:

$$d\Phi_{(a)} = \mathbf{E}_{(r)} \cdot \mathbf{a} = E_{(r)} a$$

$$d\Phi_{(A)} = \mathbf{E}_{(R)} \cdot \mathbf{A} = E_{(R)} A \cos\theta$$

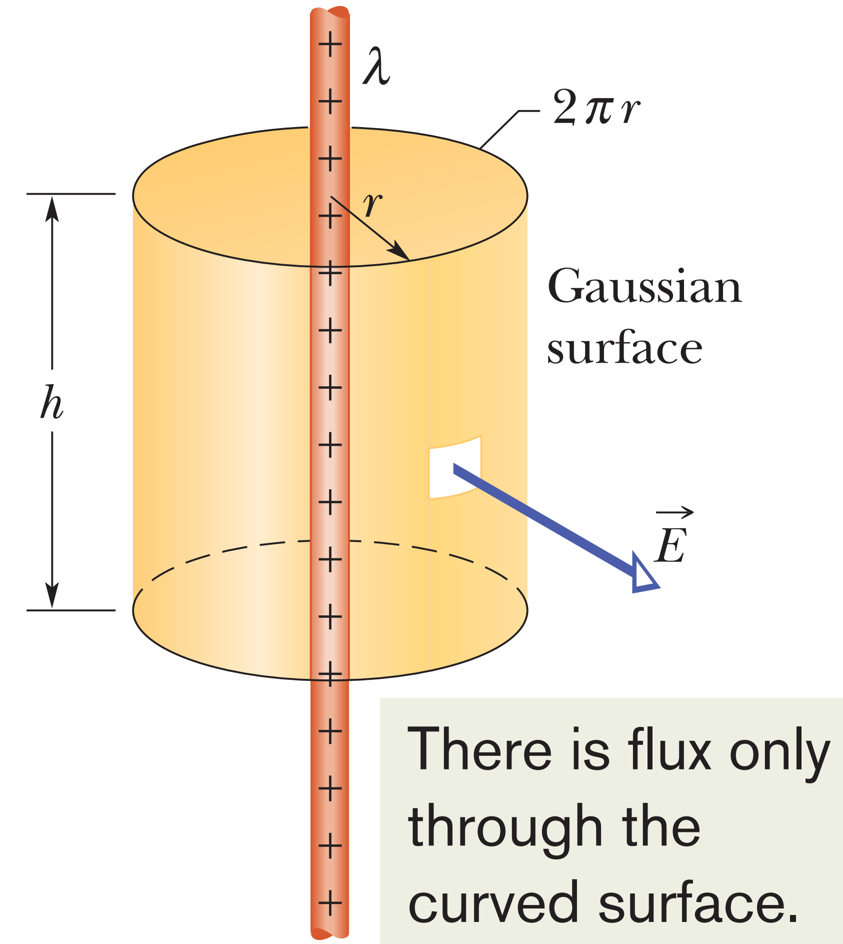
$$d\Omega = \frac{a}{r^2} = \frac{A\cos\theta}{R^2}$$

$$E_{(R)} A \cos\theta = \left[E_{(r)} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \left[a \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] = E_{(r)} a$$

$$\Longrightarrow \; d\Phi_{(a)} = d\Phi_{(A)} \; \Longrightarrow \; \oint_{\text{sphere}} d\Phi_{(a)} = \oint_{\text{generic}} d\Phi_{(A)} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Ο νόμος του Gauss για κυλινδρική συμμετρία

Η μακριά ("άπειρου μήκους") και λεπτή ευθύγραμμη ράβδος με ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα φορτίου λ είναι το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα με κυλινδρική συμμετρία.



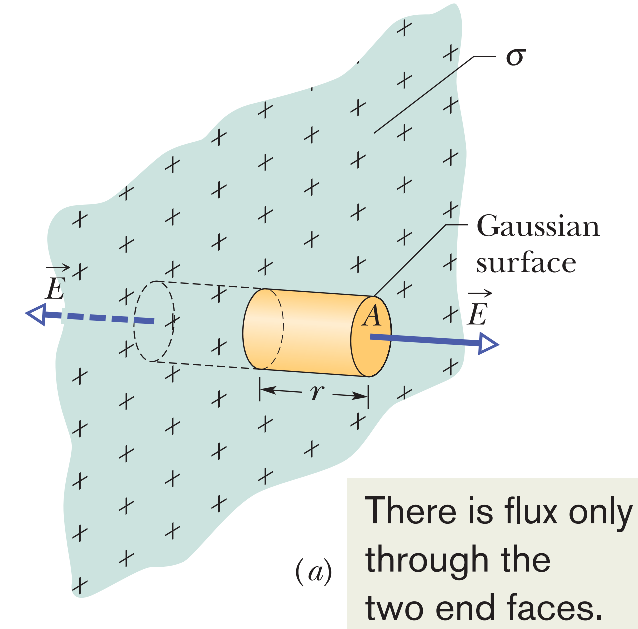
Το πεδίο σε κάθε σημείο μιας κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας r με άξονα τη ράβδο είναι κάθετο προς τη ράβδο, γιατί οι συνιστώσες που σχηματίζουν γωνία με τη ράβδο αλληλοαναιρούνται. ⇒ Δεν υπάρχει ροή μέσα από τις βάσεις του κυλίνδρου.

$$\Phi = EA = E \cdot 2\pi r h = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

Ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση r από τη ράβδο.

Ο νόμος του Gauss για επίπεδη συμμετρία

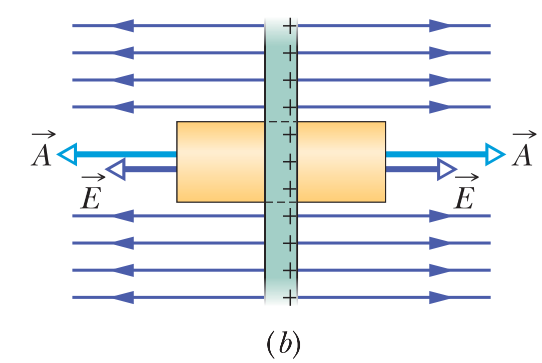
Εκτεταμένη (“άπειρη”) επίπεδη πλάκα με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.

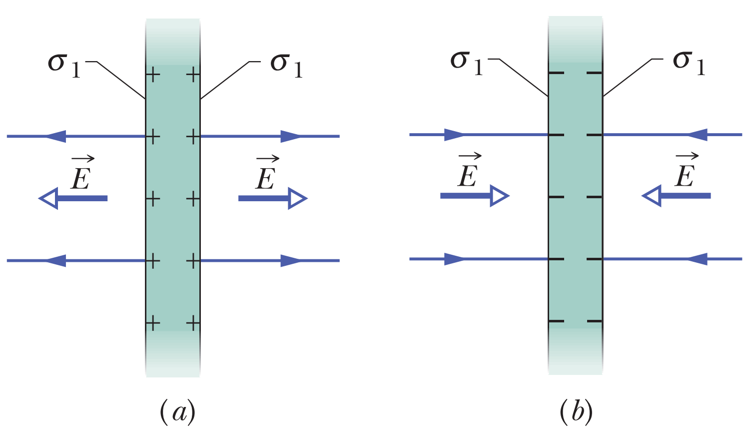


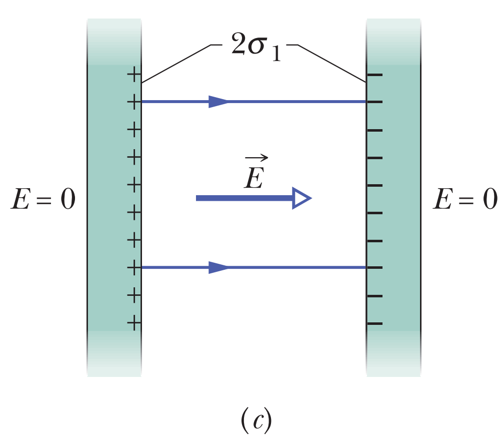
Επιλέγουμε και πάλι μια κυλινδρική περικλείουσα επιφάνεια. Το πεδίο είναι κάθετο στην πλάκα (παράλληλες συνιστώσες αλληλοαναιρούνται). ⇒ Τώρα υπάρχει ροή μόνο μέσα από τις βάσεις του κυλίνδρου.

$$\Phi = E\cdot\pi r^2 + E\cdot\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\cdot\pi r^2}{\varepsilon_0} \implies \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Πεδίο ομοιόμορφης έντασης.







Δύο παράλληλες αγώγιμες πλάκες με αντίθετα φορτία: αυτά κατανέμονται ομοιόμορφα στις αντικρυστές επιφάνειες των δύο πλακών. Δεν υπάρχει πεδίο από τις εξωτερικές πλευρές.

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} \implies \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

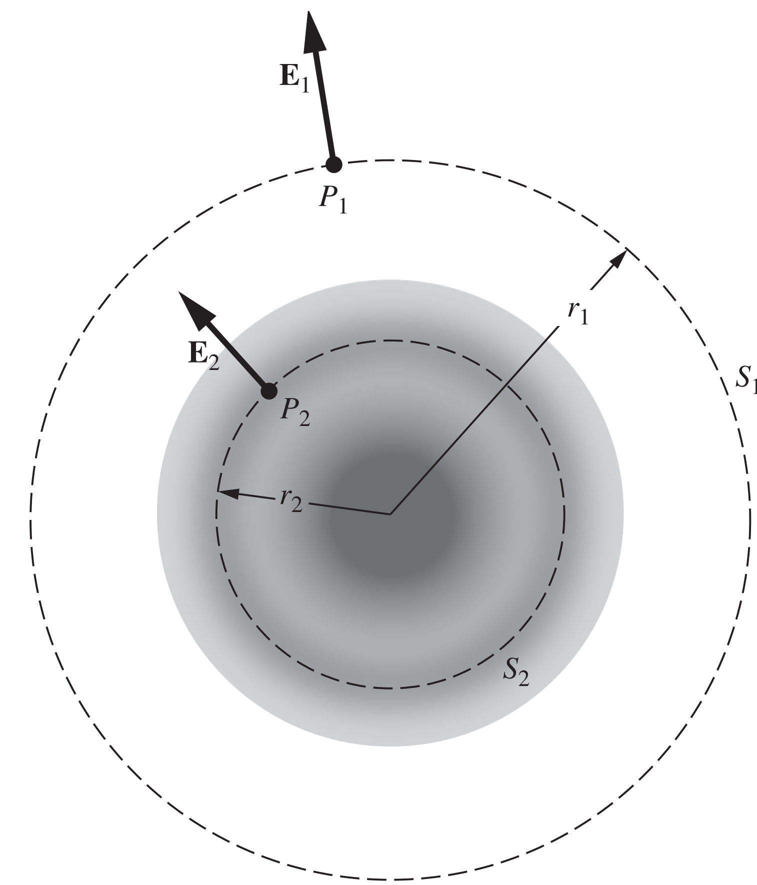
Ο νόμος του Gauss για σφαιρική συμμετρία

$$E_1 = \frac{Q \text{ inside } S_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$$

Το πεδίο έξω από τη φορτισμένη σφαίρα είναι το ίδιο με το πεδίο όλου του φορτίου της σφαίρας συγκεντρωμένου στο κέντρο της.

$$E_2 = \frac{Q \text{ inside } S_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

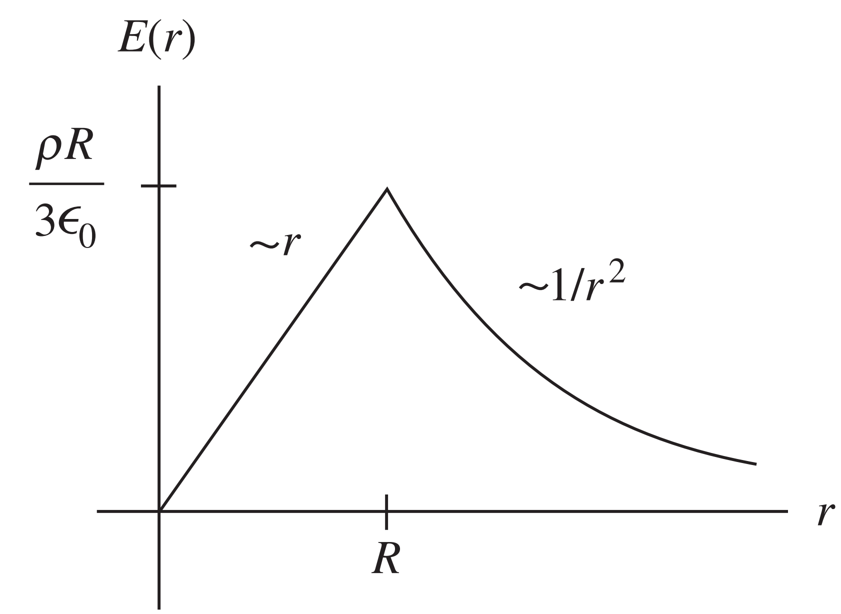
Το πεδίο μέσα στη σφαίρα είναι το ίδιο με το πεδίο όλου του φορτίου σε μικρότερη ακτίνα συγκεντρωμένου στο κέντρο της. Το φορτίο σε μεγαλύτερη ακτίνα δεν συνεισφέρει στο πεδίο.



Πεδίο ομογενώς φορτισμένης σφαίρας με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου ρ:

$$E(r) = \frac{(4\pi R^3/3)\rho}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \qquad (r \geq R)$$

$$E(r) = \frac{(4\pi r^3/3)\rho}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad (r \leq R)$$



Διαφορική μορφή του νόμου του Gauss

Από το θεώρημα του Gauss: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_{V(S)} \mathrm{div}\mathbf{E}\, d\tau$

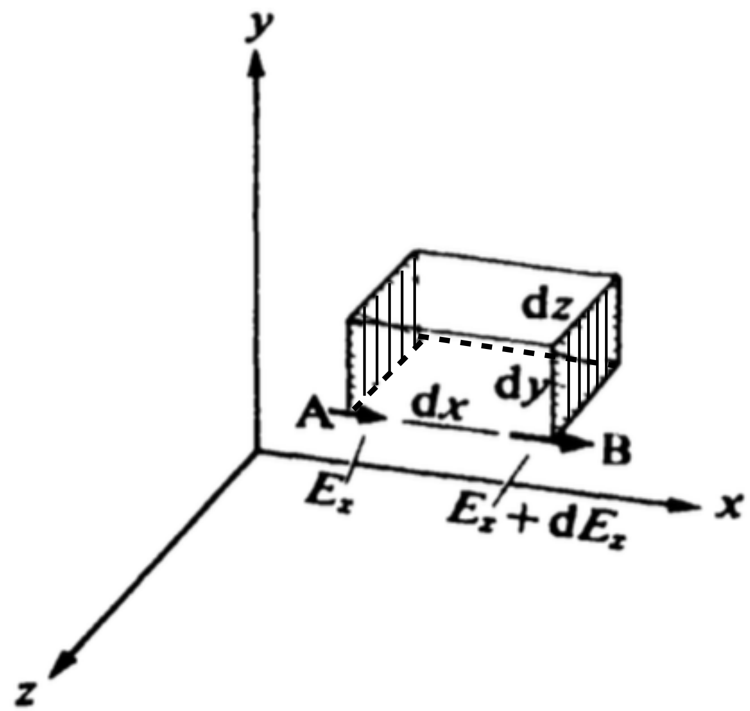
Από το νόμο του Gauss σε ολοκληρωτική μορφή: $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{\text{inside } S}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V(S)} \rho\, d\tau \qquad \forall S$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{div}\mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Απόκλιση του ηλεκτρικού πεδίου: Συνδέει το πεδίο με την πηγή του <u>στο ίδιο σημείο</u>.

Σχέση απόκλισης και ροής του ηλεκτρικού πεδίου

Ο νόμος του Gauss, σε ολοκληρωτική μορφή, δίνει τη ροή του πεδίου μέσα από μια πεπερασμένη επιφάνεια που περικλείει τα φορτία−πηγές.



Για να βρούμε τη διαφορική μορφή του, εξετάζουμε τη ροή του πεδίου μέσα από μια απειροστή επιφάνεια ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου που περικλείει φορτίο με κατανομή πυκνότητας ρ.

Ροή στη διεύθυνση x: $$E_x(B)dydz - E_x(A)dydz = \left[E_x(A) + \frac{\partial E_x}{\partial x}dx - E_x(A)\right]dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}dxdydz$$

Ροή στη διεύθυνση y: $$\frac{\partial E_y}{\partial y}dxdydz$$

Ροή στη διεύθυνση z: $$\frac{\partial E_z}{\partial z}dxdydz$$

Συνολική ροή: $$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dxdydz \overset{d\Phi = dq/\varepsilon_0}{=} \frac{\rho dxdydz}{\varepsilon_0} \implies \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\implies \boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$